Μαθηματικά ΙΙ

Υπεύθυνος Καθηγητής:
Γιάννης Ανδρουλιδάκης

Εφαρμογές στη Φυσική

Εαρινό Εξάμηνο 2024-2025

Η ροή ενός διανυσματικού πεδίου

θα αναζητήσουμε τη φυσική και γεωμετρική ερμηνεία της απόκλισης (divergence) ενός διανυσματικού πεδίου (δ.π.).

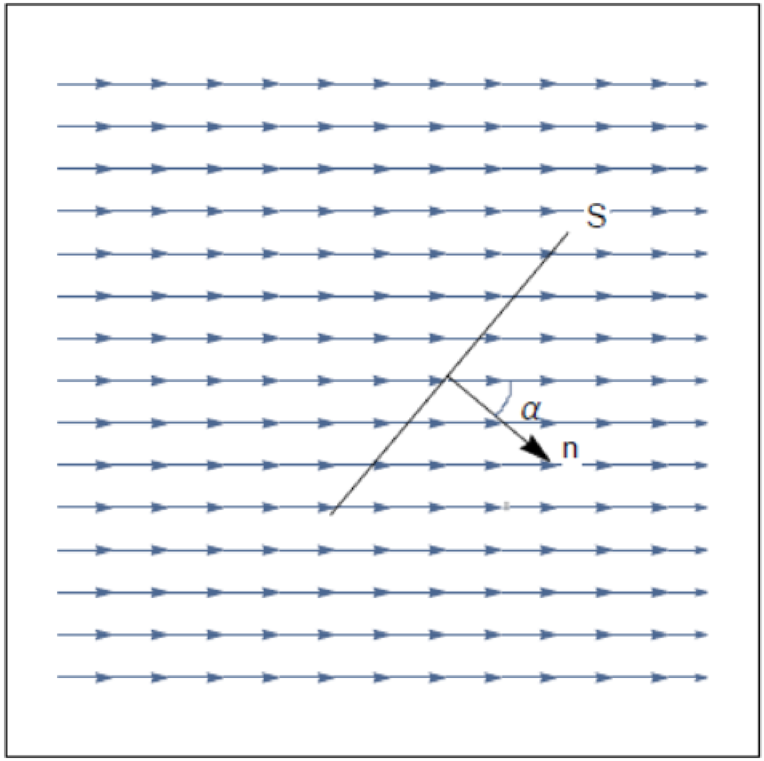
Για ένα σταθερό δ.π. F και μιά επίπεδη επιφάνεια S, η ροή του πεδίου μέσα από την επιφάνεια ορίζεται ως το μέγεθος:

$$\Phi = \mathbf{F}\cdot\mathbf{S}$$

δηλαδή είναι το **εσωτερικό γινόμενο** ανάμεσα:

$$\Phi = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}S \qquad \mathbf{S} = S\mathbf{n}$$

$$\boxed{\Phi = \mathbf{F}\cdot\mathbf{S} = |\mathbf{F}|\cdot|\mathbf{S}|\cdot\cos\alpha}$$



Περίπτωση 1: Το πεδίο F είναι κάθετο στην επιφάνεια → α=0° ή α=180°

Η **ροή Φ είναι μέγιστη**

- **Θετική ροή** αν $\mathbf{F}$ έχει την ίδια φορά με $\mathbf{n}$
- **Αρνητική ροή** αν έχει αντίθετη φορά

Περίπτωση 2: Το πεδίο F είναι παράλληλο με την επιφάνεια → α=90°

Καμία ροή δεν περνάει από την επιφάνεια Φ=0

Φ>0 → εκροή, το πεδίο “φεύγει” απο την επιφάνεια → τοπική απόκλιση
Φ<0 → εισροή, το πεδίο “μπαίνει” στην επιφάνεια → τοπική σύγκλιση

Η ροή ενός διανυσματικού πεδίου

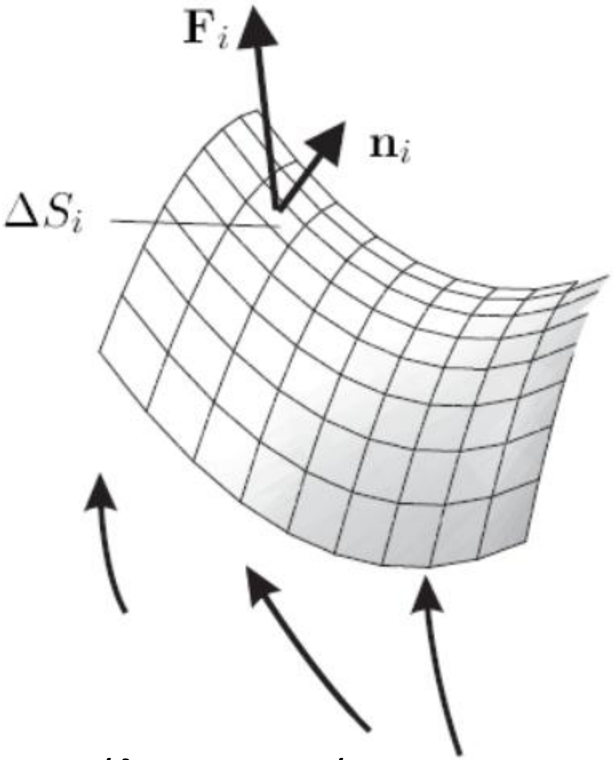
Παράδειγμα: Ροή νερού μέσα από επίπεδη επιφάνεια

Η ροή ενός διανυσματικού πεδίου

Τι συμβαίνει όταν το διανυσματικό πεδίο δεν είναι σταθερό και η επιφάνεια δεν είναι επίπεδη
Θεωρούμε

- $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: διανυσματικό πεδίο (π.χ. ταχύτητα, δύναμη),
- S: γενική (ενδεχομένως κυρτή ή καμπύλη) επιφάνεια.
- Χωρίζουμε το S σε πολλά μικρά, περίπου επίπεδα κομμάτια:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$



- Κάθε S_i έχει **εμβαδόν** ΔS_i και **μοναδιαίο κανονικό διάνυσμα** $\mathbf{n}_i$,
- Ορίζουμε:

$$\Delta \mathbf{S}_i = \mathbf{n}_i \cdot \Delta S_i$$

Επειδή το ΔS_i είναι πολύ μικρό θεωρούμε ότι F_i είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία του ΔS_i

Άρα η ροή από κάθε στοιχειώδη επιφάνεια είναι: $\Delta \Phi_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i$

Και η συνολική ροή που περνά από όλη την επιφάνεια είναι το άθροισμα: $\boxed{\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i}$

Η ροή ενός διανυσματικού πεδίου

Το όριο του αθροίσματος όταν n → ∞ (και όταν η λεπτότητα της διαμέρισης, S_i, τείνει στο μηδέν), λέγεται επιφανειακό ολοκλήρωμα του F πάνω στην επιφάνεια S και συμβολίζεται:

$$\boxed{\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}$$

Γιατί είναι διπλό;

επειδή η επιφάνεια S είναι **δύο διαστάσεων** (2D) μέσα στον 3D χώρο — και για να «σαρώσουμε» (integrate) πάνω σε αυτήν, χρειάζονται **δύο ανεξάρτητες μεταβλητές**.

Η επιφάνεια S είναι **δισδιάστατη γεωμετρική περιοχή** μέσα στον τρισδιάστατο χώρο. Για να την περιγράψουμε, χρειαζόμαστε **δύο παραμέτρους**: 1 *Γιατί διπλό ολοκλήρωμα;*

Γιατί για κάθε σημείο της επιφάνειας χρειάζεται να "σαρώσουμε" σε **δύο κατευθύνσεις** (π.χ. κατά u και v, ή κατά x και y αν η επιφάνεια βρίσκεται στο επίπεδο).

Έτσι:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \quad = \text{προσθήκη όλων των στοιχειωδών ροών } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

όπου κάθε dS είναι **εμβαδόν στοιχειώδους παραλληλογράμμου** στην επιφάνεια.

Η ροή ενός διανυσματικού πεδίου σε κλειστή επιφάνεια

Τι σημαίνει κλειστή επιφάνεια;

Η **ολική ροή** μέσα από την επιφάνεια εκφράζεται ως: $\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

Μια **κλειστή επιφάνεια** είναι μια επιφάνεια που **περικλείει έναν όγκο** πλήρως, **χωρίς άκρα ή ανοίγματα**.

Δεν έχει «τέλος» ή «άκρη» — είναι **συνεχής και χωρίς σύνορα**.

(π.χ. σφαίρα, κύβος)

Αν σκεφτούμε την F ως **ταχύτητα ρευστού**, τότε:

$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ μετρά **τη συνολική εκροή ή εισροή** του ρευστού από όλη την επιφάνεια.

- Αν η ροή είναι **θετική ⇒ καθαρή εκροή** → το ρευστό «φεύγει» από το σώμα.
- Αν η ροή είναι **αρνητική ⇒ καθαρή εισροή** → το ρευστό «μπαίνει» στο σώμα.

Η ροή ενός διανυσματικού πεδίου

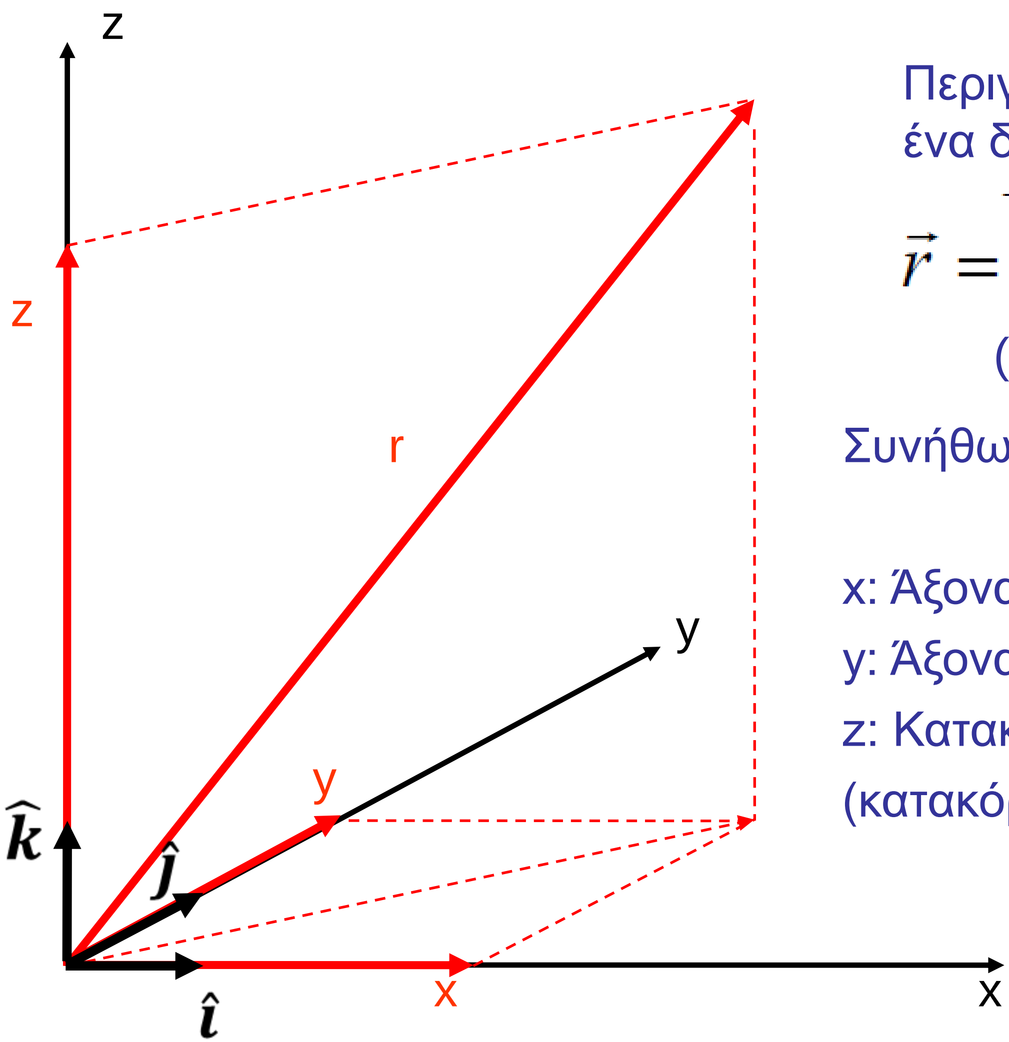
Θεώρημα Απόκλισης (Gauss)

Εισαγωγή στη ρευστοδυναμική

Για να εξετάσουμε τη δυναμική ενός ρευστού σε κίνηση (και μάλιστα επιταχυνόμενη) απαιτείται να επανεκφράσουμε όλους τους νόμους της Κλασσικής Μηχανικής με τρόπο ώστε να μπορούν να περιγράψουν την κίνηση του ρευστού.

Πριν προχωρήσουμε, επιβάλλεται να κάνουμε μια ανασκόπηση των εννοιών της μερικής και ολικής παραγώγου. Για το σκοπό αυτό, πρώτα θα εξάγουμε κάποιες έννοιες καθαρά μαθηματικά, και μετά θα δώσουμε έμφαση στη φυσική τους ερμηνεία.

Ιδιότητες υλικού στοιχείου



Περιγραφή της θέσης στο χώρο με ένα διάνυσμα:

$$\vec{r} = [x, y, z] \equiv x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

(Διάνυσμα χώρου)

Συνήθως, οι άξονές μας θα έχουν ως εξής:

x: Άξονας Ανατολή -> Δύση

y: Άξονας Νότου -> Βορρά

z: Κατακόρυφος άξονας κάτω -> πάνω (κατακόρυφη διεύθυνση)

Σύστημα συντεταγμένων

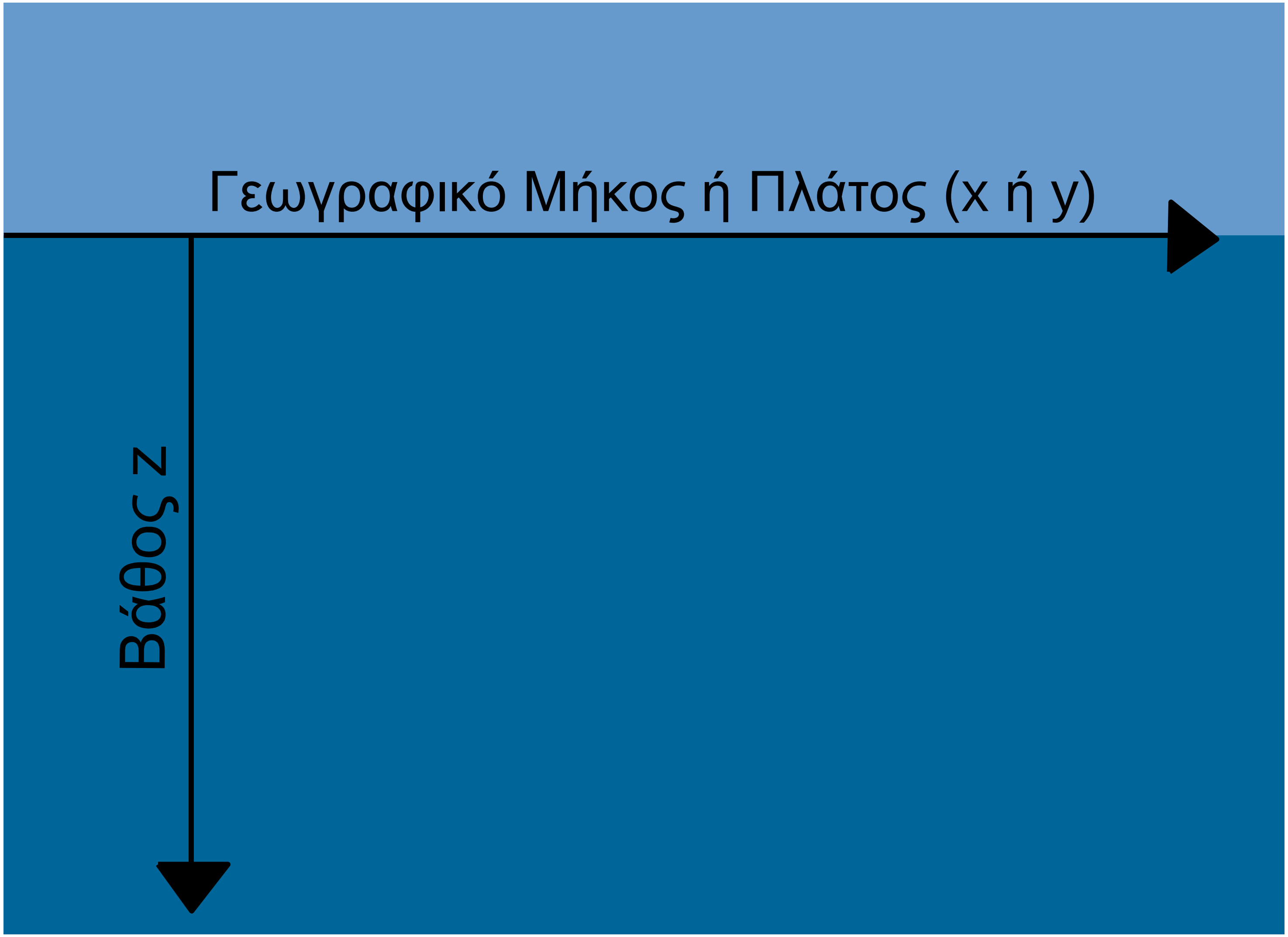
x: Δ → Α

y: Ν → Β

z: κάτω → πάνω

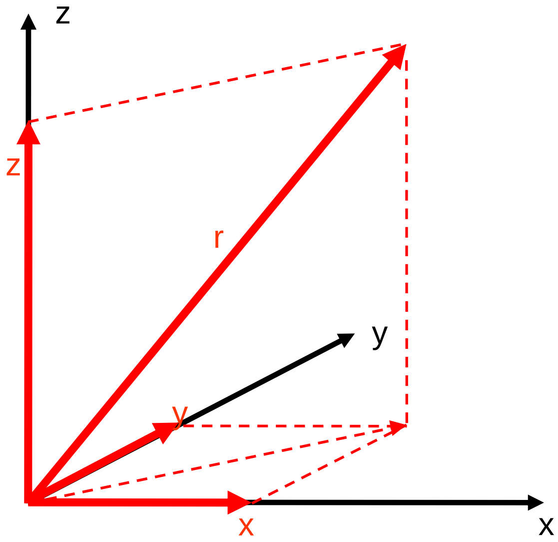
Σύστημα συντεταγμένων

(προφίλ θάλασσας)



Ιδιότητες υλικού στοιχείου

Επιθυμούμε να περιγράψουμε την μεταβολή μιας ιδιότητας γ (π.χ. θερμοκρασία, αλατότητα) του υλικού στον τρισδιάστατο χώρο και στο χρόνο



Σε συγκεκριμενη χρονικη στιγμή t_1 μια ιδιότητα γ του απειροστού υλικού στοιχείου του ρευστού, θα είναι συνάρτηση της θέσης του:

$$\gamma = \gamma(\vec{r})$$

Μια ιδιότητα γ του απειροστού υλικού στοιχείου του ρευστού σε κίνηση, θα είναι συνάρτηση της θέσης του και του χρόνου:

$$\gamma = \gamma(\vec{r}, t)$$

Αλλά, εφ' όσον το ρευστό μας δεν ηρεμεί, η θέση του υλικού σημείου θα είναι συνάρτηση του χρόνου:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)].$$

Τότε, η τιμή της παραμέτρου γ εξαρτάται και από τη θέση του υλικού σημείου $r(t)$, και από το χρόνο t

Για να βρούμε την μεταβολή της παραμέτρου γ με το χρόνο t, εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης:

$$y = f\left(g(x)\right) \; \kappa\alpha\iota \; u = g(x) \; \tau\acute{o}\tau\varepsilon \; y = f(u)$$

Παίρνοντας λοιπόν την παράγωγο της παραμέτρου γ με το χρόνο t, και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης, έχουμε:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma(\vec{r},t)}{dt} = \frac{d\gamma(\vec{r}(t),t)}{dt} = \frac{d\gamma(x(t),y(t),z(t),t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{dz}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + u\frac{\partial\gamma}{\partial x} + v\frac{\partial\gamma}{\partial y} + w\frac{\partial\gamma}{\partial z}$$

, όπου: $u \equiv \frac{dx}{dt}, v \equiv \frac{dy}{dt} \; \kappa\alpha\iota \quad w \equiv \frac{dz}{dt}$ Συνιστώσες της ταχύτητας του υλικού στοιχείου στους 3 άξονες

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma(\vec{r},t)}{dt} = \frac{d\gamma(\vec{r}(t),t)}{dt} = \frac{d\gamma(x(t),y(t),z(t),t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{dz}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + u\frac{\partial\gamma}{\partial x} + v\frac{\partial\gamma}{\partial y} + w\frac{\partial\gamma}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\gamma \equiv \frac{\partial\gamma}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\hat{k}$$

Θεωρούμε τον ορισμό της βάθμωσης ενός βαθμωτού μεγέθους

$$\vec{u} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k})$$

Και της ταχύτητας

Αντιστοιχούμε τους τρεις όρους τις εξίσωσης με το εσωτερικό γινόμενο

$\vec{u}\ \vec{\nabla}\gamma$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\gamma$$

Ολική παράγωγος

Άρα, η μεταβολή της παραμέτρου γ με το χρόνο t για ένα απειροστό υλικό στοιχείο, δίνεται από:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + u\frac{\partial\gamma}{\partial x} + v\frac{\partial\gamma}{\partial y} + w\frac{\partial\gamma}{\partial z} \longrightarrow \boxed{\frac{D\gamma}{Dt} \equiv \frac{\partial\gamma}{\partial t} + u\frac{\partial\gamma}{\partial x} + v\frac{\partial\gamma}{\partial y} + w\frac{\partial\gamma}{\partial z} \equiv \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\gamma}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\gamma$$

Υλική παράγωγος της παραμέτρου γ με το χρόνο t, ακολουθώντας το υλικό στοιχείο στην κίνησή του

Μερική παράγωγος της παραμέτρου γ με το χρόνο t, σε σταθερό σημείο στο χώρο (π.χ. αλλάζει η θερμοκρασία σε ένα σημείο λόγω ανατολής του ηλίου)

Μεταβολή της παραμέτρου γ με το χρόνο t λόγω των όρων μεταφοράς

(γιατί χρησιμοποιούμε πληθυντικό;)

Προσοχή: Η υλική παράγωγος Dγ/Dt αποτελεί την ειδική περίπτωση ολικής παραγώγου, dγ/dt, όπου σαν ταχύτητα χρησιμοποιείται η ταχύτητα του ρευστού

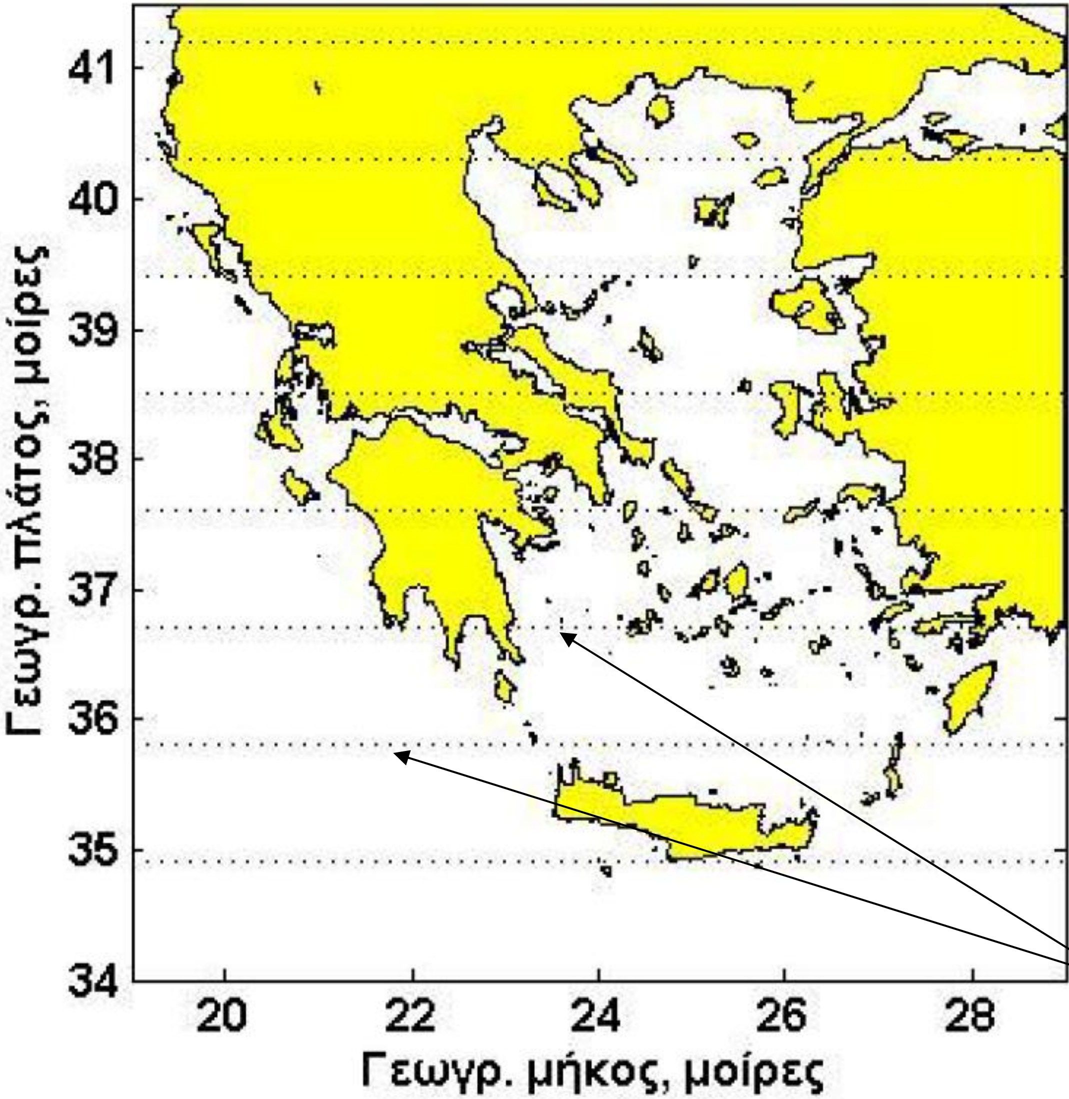
Άσκηση 1

Έστω ότι ένα συγκεκριμένο πρωϊνό, η θερμοκρασία του αέρα σε όλη την Ελλάδα αυξάνεται με ένα ρυθμό 1 °C ανά ώρα. Έστω επίσης ότι η θερμοκρασία από τη Βόρεια στη Νότια Ελλάδα αυξάνεται με ένα σταθερό ρυθμό 1 °C ανά 100 km. Έστω τέλος ότι έχουμε ένα ιπτάμενο χαλί που μπορεί να κινείται σε ευθεία γραμμή υπεριπτάμενο λίγο του εδάφους (έστω η Ελλάδα είναι επίπεδη…). Τι ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας θα καταγράψουμε στο χαλί:

- Αν μένουμε σταματημένοι σε σταθερό σημείο;
- Αν κινούμαστε από Βορρά προς Νότο με U = 50 km h^{-1};
- Αν κινούμαστε από Νότο προς Βορρά με U = 50 km h^{-1};
- Αν κινούμαστε από Βορρά προς Νότο με U = 100 km h^{-1};
- Αν κινούμαστε από Νότο προς Βορρά με U = 100 km h^{-1};
- Αν κινούμαστε από Ανατολή προς Δύση με U = 100 km h^{-1};
- Αν κινούμαστε από ΒΔ προς ΝΑ με U = 100 km h^{-1};

Άσκηση 1

Αύξηση 1°C / hour σε σταθμό



Αύξηση με ρυθμό 1°C / 100km

Τι ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας θα καταγράψουμε στο χαλί;

Ρυθμός Αύξησης Τ:

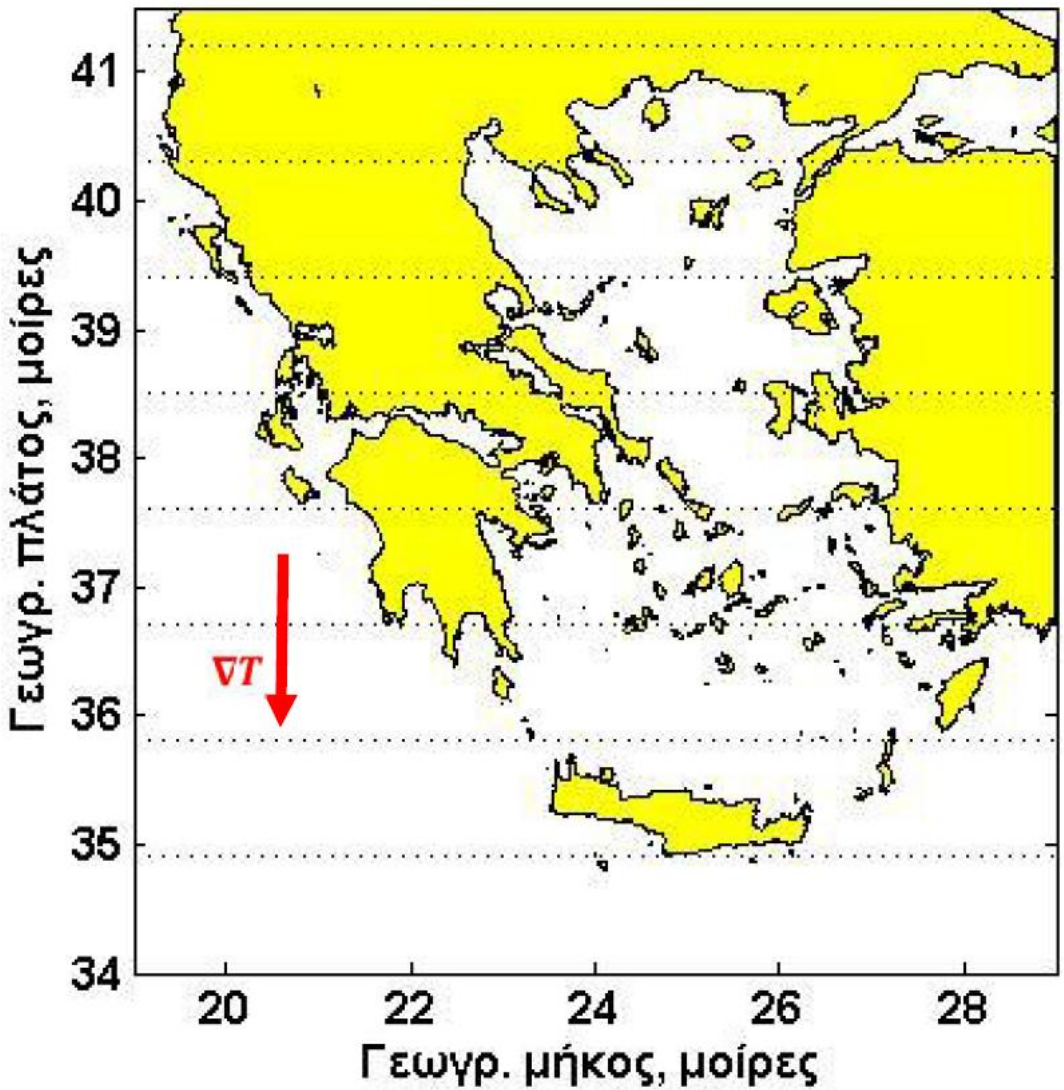
Διάνυσμα του Τ ∇T

Και έχει νότια κατεύθυνση

Κάθετα στις ισόθερμες (διακεκομμένες γραμμές)

Άσκηση 1

Αύξηση 1°C / hour σε σταθμό (σταθερό σημείο) → $\frac{\partial T}{\partial t} = +1°\text{C}\; hr^{-1}$



Γενικά στον 3D χώρο:

Βαθμίδα της θερμοκρασίας

$$\nabla T = \cancel{\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \cancel{\frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}}$$

Κατά y όμως (διάνυσμα Β-Ν):

$$\nabla T = 0\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + 0\hat{k} = \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-°\text{C}}{100\; km} = -0.01°\text{C}\; km^{-1}.$$

Άσκηση 1

$$\frac{\partial T}{\partial t} = +1°C\, hr^{-1}$$

Συσχέτιση της μεταβολής πάνω στο χαλί με την χωροχρονική μεταβλητότητα της:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \gamma$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -0.01°C\, km^{-1}$$

Εξίσωση της ολικής παραγώγου

Όπου γ έχουμε το Τ

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T$$

Όμως

$$\nabla T = \cancel{\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \cancel{\frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}}$$

ταχύτητα μόνο κατά y

$$\vec{u} \cdot \nabla T = v\frac{\partial T}{\partial y}$$

Άσκηση 1

1. Είμαστε σταματημένοι…

$$\vec{u} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}.$$

$$\vec{u} \cdot \nabla T = u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} =$$

$$0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + 0 \cdot 0 = 0 \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

Εξίσωση της ολικής παραγώγου

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{\partial T}{\partial t} + 0 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

και

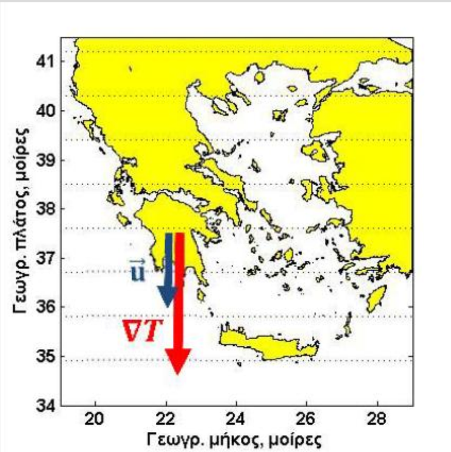
$$\frac{\partial T}{\partial t} = +1°\mathrm{C}\ hr^{-1}$$

Οπότε προκύπτει ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας πάνω στο χαλί (εφόσον δεν κινείται) θα είναι ίδια με τους σταθερούς σταθμούς…

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} = +1°\mathrm{C}\ hr^{-1}$$

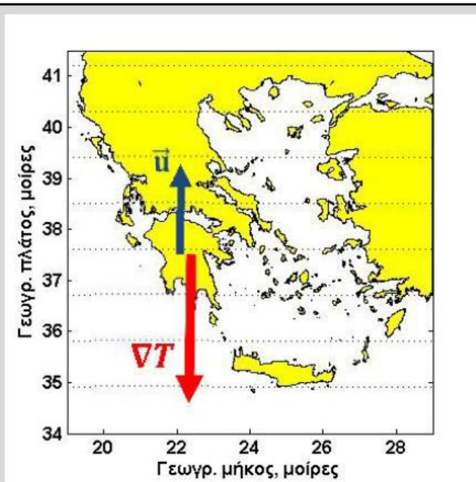
Άσκηση 1

•Αν κινούμαστε από Βορρά προς Νότο με U = 50 km h-1;



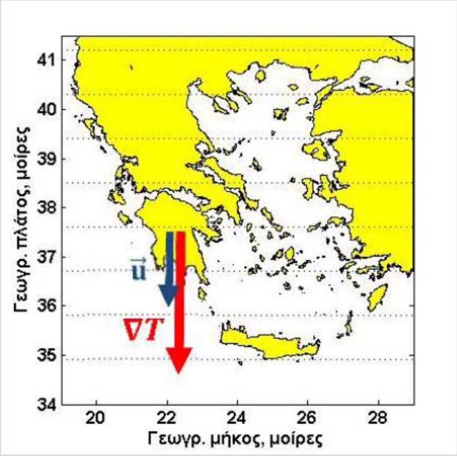
Σε αυτό το ερώτημα, το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι παράλληλο και ομόρροπο με το διάνυσμα ∇T, κατά συνέπεια το εσωτερικό τους γινόμενο $\vec{u} \cdot \nabla T$ αναμένεται να είναι (όπως και τον βρήκαμε) ένας θετικός αριθμός.

•Αν κινούμαστε από Νότο προς Βορρά με U = 50 km h-1;



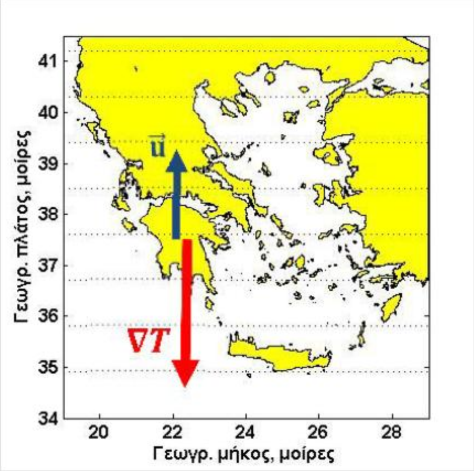
Σε αυτό το ερώτημα, το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι παράλληλο και αντίρροπο με το διάνυσμα ∇T, κατά συνέπεια το εσωτερικό τους γινόμενο $\vec{u} \cdot \nabla T$ αναμένεται να είναι (όπως και τον βρήκαμε) ένας αρνητικός αριθμός.

•Αν κινούμαστε από Βορρά προς Νότο με U = 100 km h-1;



Σε αυτό το ερώτημα, το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι παράλληλο και ομόρροπο με το διάνυσμα $\boldsymbol{\nabla} T$, κατά συνέπεια το εσωτερικό τους γινόμενο $\vec{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} T$ αναμένεται να είναι (όπως και τον βρήκαμε) ένας θετικός αριθμός.

•Αν κινούμαστε από Νότο προς Βορρά με U = 100 km h-1;



Σε αυτό το ερώτημα, το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι παράλληλο και αντίρροπο με το διάνυσμα $\boldsymbol{\nabla} T$, κατά συνέπεια το εσωτερικό τους γινόμενο $\vec{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} T$ αναμένεται να είναι (όπως και τον βρήκαμε) ένας αρνητικός αριθμός.

- Αν κινούμαστε από Ανατολη προς Δύση με U = 100 km h-1;

- Αν κινούμαστε από ΒΔ προς ΝΑ με U = 100 km h-1;

Αρχή Διατήρηση Μάζας (ΑΠΟΔΕΙΞΗ)

Έστω ένας (απειροστά μικρός) κύβος από τον οποίο διέρχεται ρευστό σε κίνηση (κατ' αρχήν θεωρώ μόνο κίνηση κατά τον άξονα των x). Έστω η ροή μάζας στη θέση x_i είναι $\rho_i u_i \delta y \delta z$

Η ροή μάζας στη δεξιά πλευρά $x=x_2$ είναι: $\rho_2 u_2 \delta y \delta z$

(Kgr m^{-3})(m sec^{-1})(m m)

$\downarrow$

(Kgr sec^{-1})
(ροή μάζας ανά μονάδα χρόνου)

Η ροή μάζας στην αριστερή πλευρά $x=x_1$ είναι: $\rho_1 u_1 \delta y \delta z$

Η διαφορά των ροών είναι ό,τι απομένει μέσα στον κύβο:

Η μεταβολή μάζας (όπου M=ρV):

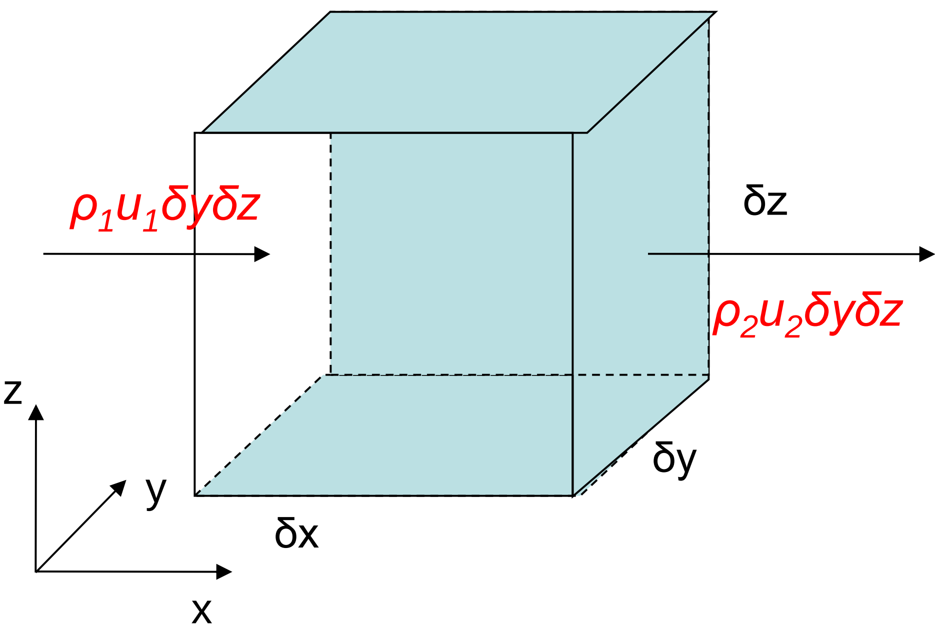
$$\frac{\partial M}{\partial t} = \delta x \delta y \delta z \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

και

$$\frac{\partial M}{\partial t} = (\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2)\delta y \delta z$$

Οπότε:

$$\delta x \delta y \delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = (\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2)\delta y \delta z$$



$$\delta x \delta y \delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = (\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2)\delta y \delta z$$

(διαιρώντας και τα δύο μέλη με το στοιχειώδη όγκο δxδyδz):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1)}{\delta x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} = 0 \Rightarrow$$

(όταν δx→0) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

Αν είχαμε τρισδιάστατη ροή, τότε η μεταβολή της μάζας στο εσωτερικό του κύβου θα είναι

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boxed{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u})} = 0$$ **(Διατήρηση Μάζας)**

Εσωτερικό γινόμενο: δηλώνει την απόκλιση του πεδίου πυκνοτήτων

$$\longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

(δηλαδή η μεταβολή πυκνότητας σε ένα στοιχειώδη όγκο εξαρτάται από την απόκλιση της ροής πυκνότητας)

Πλήρης ανάπτυξη

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0$$

Ολική παράγωγος (Ορισμός)

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \gamma \longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0$$

Διατήρηση μάζας

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) = 0}$$

Ολική μεταβολη της πυκνότητας του υλικού στοιχείου

απόκλιση της ταχύτητας του ρευστού

Δηλώνεται ότι η ολική μεταβολή της πυκνότητας ανα μονάδα πυκνότητας ισούται με την απόκλιση της ταχύτητας

Για ασυμπίεστη ροή η εξίσωση μπορεί να ξαναγραφτεί σαν (Dρ/Dt=0)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Γενικά στην ωκεανογραφία η πλειοψηφία των ροών θεωρούνται ασυμπίεστες (παραλείπεται η συμπιεστότητα)

Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

-Αδρανειακό Σύστημα είναι ένα σύστημα που δεν ασκείται σε αυτό εξωτερική δύναμη

-Η επιφάνεια της Γης δεν είναι αδρανειακό σύστημα γιατί περιστρέφεται

-Θα περιγράψουμε την διατήρηση της ορμής σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς

-Οι νόμοι του Νεύτωνα αναφέρονται σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Για να εκφράσουμε τη διατήρηση της ορμής σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, θα πρέπει να εκφράσουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μορφή χρησιμοποιήσιμη στη δυναμική ρευστών.

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μας λέει ότι η μεταβολή της ορμής, mu, με το χρόνο, ισούται με τη συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_i$ που ασκούνται σε ένα σώμα.

Δηλαδή,

$$\boxed{\frac{D(M\vec{u})}{Dt}} = \sum_i \vec{F}_i$$

Όπου M η μάζα του σώματος, $\vec{u}$ η ταχύτητά του, και $\sum_i \vec{F}_i$ η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω του

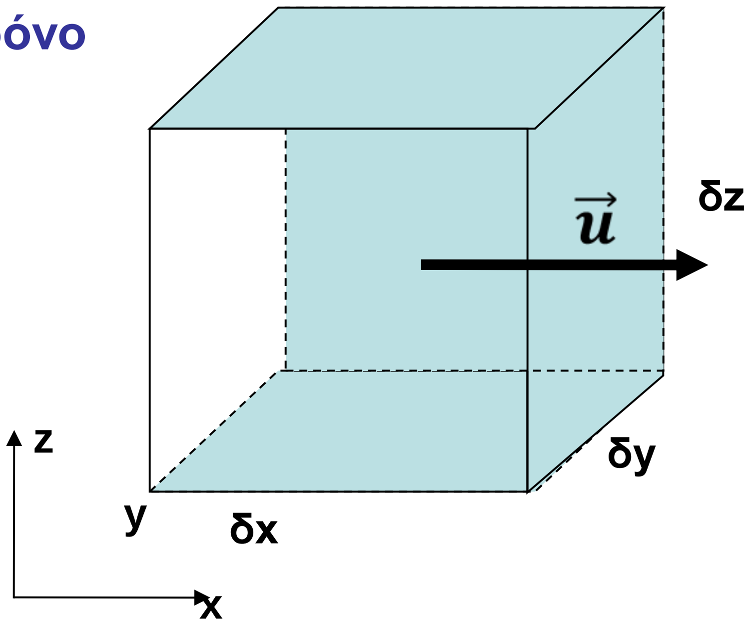
1ο Βήμα: Περιγράφουμε του όρους του αριστερού σκέλους της εξίσωσης

Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Έστω ότι έχουμε ένα μικρό «υλικό στοιχείο» ρευστού πυκνότητας **ρ** και όγκου **V = δxδyδz**, δηλαδή μάζας **m = ρV**, που κινείται με μια ταχύτητα $\vec{u}$.

Η μεταβολή της ορμής του στοιχείου με το χρόνο γράφεται:

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$



$$\frac{D(m\vec{u})}{Dt} = \frac{Dm}{Dt}\vec{u} + m\frac{D\vec{u}}{Dt} =$$

m = ρV

$$\frac{D(\rho V)}{Dt}\vec{u} + \rho V\frac{D\vec{u}}{Dt} =$$

$$\rho\frac{DV}{Dt}\vec{u} + \mathrm{V}\frac{D\rho}{Dt}\vec{u} + \rho V\frac{D\vec{u}}{Dt}$$

Διαιρώντας δια τον όγκο, έχουμε:

$$\frac{\rho}{V}\frac{DV}{Dt}\vec{u} + \frac{D\rho}{Dt}\vec{u} + \rho\frac{D\vec{u}}{Dt}$$

Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Όμως έχουμε δείξει ότι: $$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \nabla \cdot \vec{u}$$ **(από διατήρηση μάζας)**

Οπότε η μεταβολή της ορμής:

$$\frac{\rho}{V}\frac{DV}{Dt}\vec{u} + \frac{D\rho}{Dt}\vec{u} + \rho\frac{D\vec{u}}{Dt}$$

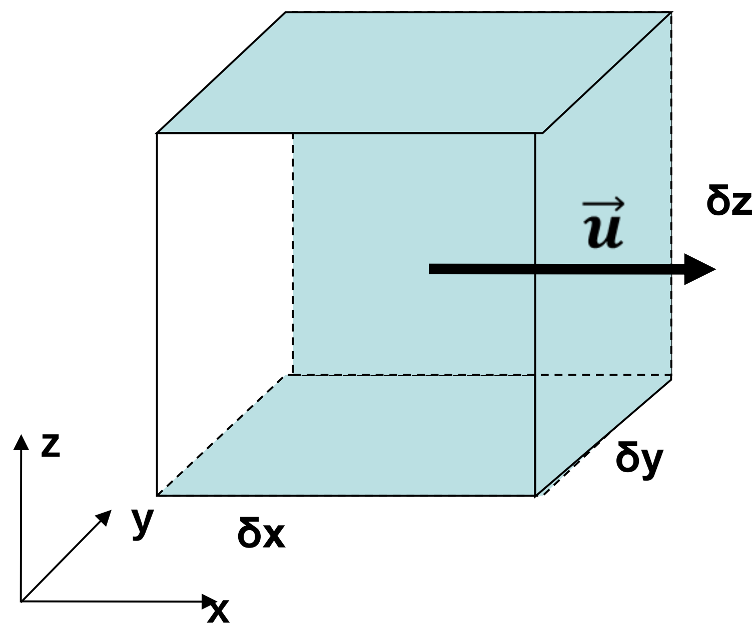
γίνεται:

$$\cancel{\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \vec{u}\right)\vec{u}} + \rho\frac{D\vec{u}}{Dt}$$

Από διατήρηση μάζας ο πρώτος όρος γίνεται 0, και μένει ότι η μεταβολή της ορμής ανά μονάδα όγκου είναι πυκνότητα επί επιτάχυνση:

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0$$

Εξίσωση (διατήρηση μάζας) - συνέχειας



$$\frac{D(M\vec{u})}{Dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\frac{1}{V}\frac{D(M\vec{u})}{Dt} = \rho\frac{D\vec{u}}{Dt}$$

Η μεταβολή της ορμής του στοιχείου με το χρόνο

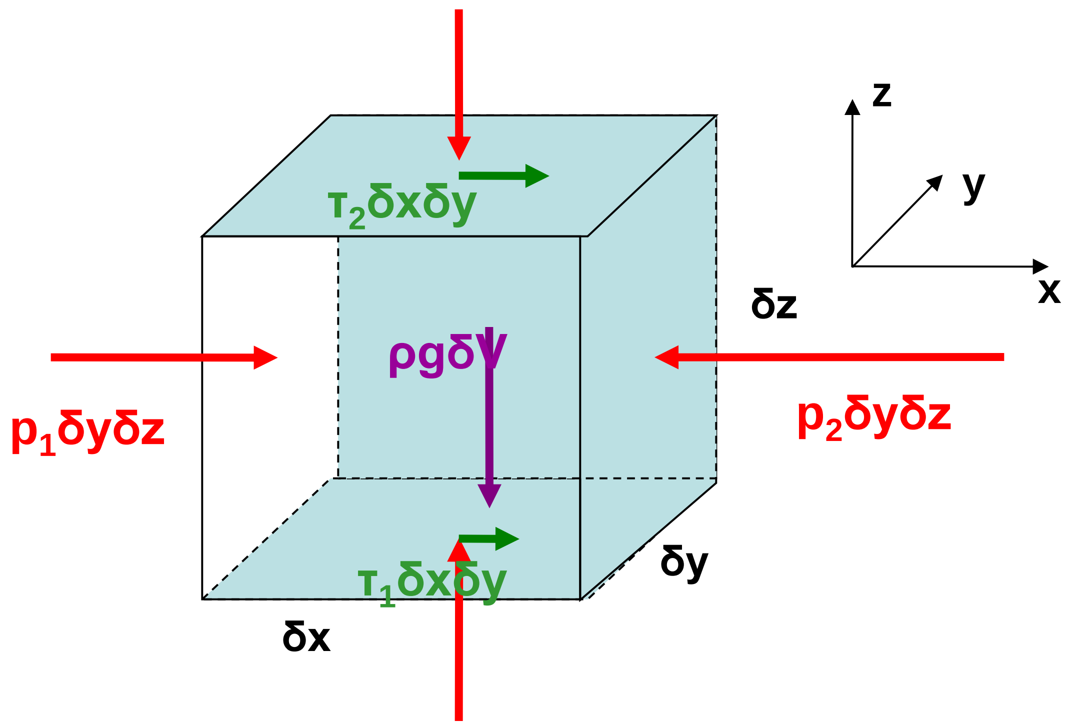
2ο Βήμα: Περιγράφουμε του όρους του δεξιού σκέλους της εξίσωσης (Διανυσματικό άθροισμα δυνάμεων)

Ποιο είναι όμως το σύνολο των δυνάμεων που μπορεί να ασκούνται στο υλικό στοιχείο του ρευστού που εξετάζω;

$$\frac{D(M\vec{u})}{Dt} = \boxed{\sum_i \vec{F}_i}$$

Πρόκειται για:

- **Σωματικές δυνάμεις**
  - **Δυνάμεις βαρυτικές,**
- **Επιφανειακές δυνάμεις**
  - **Δυνάμεις Πίεσης**
  - **Δυνάμεις τριβής**



Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

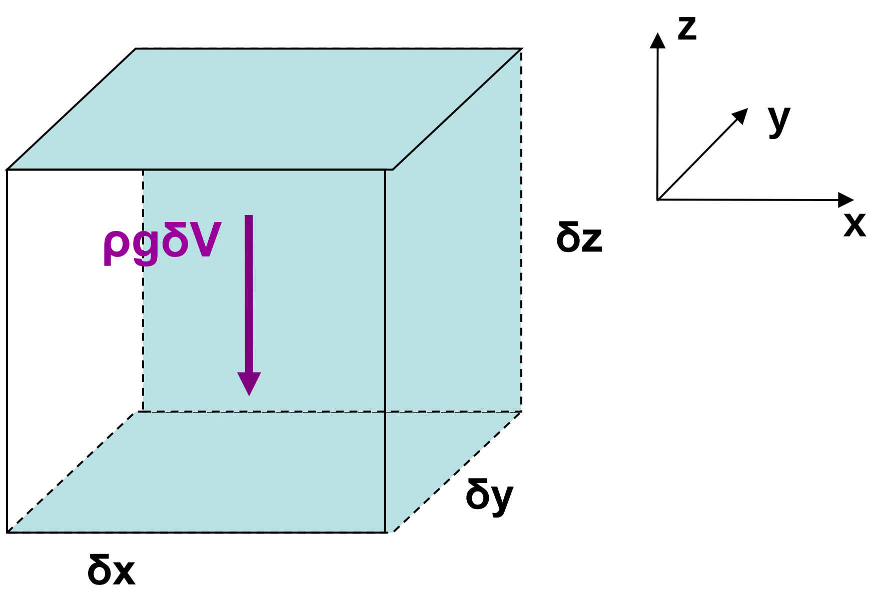
Δυνάμεις βαρυτικές,

Η μόνη βαρυτική δύναμη που ασκείται (παραδοχή: απουσία της αστρονομικής βαρυτικής έλξης άλλων από τη Γη σωμάτων και της περιστροφής) είναι η έλξη της Γης, και η μόνη δύναμη το βάρους του «υλικού στοιχείου».

Η δε βαρυτική δύναμη θεωρούμε ότι έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα:

$$\vec{F}_B = -Mg\hat{k} \Longrightarrow \vec{F}_B = -\rho V g\hat{k} \Longrightarrow$$

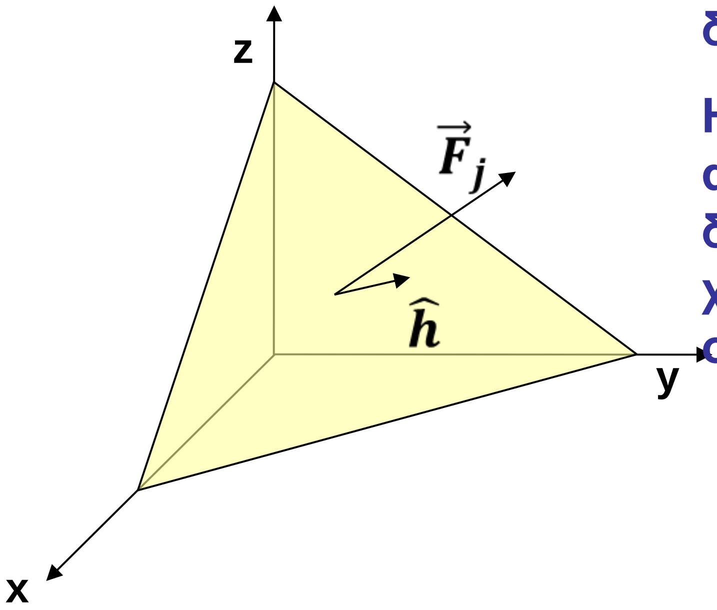
$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{V}}\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{B}} = -\boldsymbol{\rho}\mathbf{g}\widehat{\boldsymbol{k}}$$



Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Επιφανειακές Δυνάμεις: πίεση και τριβή

Επιφανειακές δυνάμεις: οι ασκούμενες στις πλευρικές επιφάνειες του όγκου ενδιαφέροντος, οφειλόμενες στην αλληλεπίδρασή του με το άμεσο περιβάλλον του.



Οι επιφανειακές δυνάμεις αποτελούνται από δυνάμεις πίεσης και δυνάμεις τριβής

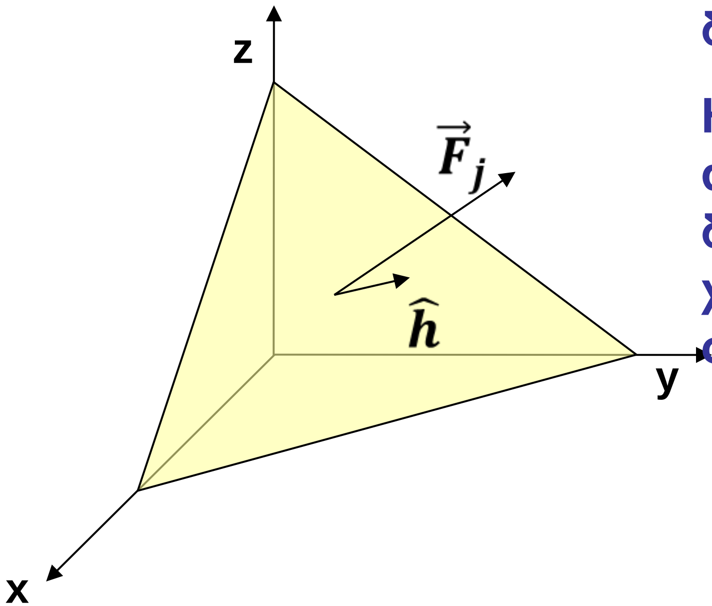
Η τάση (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) που ασκείται προς τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{j}$, σε μια επιφάνεια που χαρακτηρίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{i}$, συμβολίζεται από

$$\sigma_{ij} = \lim_{\delta A \to 0}\left(\frac{\delta F_j}{\delta A_i}\right)$$

Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Επιφανειακές Δυνάμεις: πίεση και τριβή

Επιφανειακές δυνάμεις: οι ασκούμενες στις πλευρικές επιφάνειες του όγκου ενδιαφέροντος, οφειλόμενες στην αλληλεπίδρασή του με το άμεσο περιβάλλον του.



Οι επιφανειακές δυνάμεις αποτελούνται από δυνάμεις πίεσης και δυνάμεις τριβής

Η τάση (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) που ασκείται προς τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{j}$, σε μια επιφάνεια που χαρακτηρίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{i}$, συμβολίζεται από

$$\sigma_{ij} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\delta F_j}{\delta A_i} \right)$$

Τα σ_{ii} λέγονται <u>κάθετες</u> τάσεις, τα σ_{ij} <u>διατμητικές</u> τάσεις

Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Δυνάμεις πίεσης:

Έστω, στον άξονα των x ασκείται μια πιεση p_1 στην αριστερή πλευρά και μια πίεση p_2 στη δεξιά πλευρά. Η δύναμη στην αριστερή πλευρά θα είναι

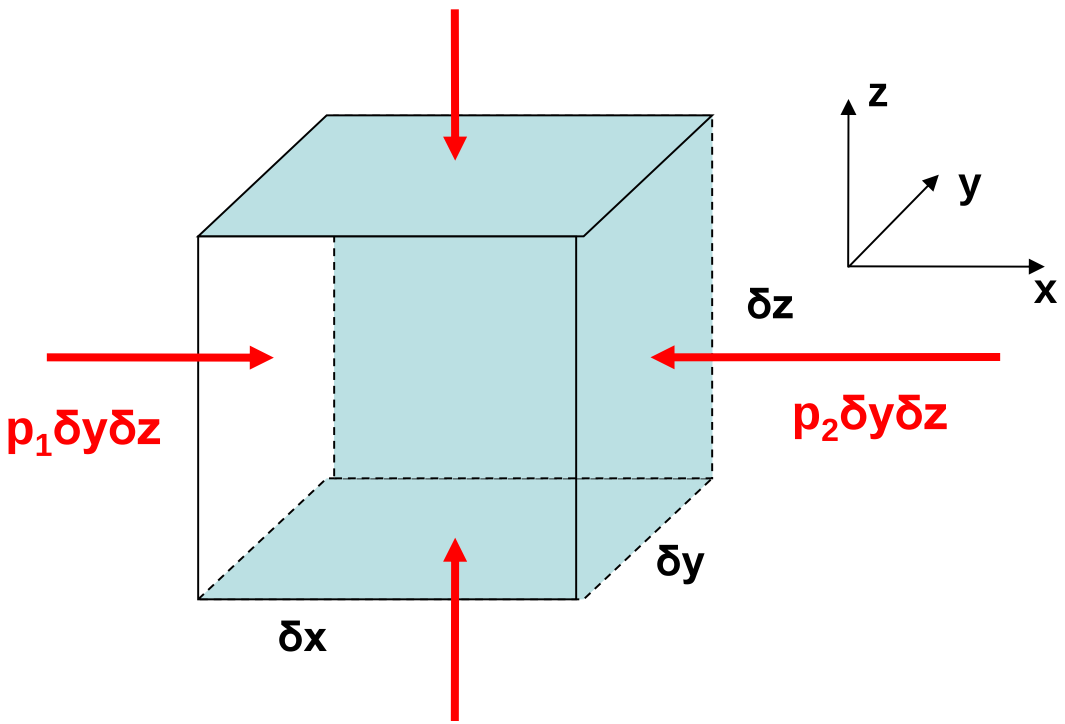
$F_{p1} = p_1 \delta y \delta z$ και η δύναμη στη δεξιά πλευρά $F_{p2} = p_2 \delta y \delta z$

Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων (το διανυσματικό τους άθροισμα) θα είναι:

$$\boldsymbol{F_p = F_{p2} + F_{p1} =}$$

$$\boldsymbol{-(p_2 - p_1)\delta y \delta z =}$$

$$\boldsymbol{-\delta p \delta y \delta z}$$



Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

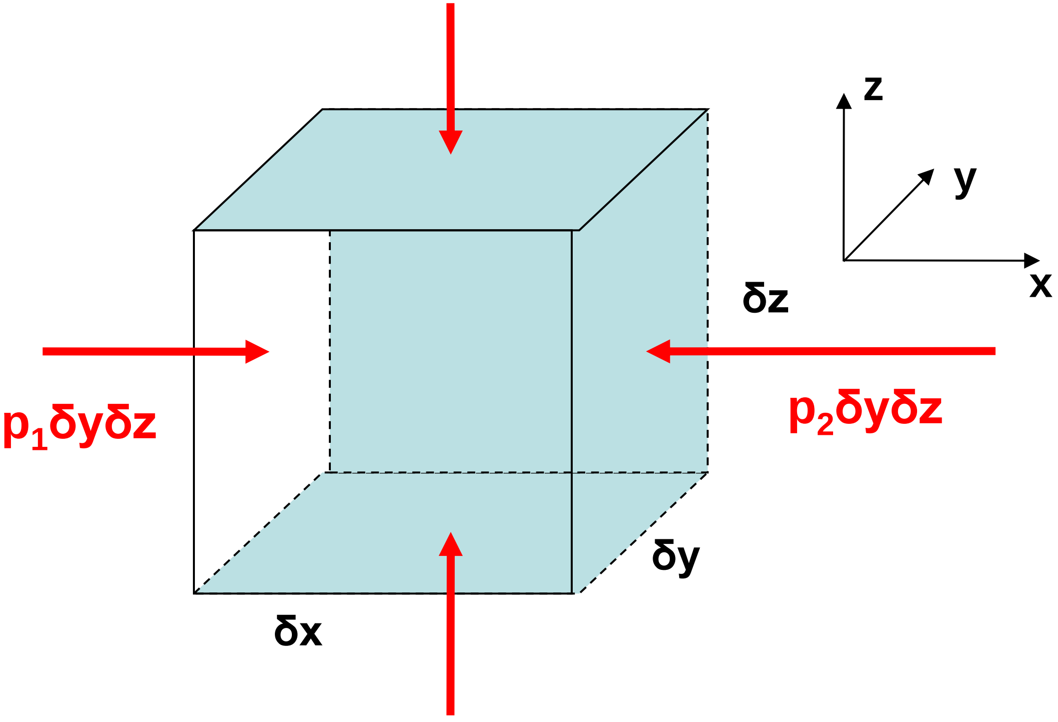
Δυνάμεις πίεσης:

Διαιρώντας δια τον όγκο έχουμε ότι η συνιστάμενη δύναμη τριβής στον x άξονα είναι:

$$\frac{1}{V}F_p = -\frac{\delta p \delta y \delta z}{\delta x \delta y \delta z} \longrightarrow -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Και σε τρείς διαστάσεις,

$$\frac{1}{V}\vec{F}_P = -\nabla p$$



Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Δυνάμεις τριβής

Σε κάθε επιφάνεια ασκείται μια κάθετη ή διατμητική τάση που οφείλεται στην τριβή. Όπως εξηγήσαμε παλιότερα (κεφ.1), όταν η τριβή οφείλεται στη μοριακό ιξώδες (στη μοριακή διάχυση της ορμής – ΚΙΝΗΣΗ), τότε ισχύει ότι:

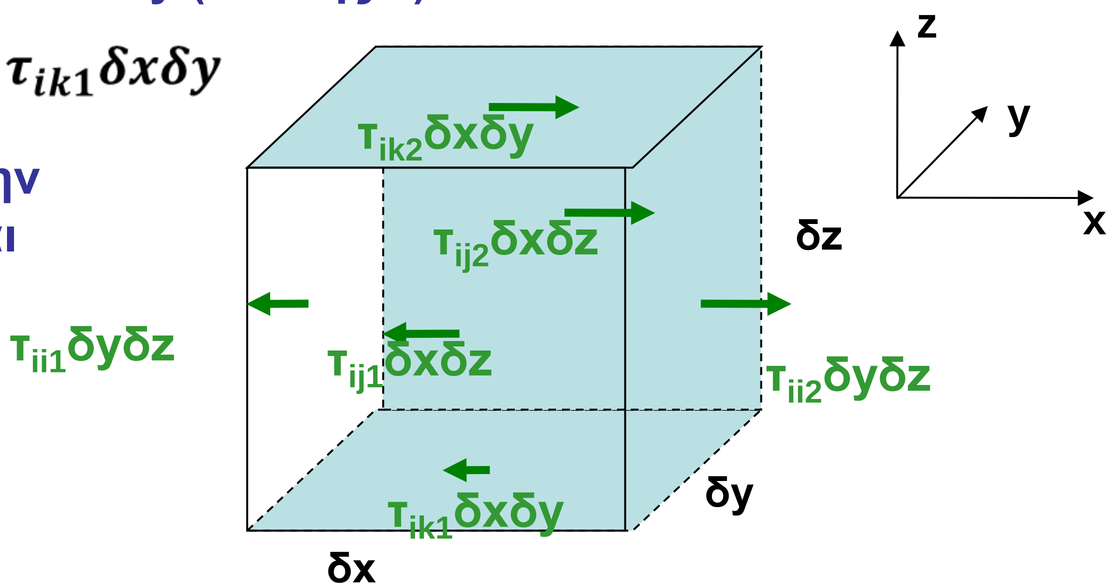
$$\vec{\tau}_{ik} = \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

Η δύναμη που ασκείται κατά τη διεύθυνση x (δείκτης i) στην κάτω επιφάνεια xy (δείκτης k) θα είναι

$$F_{ik1} = \tau_{ik1} \delta x \delta y$$

Η δύναμη που ασκείται στην πάνω επιφάνεια xy θα είναι

$$F_{ik2} = \tau_{ik2} \delta x \delta y$$



Πόσες συνιστώσες της τριβής βλέπουμε στο σχήμα;

Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Δυνάμεις τριβής

Σε κάθε επιφάνεια ασκείται μια κάθετη ή διατμητική τάση που οφείλεται στην τριβή. Όπως εξηγήσαμε παλιότερα (κεφ.1), όταν η τριβή οφείλεται στη μοριακό ιξώδες (στη μοριακή διάχυση της ορμής – ΚΙΝΗΣΗ), τότε ισχύει ότι:

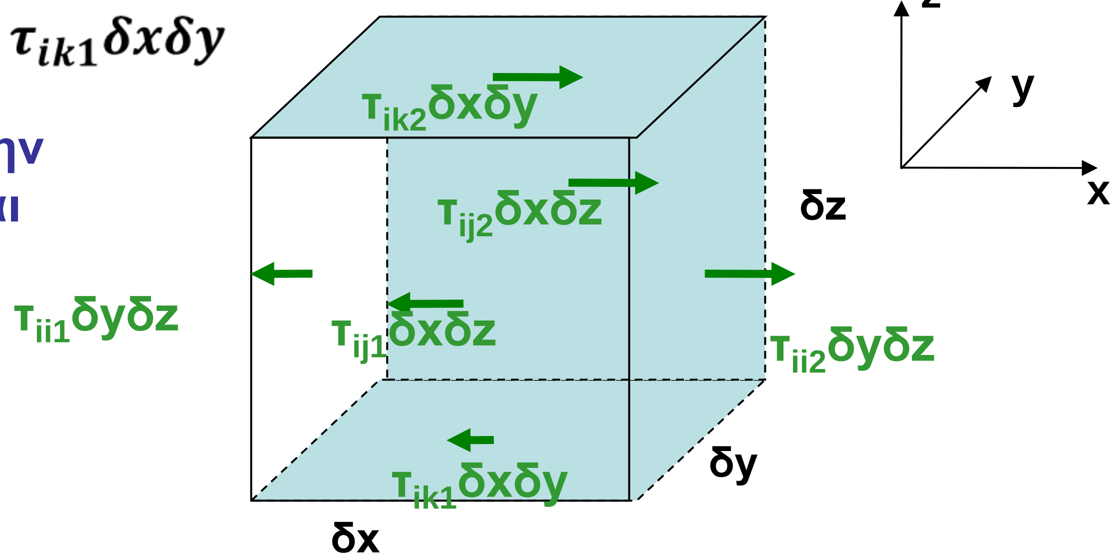
$$\vec{\tau}_{ik} = \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

Η δύναμη που ασκείται κατά τη διεύθυνση x (δείκτης i) στην κάτω επιφάνεια xy (δείκτης k) θα είναι

$$F_{ik1} = \tau_{ik1} \delta x \delta y$$

Η δύναμη που ασκείται στην πάνω επιφάνεια xy θα είναι

$$F_{ik2} = \tau_{ik2} \delta x \delta y$$



Πόσες συνιστώσες της τριβής βλέπουμε στο σχήμα;

Ασκούνται εξι συνιστώσες τις τριβής: 2 κάθετες στα επίπεδα yz και 4 παράλληλες στα επίπεδα xy και xz.

Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Διαφορά των 2 τριβών

Δυνάμεις τριβής

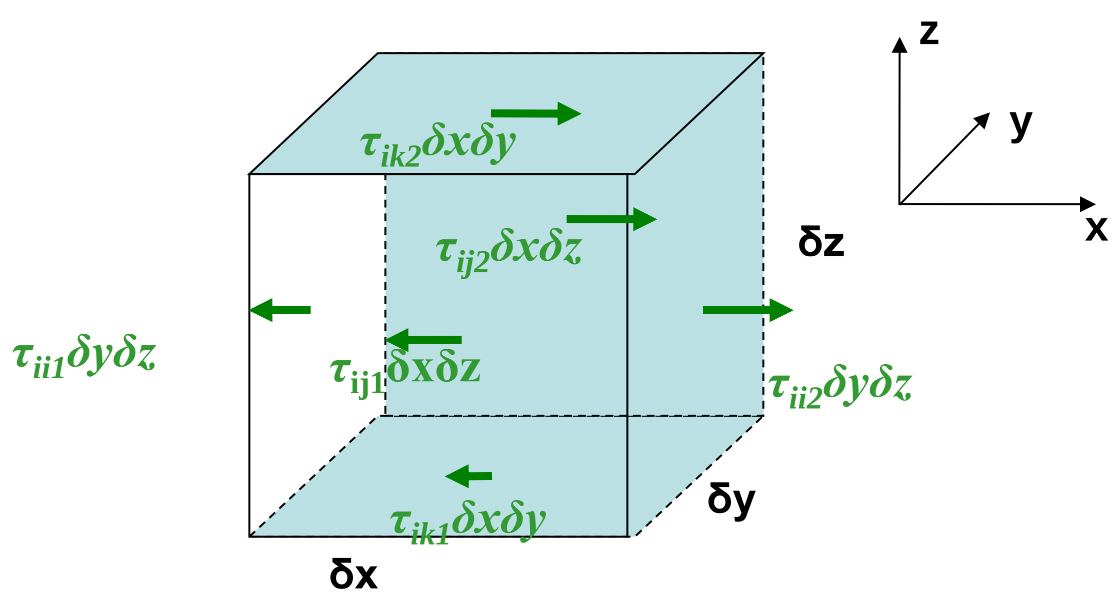
Η συνολική δύναμη της τριβής στις επιφάνειες xy θα είναι $\vec{F}_k = \delta\vec{\tau}_k \delta x \delta y$

Η συνολική δύναμη της τριβής στις επιφάνειες xz θα είναι $\vec{F}_j = \delta\vec{\tau}_j \delta x \delta z$

Η συνολική δύναμη της τριβής στις επιφάνειες yz θα είναι $\vec{F}_i = \delta\vec{\tau}_i \delta y \delta z$

Έτσι, η συνολική δύναμη της τριβής στο σώμα λόγω των διατμητικών τάσεων (της τριβής) που οφείλεται στη x συνιστώσα της ταχύτητας, είναι:

$$
\begin{aligned}
F_x = {} & F_{ii} + F_{ij} + F_{ik} = \\
& \delta\tau_{ii}\, \delta y\, \delta z + \\
& \delta\tau_{ik}\, \delta x\, \delta y + \\
& \delta\tau_{ij}\, \delta x\, \delta z
\end{aligned}
$$



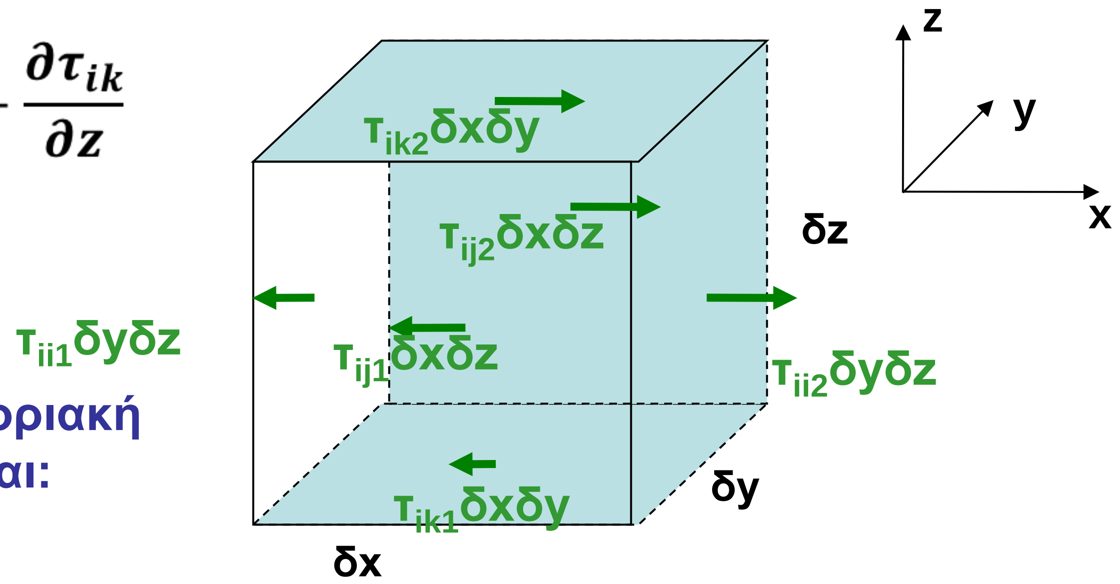
Δεν υπάρχει μεταβολή ταχύτητας (επιτάχυνση)

Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Διαιρώντας με τον όγκο V = δx δy δz έχουμε:

$$\frac{1}{V}F_x = \frac{\delta\tau_{ii}\delta y\delta z}{\delta x\delta y\delta z} + \frac{\delta\tau_{ij}\delta x\delta z}{\delta x\delta y\delta z} + \frac{\delta\tau_{ik}\delta x\delta y}{\delta x\delta y\delta z} \xRightarrow[lim\ \delta x,\delta y,\delta z\to 0]{}$$

$$\frac{1}{V}F_x = \frac{\partial\tau_{ii}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{ik}}{\partial z}$$



και, αν θεωρήσουμε μοριακή τριβή, η εξίσωση γίνεται:

$$\vec{\tau}_{ik} = \mu\frac{\partial\vec{u}}{\partial z} \quad \frac{1}{V}F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

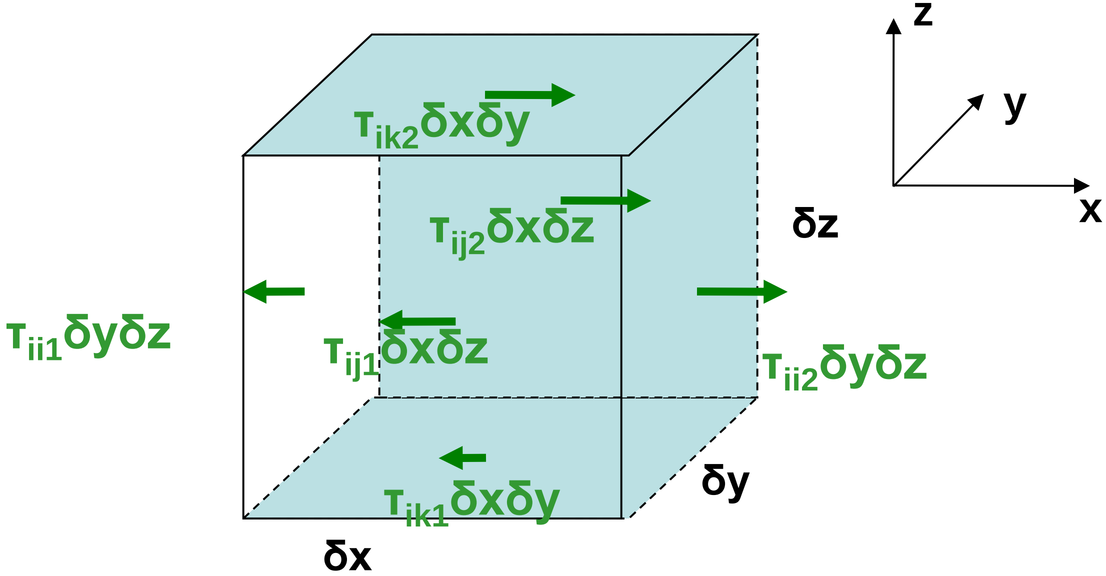
Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Εφ' όσον το μοριακό ιξώδες είναι σταθερό και δεν εξαρτάται από τη διεύθυνση,

$$\frac{1}{V}F_x = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \mu\nabla^2 u$$

και στις τρεις διαστάσεις, έχουμε:

$$\frac{1}{V}\vec{F}_f = \frac{1}{V}\left(F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}\right) = \mu\nabla^2\vec{u}$$



Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Έτσι, η τάση που ασκείται σε απειροστά μικρό υλικό στοιχείο μπορεί να γραφτεί ως:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau} \Rightarrow$$

Πιέσεις Τριβές

$$\frac{1}{V}\vec{F}_P = -\nabla p$$

Τάσεις Πιέσεις Τριβές

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

Δυνάμεις ή τάσεις με το ίδιο δείκτη (π.χ. F_{ii} ή τ_{ii}) → Ασκούνται κάθετα στις πλευρές

Με διαφορετικό δείκτη (π.χ. F_{ij} ή τ_{ij}) → παράλληλες στις πλευρές (διατμητικές)

Πιέσεις → μόνο κάθετα

Τριβές → και κάθετα και διατμητικές

Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Εξισώνοντας λοιπόν τη διατήρηση της ορμής (2ος νόμος) με το άθροισμα των δυνάμεων που εξασκούνται στο σώμα, έχουμε:

$$\boxed{\frac{D(m\vec{u})}{Dt} = \sum_i \vec{F}_i} \xRightarrow{m=\rho V} \rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{1}{V}\left(\vec{F}_p + \vec{F}_g + \vec{F}_f\right) \Longrightarrow$$

Δύναμη πίεσης Δύναμη Τριβής

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p \; - \rho g\hat{k} + \mu\nabla^2\vec{u}$$

Δύναμη βαρύτητας

και, διαιρώντας δια την πυκνότητα ρ, έχουμε:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \; - g\hat{k} + \nu\nabla^2\vec{u}$$

ΕΚΦΡΑΣΗ της ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΟΡΜΗΣ Στα ρευστά!!!!

όπου ν ($\nu \equiv \mu/\rho$) το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

Εξίσωση Navier-Stokes (διατήρηση της ορμής των ρευστών)

Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Άλλες μορφές της εξίσωσης Navier-Stokes (αντικαθιστώντας την ολική παράγωγο της ταχύτητας):

$$\frac{D\gamma}{Dt} \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial t} + u\frac{\partial \gamma}{\partial x} + v\frac{\partial \gamma}{\partial y} + w\frac{\partial \gamma}{\partial z} \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\gamma$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\hat{k} + \nu\nabla^2\vec{u}$$

Που αναλυμένη στους τρείς άξονες είναι:

x: $$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u$$

y: $$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v$$

z: $$\frac{\partial w}{\partial t} + \left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w$$

Ποια βασική διαφορά παρατηρείται μεταξύ των 3 εξισώσεων;

Διατήρηση της ορμής (αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Άλλες μορφές της εξίσωσης Navier-Stokes (αντικαθιστώντας την ολική παράγωγο της ταχύτητας):

$$\frac{D\gamma}{Dt} \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial t} + u\frac{\partial \gamma}{\partial x} + v\frac{\partial \gamma}{\partial y} + w\frac{\partial \gamma}{\partial z} \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\gamma$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\hat{k} + \nu\nabla^2\vec{u}$$

Που αναλυμένη στους τρείς άξονες είναι:

x: $$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u$$

y: $$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v$$

z: $$\frac{\partial w}{\partial t} + \left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w$$

Ποια βασική διαφορά παρατηρείται μεταξύ των 3 εξισώσεων;