Μαθηματικά II

Υπεύθυνος Καθηγητής:
Γιάννης Ανδρουλιδάκης

Σειρές Taylor

Εαρινό Εξάμηνο 2024-2025

Σειρές Taylor

Μία συνάρτηση f μπορεί να παρασταθεί ως σειρά με όρους μονώνυμα δυνάμεων του x ως εξής:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 + \cdots$$

ή αλλιώς πιο περιεκτικά:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

- $f'(0)$ είναι η πρώτη παράγωγος της f στο μηδέν.
- $f''(0)$ είναι η δεύτερη παράγωγος στο μηδέν κ.ο.κ.
- $n!$ είναι το παραγοντικό του n (π.χ. $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$).

Παράδειγμα Ι

Γιατί χρησιμοποιούμε τις Σειρές Taylor?

Μπορείς να υπολογίσεις το $f(x)$ **όταν το x είναι κοντά στο 0**,

Χωρίς να ξέρεις τον "αληθινό" τύπο της $f(x)$ (ή αν ο τύπος είναι δύσκολος)

Χρησιμοποιώντας μόνο απλά πολυώνυμα (που είναι πολύ εύκολο να υπολογιστούν)

Παράδειγμα ΙΙ, ΙΙΙ

Σειρές Taylor

Παράδειγμα ΙΙ, ΙΙΙ

Σειρές Taylor

Άσκηση

Βρειτε τις σειρές Taylor των συναρτήσεων: $e^{-x},\ e^{x^2},\ \sin x^2\ \text{περί το}\ 0$

Πίνακας Σύγκρισης Σειράς Taylor

	Όροι	Προσέγγιση	Σχετικό Σφάλμα (%)
1	1	1.0	638.9056098930649
2	2	-1.0	838.905609893065
3	3	1.0	638.9056098930649
4	4	-0.33333333333333326	346.3018699643549
5	5	0.33333333333333337	146.301869964355
6	6	0.06666666666666671	50.73962600712897
7	7	0.1555555555555556	14.940872650032372
8	8	0.13015873015873022	3.8249841091565755
9	9	0.13650793650793658	0.8664800806406662
10	10	0.1350970017636685	0.17606751709204507
11	11	0.13537918871252214	0.032442002454505396
12	12	0.13532788199454876	0.005468819281223594

Σειρές Taylor

Παράδειγμα 1

Προσεγγίστε με πολυώνυμα 3ου βαθμού κοντά στο 0 τις $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Σειρές Taylor

Παράδειγμα 2

Προσεγγίστε με πολυώνυμα 3ου βαθμού κοντά στο 0 τις $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Σειρές Taylor

Παράδειγμα 3

Προσεγγίστε με πολυώνυμα 3ου βαθμού κοντά στο 0 τις $f(x) = \ln(1+x)$

Σειρές Taylor

Παράδειγμα 4

Προσεγγίστε με πολυώνυμα 3ου βαθμού κοντά στο 0 τις $f(x) = \sqrt{1+x}$:

Σειρές Taylor

Το μηδέν δεν έχει κάποια ιδιαιτερότητα. Αν μία συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης σε μιά περιοχή του a ∈ R, τότε έχουμε τη σειρά (γενικός τύπος):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots,$$

που συγκλίνει στην $f(x)$ σε κάποιο διάστημα $(a-R, a+R)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

<u>Γιατί επιλέγουμε πολλές φορές το 0;</u>

- Κάθε σειρά Taylor είναι "καλή" **γύρω από το σημείο ανάπτυξης της**.
- Αν χρειάζεσαι προσέγγιση για $x \approx 1$, είναι **πιο σωστό** να αναπτύξεις γύρω από $x = 1$, όχι γύρω από 0.
- Η **σειρά γύρω από το 0** είναι απλούστερη, αλλά περιορισμένη σε ακρίβεια όταν x απομακρύνεται από το 0.

Παράδειγματα με e^x και 101^(1/2)

Σειρές Taylor

Δηλαδή αν θέλουμε την προσέγγιση του $f(x)=e^x$ για $x=11$ τότε:

Σειρές Taylor

Το θεώρημα Taylor μπορεί να γραφεί και ως εξης:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Αυτή είναι η **γραμμική προσέγγιση** (ή προσέγγιση 1ης τάξης) της συνάρτησης f γύρω από το σημείο x.

Αν θέλουμε μεγαλύτερη ακρίβεια χρησιμοποιούμε και άλλους όρους:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(\Delta x)^3 + \cdots$$

Παράδειγμα 1

Σειρές Taylor

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Παράδειγμα 2 Υπολογίστε κατά πόσον περίπου θα αυξηθεί ο όγκος μιας σφαίρας αν η ακτίνα της αυξηθεί κατά 10%.

Σειρές Taylor

Τύπος του Euler

Σειρές Taylor

Ασκήσεις 1. Υπολογίστε με προσέγγιση 1/100 το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

Σειρές Taylor

Ασκήσεις

7. Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος σε ύψος h από την επιφάνεια της γης δίνεται από τη σχέση
$$U(h) = -G\frac{Mm}{R+h}$$
όπου m η μάζα του σώματος και M η μάζα της γης (βλ. 2.2.3). Για μικρά ύψη (δηλ. $h \ll R = 6400\text{km}$), γράφουμε $U(h) = mgh + C$, όπου C είναι σταθερά που συνήθως παραλείπουμε. Εξηγείστε γιατί ο τύπος $U = mgh$, θεωρείται καλή προσέγγιση.