Μαθηματικά ΙΙ

Υπεύθυνος Καθηγητής:
Γιάννης Ανδρουλιδάκης

Δυναμοσειρές

Εαρινό Εξάμηνο 2024-2025

Δυναμοσειρές

Οι **σειρές Taylor** είναι ένα είδος **δυναμοσειράς** και χρησιμοποιούνται για να προσεγγίσουμε (ή και να εκφράσουμε ακριβώς, αν το επιτρέπει η συνάρτηση) μια συνάρτηση μέσω ενός άπειρου αθροίσματος όρων με δυνάμεις του x (πολυώνυμα).

Γενικά, μια δυναμοσειρά έχει τη μορφή:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Στις σειρές Taylor είδαμε ότι

η δυναμοσειρά ορίζει μία συνάρτηση f με τύπο

$$f\left(x\right) = \sum a_n x^n, \quad x \in (-R, R)$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Το διάστημα (−R,R) είναι το **διάστημα σύγκλισης** μιας **δυναμοσειράς**:

τότε υπάρχει ένας **αριθμός** $R \geq 0$, που λέγεται **ακτίνα σύγκλισης**, τέτοιος ώστε:

- Η σειρά **συγκλίνει** απολύτως για κάθε $x \in (-R, R)$
- Η σειρά **αποκλίνει** για κάθε $|x| > R$
- Στα άκρα $x = \pm R$, η σύγκλιση εξαρτάται από τη συγκεκριμένη περίπτωση και πρέπει να εξετάζεται χωριστά

Δυναμοσειρές

Σύγκλιση σημαίνει:

Όταν **προσθέτεις άπειρους όρους**, το άθροισμα **σταθεροποιείται** κοντά σε έναν αριθμό. → πλησιάζει όλο και πιο κοντά σε κάποιο **τελικό αποτέλεσμα**.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$

Αν και συνεχίζεις να προσθέτεις όρους, το σύνολο **πλησιάζει** το 2 χωρίς να το ξεπερνά.

Απόκλιση σημαίνει:

Το άθροισμα **δεν σταθεροποιείται** — είτε **μεγαλώνει απεριόριστα**, είτε **ταλαντεύεται**, είτε **δεν πλησιάζει** σε καμία συγκεκριμένη τιμή.

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$

Οι όροι δεν μικραίνουν και το άθροισμα πάει στο άπειρο (απόκλιση)

ή

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$S_N = \begin{cases} 1, & \text{αν } N \text{ περιττός} \\ 0, & \text{αν } N \text{ άρτιος} \end{cases}$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N \ \text{ΔΕΝ υπάρχει}$$

Δυναμοσειρές

Παράδειγμα

Όταν προσθέτουμε άπειρους όρους της μορφής:

$$\frac{(x-2)^n}{n}$$

για να συγκλίνει η σειρά, οι όροι πρέπει να **μικραίνουν αρκετά γρήγορα**.

Αν $|x-2|<1$, τότε:

- Οι δυνάμεις $(x-2)^n$ μικραίνουν (γιατί υψώνεις αριθμό μικρότερο της μονάδας σε αυξανόμενες δυνάμεις),
- και διαιρείς και με n, οπότε οι όροι «σβήνουν» γρήγορα.

Αντίθετα, αν $|x-2|>1$, τότε οι όροι μεγαλώνουν → η σειρά **δεν μπορεί να συγκλίνει**.

Δυναμοσειρές

Θεώρημα 3.2. *Αν* $f(x) = \sum a_n x^n, \quad x \in (-R, R)$, *τότε μπορούμε να παραγωγίσουμε και να ολοκληρώσουμε τη δυναμοσειρά όρο προς όρο στο διάστημα* $(-R, R)$. *Επομένως, για* x *στο διάστημα* $(-R, R)$ *ισχύουν:*

Θεωρούμε τη δυναμοσειρά:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R)$$

Παράγωγος:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Έχω παραγωγίσει όλους τους όρους → (λείπει ο όρος n=0, γιατι;)

Ολοκλήρωμα:

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

όπου C είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.
Προσθέτουμε το C για να συμπεριλάβουμε όλες τις δυνατές αντιπαραγώγους.

Δυναμοσειρές

Παράδειγμα 3

sin x

Δυναμοσειρές

Παράδειγμα 3

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Δυναμοσειρές

Το παραπάνω θεώρημα επιτρέπει να βρούμε τη σειρά Taylor μιάς συνάρτησης με απλή ολοκλήρωση ή παραγώγιση της σειράς μιάς άλλης γνωστής συνάρτησης.

Παράδειγμα 4. $f(t) = 1/(1+t),\ t \in (-1,1)$

Δυναμοσειρές

Το παραπάνω θεώρημα επιτρέπει να βρούμε τη σειρά Taylor μιάς συνάρτησης με απλή ολοκλήρωση ή παραγώγιση της σειράς μιάς άλλης γνωστής συνάρτησης.

Παράδειγμα 5. $$\frac{1}{1+t^2}$$

Δυναμοσειρές

Το παραπάνω θεώρημα επιτρέπει να βρούμε τη σειρά Taylor μιάς συνάρτησης με απλή ολοκλήρωση ή παραγώγιση της σειράς μιάς άλλης γνωστής συνάρτησης.

Παράδειγμα 6. Θεωρούμε τη συνάρτηση f που για $x \in (-1,1)$ ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3.2} + \frac{x^4}{4.3} - \frac{x^5}{5.4} + \dots$$

Δυναμοσειρές

Η διωνυμική σειρά

Μία από τις σημαντικότερες σειρές Taylor είναι η διωνυμική σειρά.

Η διωνυμική σειρά:

- Μας επιτρέπει να **προσεγγίσουμε δυνάμεις** του τύπου $(1+x)^p$ χωρίς κομπιουτεράκι.
- Είναι χρήσιμη σε **αναλύσεις, μοντέλα, φυσική, οικονομικά** όπου δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ριζικά ή κλασματικά εκθέτες εύκολα.
- Είναι κομμάτι της **σειράς Taylor**, που μας βοηθά να αντικαθιστούμε δύσκολες συναρτήσεις με πολυώνυμα.

Το Θεώρημα Taylor σε πολλές διαστάσεις

Θεώρημα 3.3. *Έστω $\phi : U \to \mathbb{R}$ ένα βαθμωτό πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης στο πεδίο ορισμού του $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Αν $\mathbf{a} = (a, b)$ και $\mathbf{r} = (x, y)$ είναι δύο γειτονικά σημεία στο U, τότε,*

$$\phi(x,y) = \phi(a,b) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y-b) + \mathcal{O}(2),$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο (a, b) και οι όροι ανώτερης τάξης $\mathcal{O}(2)$ συνιστούν το υπόλοιπο.

Σε δεύτερης τάξης προσέγγιση θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) \;=\;& \phi(a,b) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x-a)^2 + \\
& \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(y-b)^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \mathcal{O}(3),
\end{aligned}$$

Σε τρίτης τάξης προσέγγιση θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) = \phi(a,b) \\
&+ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y-b) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(y-b)^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) \\
&+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}(x-a)^3 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3}(y-b)^3 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y}(x-a)^2(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2}(x-a)(y-b)^2 \\
&+ \mathcal{O}(4)
\end{aligned}$$

Το Θεώρημα Taylor σε πολλές διαστάσεις

Παραδειγματα (2 διαστάσεις):

Έστω $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ $\qquad \phi(x,y) = e^{xy}$

Άσκηση 4

Η θερμοκρασία μιας θαλάσσιας περιοχής μοντελοποιείται από μια ομαλή συνάρτηση $T(x, y, z)$, όπου οι συντεταγμένες x, y και z ορίζονται σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε δύο γειτονικά σημεία (x, y, z) και $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Γράψτε τη μεταβολή της θερμοκρασίας $\Delta T := T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - T(x, y, z)$ σε πρώτης τάξης προσέγγιση ως προς τις μεταβλητές x, y και z.