

Μαθηματικά II

Υπεύθυνος Καθηγητής:
Γιάννης Ανδρουλιδάκης

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΒΑΘΜΩΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ, ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ, ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΕΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ, ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Εαρινό Εξάμηνο 2024-2025

Ακρότατα βαθμωτών πεδίων

Θεωρούμε μία συνάρτηση ϕ δύο μεταβλητών $\phi(x,y)$

$$\phi(x, y)$$

ορισμένη σε ένα χωρίο $U \subseteq \mathbb{R}^2$, τότε ένα σημείο $a = (a, b) \in U$ είναι **σημείο τοπικού μεγίστου** αν:

Υπάρχει ένας δίσκος (δηλαδή μια περιοχή γύρω από το σημείο a) με ακτίνα $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε για **όλα τα σημεία x, y** μέσα σε αυτόν τον δίσκο, η τιμή της συνάρτησης είναι **μικρότερη ή ίση** με την τιμή της στο $a=(a,b)$, δηλαδή:

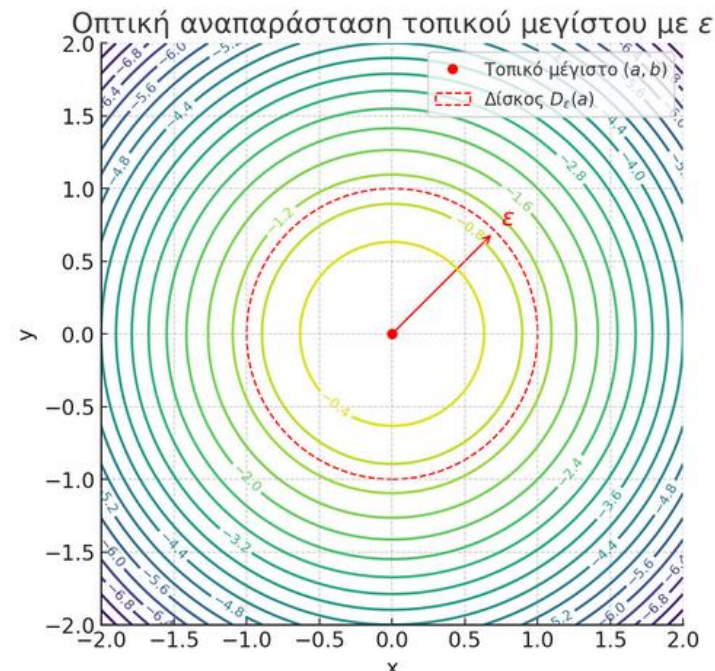
$$\phi(x, y) \leq \phi(a, b)$$

Παράδειγμα

$$\phi(x, y) = -x^2 - y^2.$$

που έχει μέγιστο στο $(0,0)$

- Τοπικό μέγιστο στο $(a, b) = (0, 0)$
- Τον δίσκο $D_\varepsilon(a)$ με κόκκινο περίγραμμα
- Οι ισοϋψείς καμπύλες δείχνουν το σχήμα της συνάρτησης $\phi(x, y) = -x^2 - y^2$, που έχει τοπικό μέγιστο στο $(0, 0)$.



Ακρότατα βαθμωτών πεδίων

Εντελώς όμοια ορίζονται τα τοπικά ακρότατα βαθμωτών πεδίων τριών ή περισσότερων μεταβλητών:

Έστω $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ένα βαθμωτό πεδίο ορισμένο σε ένα χωρίο U του Ευκλειδείου χώρου, $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Το $a = (a, b, c) \in U$ λέγεται σημείο **τοπικού μεγίστου για την ϕ** , αν υπάρχει μπάλα, B_ε , κέντρου a και ακτίνας ε τέτοια ώστε

$$\phi(x, y, z) \leq \phi(a, b, c)$$

δηλαδή για κάθε σημείο μέσα στη μπάλα

$$B_\varepsilon(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z) - (a, b, c)\| < \varepsilon\}$$
$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \varepsilon$$

Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για τα τοπικά ελάχιστα:

Τοπικό Ελάχιστο για $\phi(x, y, z)$

$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ένα βαθμωτό πεδίο, ορισμένο σε ένα χωρίο $U \subseteq \mathbb{R}^3$

Ένα σημείο $a = (a, b, c) \in U$ λέγεται **σημείο τοπικού ελαχίστου** για τη συνάρτηση ϕ , αν:

Υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε σημείο $(x, y, z) \in B_\varepsilon(a)$, να ισχύει:

όπου:

$$\phi(x, y, z) \geq \phi(a, b, c)$$

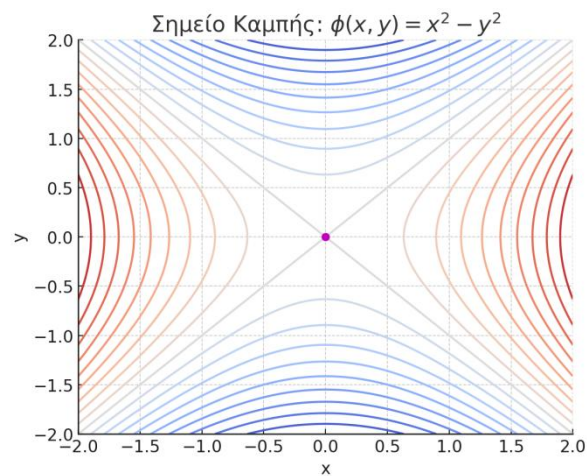
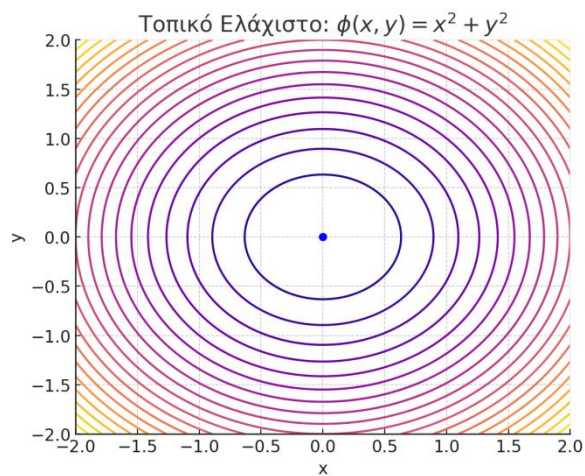
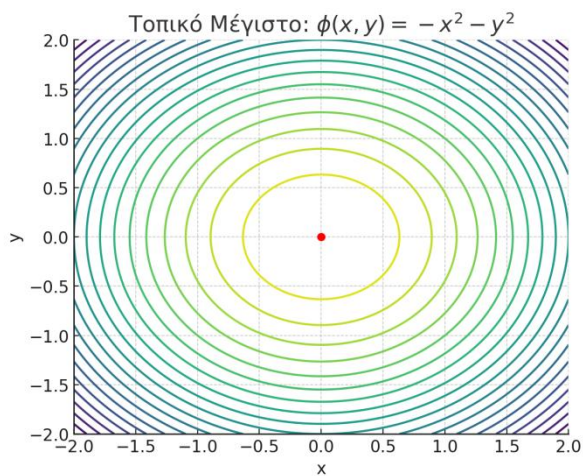
- $B_\varepsilon(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z) - (a, b, c)\| < \varepsilon\}$

Παράδειγμα

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (0, 0, 0)$$

Ακρότατα βαθμωτών πεδίων

Θεώρημα 2.6. Έστω ϕ ένα διαφορίσιμο βαθμωτό πεδίο n μεταβλητών, $\phi = \phi(x_1, \dots, x_n)$. Αν \mathbf{a} είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για την ϕ , τότε όλες οι μερικές παράγωγοι της ϕ στο \mathbf{a} μηδενίζονται,



τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο ή σημείο καμπής

Ακρότατα βαθμωτών πεδίων

Παράδειγμα 21. (α) Για την $\phi(x, y) = 2 - x^2 - y^2$

(β) Η συνάρτηση $\phi(x, y) = x^2 + y^2$

(γ) Για την $\phi(x, y) = xy$

(δ) Για την $\phi(x, y) = x^2y^2$

Τοπικά Ακρότατα?

Είναι το **σημείο καμπής** όπου αλλάζει η «φορά» των καμπυλών

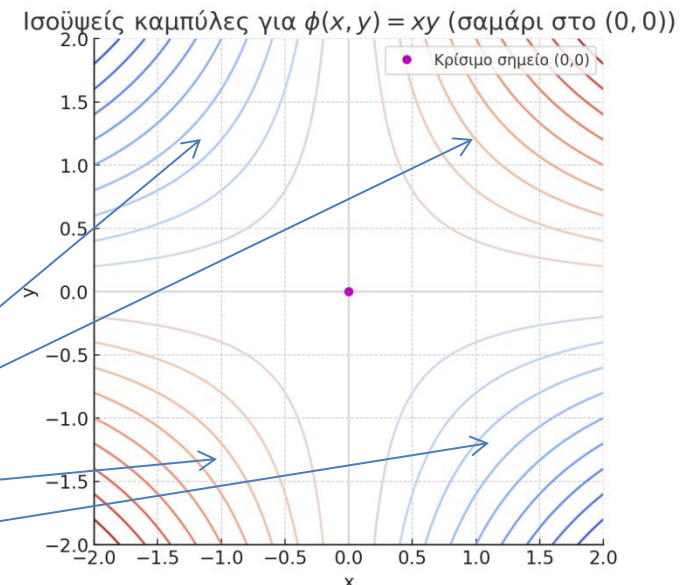
Οι **καμπύλες** είναι **υπερβολές**, που αλλάζουν φορά ανάλογα με το πρόσημο του $\phi(x, y)$

Το **κρίσιμο σημείο (0, 0)** είναι το σημείο όπου οι υπερβολές "ανοίγουν" σε αντίθετες κατευθύνσεις: $xy=c$

Οι καμπύλες προκύπτουν για διαφορετικά c

Αν $c > 0 \rightarrow x, y$ ίδιο πρόσημο \rightarrow υπερβολές

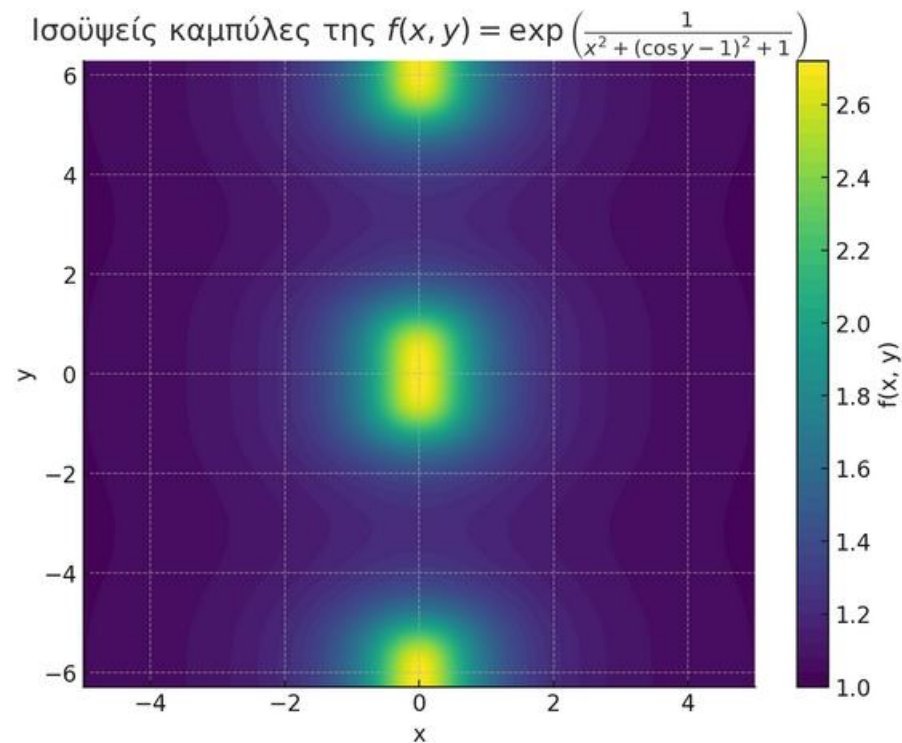
Αν $c < 0 \rightarrow x, y$ αντιθετα \rightarrow υπερβολές



Ακρότατα βαθμωτών πεδίων

Παράδειγμα 23.

$$\phi(x, y) = \exp\left(\frac{1}{x^2 + 2 + \cos^2 y - 2 \cos y}\right)$$



Δεν υπάρχουν τοπικά ελάχιστα, διότι καθώς $x \rightarrow \infty$ ή $|\cos y - 1| \rightarrow \infty$, η τιμή της συνάρτησης φθίνει προς 0, αλλά ποτέ δεν φτάνει κάποιο ελάχιστο σε πεπερασμένο σημείο.

Εφαρμογή: Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων χρησιμοποιείται για να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση ή ευθεία (προσέγγιση) που περνά όσο πιο κοντά γίνεται από ένα σύνολο δεδομένων.



Με αυτό τον τρόπο εκτιμάμε την ελάχιστη «μέση απόκλιση». Δηλαδή το μέτρο απόκλισης δείχνει πόσο «απέχει» η προσέγγισή μας (π.χ. μία ευθεία) από τα δεδομένα

Έστω

- Παρατηρημένα σημεία: (x_i, y_i)

- Προσέγγιση: $\hat{y}_i = f(x_i)$, π.χ. $ax_i + b$

- x_i, y_i : τα δεδομένα σημεία (παρατηρήσεις)

- $\hat{y}_i = ax_i + b$: η προβλεπόμενη τιμή

- a : η κλίση της ευθείας (πόσο αυξάνεται το y όταν αυξάνεται το x)

- Αν $a > 0$: η ευθεία ανεβαίνει (θετική συσχέτιση)

- Αν $a < 0$: η ευθεία κατεβαίνει (αρνητική συσχέτιση)

- Αν $a = 0$: οριζόντια ευθεία

- b : η τεταγμένη της αρχής (το σημείο όπου η ευθεία τέμνει τον άξονα y , δηλαδή όταν $x = 0$)

σφάλμα (ή απόκλιση)

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

μέτρο απόκλισης

$$\phi(a, b) = \sum (f(x_i) - y_i)^2$$

Εφαρμογή: Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Σε ποια περίπτωση θα ήταν καλή η προσέγγιση μας; Δηλαδή η ευθεία που θεωρήσαμε θα εκφράζει καλύτερα την τα δεδομένα μας;



Όταν το τετραγωνικό σφάλμα είναι μικρό



Το μαθηματικό πρόβλημα έγκειται στην ελαχιστοποίηση της $\phi \rightarrow$ εύρεση τοπικών ελαχίστων

$$\phi(a, b) = \sum (f(x_i) - y_i)^2 \quad \text{ή} \quad \phi(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$



Μεθοδολογία


- Εντοπισμός κρίσιμων σημείων της $\phi \rightarrow$ μηδενισμός παραγώγων της

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial b} = 0.$$

Εφαρμογή: Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Μεθοδολογία

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2x_i(ax_i + b - y_i) \quad \frac{\partial \phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial b} = 0. \quad \left. \begin{array}{l} \sum x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \\ \sum (ax_i + b - y_i) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \text{ σύστημα} \\ (2) \text{ εξισώσεων} \end{array}$$


Διαίρεση με 2

$$\frac{\partial \phi}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)$$

$$\begin{array}{l} \text{Εξίσωση (1):} \quad \sum x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \Rightarrow a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i \\ \text{Εξίσωση (2):} \quad \sum (ax_i + b - y_i) = 0 \Rightarrow a \sum x_i + bn = \sum y_i \end{array} \left. \begin{array}{l} (1) \text{ σύστημα} \\ (2) \text{ εξισώσεων} \end{array} \right\}$$

$$\text{Από τη 2η εξίσωση: } b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n} \quad (3)$$

$$(1) \xrightarrow{(3)} a \sum x_i^2 + \left(\frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n} \right) \sum x_i = \sum x_i y_i \quad \longrightarrow \quad a \sum x_i^2 + \frac{\sum x_i \sum y_i - a(\sum x_i)^2}{n} = \sum x_i y_i$$

$$\xrightarrow{\text{Επι } n} an \sum x_i^2 + \sum x_i \sum y_i - a(\sum x_i)^2 = n \sum x_i y_i$$

$$\longrightarrow a \left(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \right) = n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i$$

$$\longrightarrow a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (3) \longrightarrow b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n}$$

Εφαρμογή: Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

$$\phi(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$
$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$
$$b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n}$$

Αυτοί οι τύποι δίνουν τα **βέλτιστα α και β** που ελαχιστοποιούν τη ϕ .

Ερώτηση: Βρήκαμε τα κρίσιμα σημεία. Γιατί θεωρούμε ότι είναι τα ελάχιστα και όχι τα μέγιστα;

Κάθε όρος είναι **τετράγωνο πραγματικού αριθμού** \Rightarrow πάντα **μη αρνητικό**

$$\phi(a, b) \geq 0 \quad \text{για κάθε } (a, b)$$



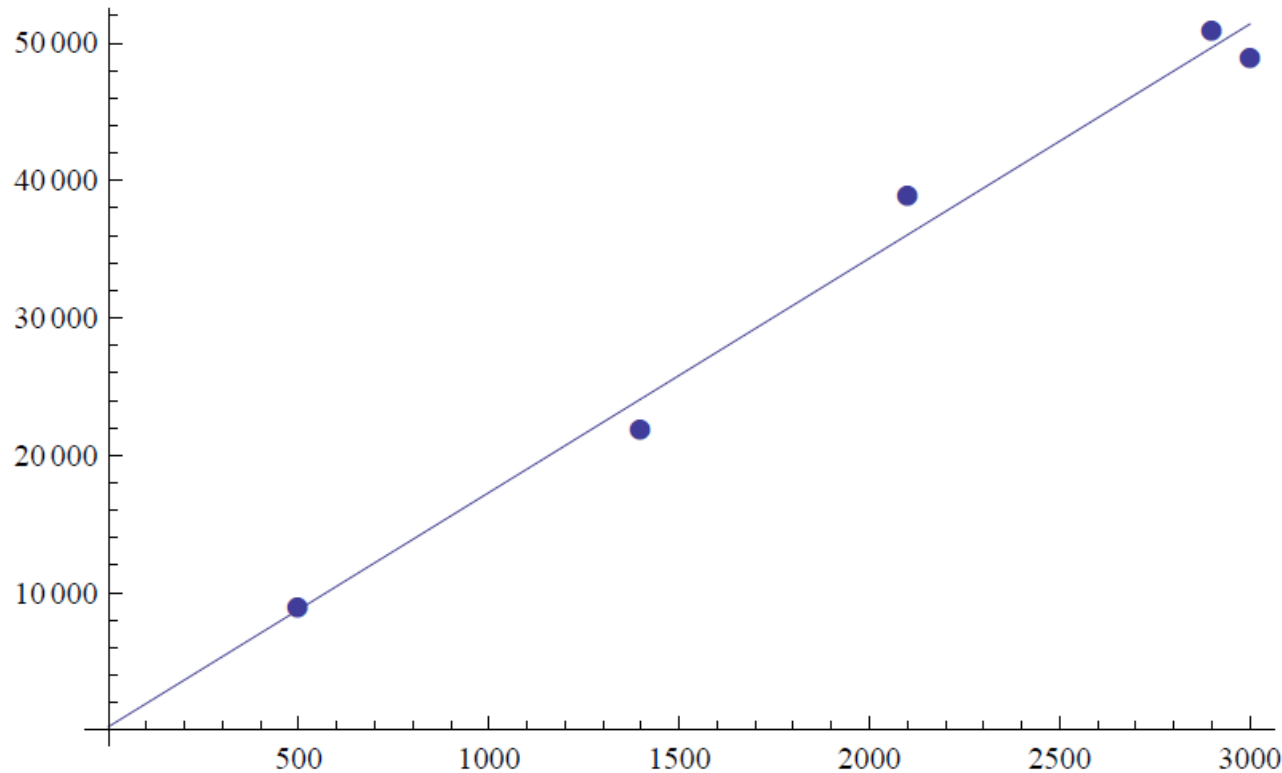
Επομένως, **δεν μπορεί να έχει μέγιστο** (δεν υπάρχει κάποιο "ταβάνι")

Εφαρμογή: Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Εφαρμογή: Νόμος του Hubble.

Γαλαξίας	Απόσταση	Ταχύτητα απομάκρυνσης
1	500	9.000
2	1.400	22.000
3	2.100	39.000
4	2.900	51.000
5	3.000	49.000

***Αποστάσεις πέντε γαλαξιών από τη
γη και οι ταχύτητες απομάκρυνσής***



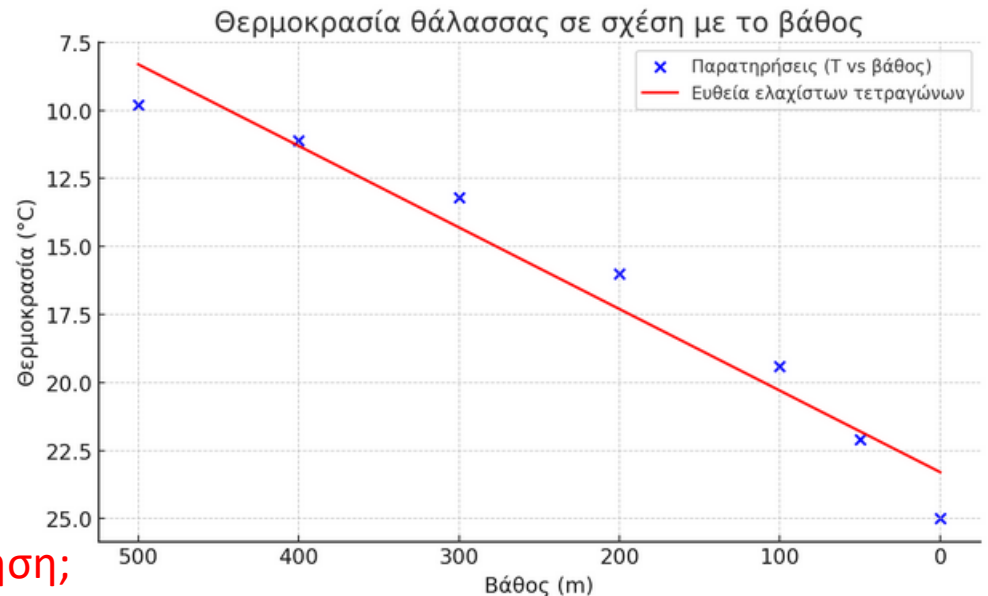
Εφαρμογή: Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Παράδειγμα: Θερμοκρασία σε σχέση με το βάθος

Βάθος (m)	Θερμοκρασία (°C)
0	25.0
50	22.1
100	19.4
200	16.0
300	13.2
400	11.1
500	9.8

Βρείτε την ευθεία που θα περιγράψει την σχέση βάθους με θερμοκρασία για τα δεδομένα μέτρησης:

$$T(z) = az + b$$



Σε τι μας βοηθάει η συγκεκριμένη συνάρτηση;

Το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων

Μας βοηθάει να λύσουμε μια εξίσωση όπως $F(x,y)=0$ για το y σαν συνάρτηση του x ,
ακόμα κι αν δεν είναι ρητά λυμένη

Έστω $F(x, y)$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών (δηλαδή $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης). Αν ισχύουν:

1. $F(x_0, y_0) = 0$, και
2. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Τότε υπάρχει ένα διάστημα γύρω από το x_0 , στο οποίο μπορούμε να γράψουμε το y σαν συνάρτηση του x , δηλαδή υπάρχει μια διαφορίσιμη συνάρτηση $y = g(x)$ τέτοια ώστε:

- $g(x_0) = y_0$
- Για κάθε x στο διάστημα: $F(x, g(x)) = 0$
- Η παράγωγος της g είναι:

$$g'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \Big|_{(x, g(x))} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}}$$

Δηλαδή, μπορούμε τοπικά να λύσουμε την εξίσωση $F(x, y) = 0$ για το y ως συνάρτηση του x .

Το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων

Παραδείγματα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Ασκήσεις

1. Βρείτε τα ακρότατα της $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ στο δίσκο $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Ασκήσεις

2. Εξετάστε αν η καμπύλη $\phi(x, y) = 0$ με $\phi(x, y) = e^{\cos(xy)} + x^2 + y - e$ περιγράφεται κοντά στο $(0, 0)$ από κάποια συνάρτηση $y = f(x)$.

Παραγωγή ολοκληρωμάτων

Έστω μια "καλή" συνάρτηση $f(x, t)$ με:

- $f(x, t)$ συνεχής στο $x \in [a, b]$ και $t \in I \subseteq \mathbb{R}$
- $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ επίσης συνεχής στο ίδιο πεδίο

Τότε, το ορισμένο ολοκλήρωμα: $I(t) = \int_a^b f(x, t) dx$

Εξαρτάται από το t
(είναι δηλαδή
συνάρτηση του t)

είναι διαφορίσιμη συνάρτηση ως προς το t , και ισχύει:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad \text{Leibniz integral rule}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την παράγωγο κατά t στο σημείο t_0 :

ορισμό παραγώγου για κάθε x ,

$$I'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(t_0 + h) - I(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(x, t_0 + h) dx - \int_a^b f(x, t_0) dx \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)}{h} dx$$



$$\frac{f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)}{h} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \quad \text{καθώς } h \rightarrow 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

Παραγωγή ολοκληρωμάτων

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

Παράδειγμα

Έστω $f(x, t) = xt^2$.

Παραγωγή ολοκληρωμάτων $\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$

Παράδειγμα 25

Παραγωγή ολοκληρωμάτων

Παράδειγμα 26

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \quad a > 0,$$

Παραγωγή ολοκληρωμάτων

Παράδειγμα 27

$$I(a) = \int_1^2 \frac{\sin ax}{x} dx \quad \text{Αποδείξτε ότι} \quad I(a)' = \sin a \frac{2 \cos a - 1}{a}$$

Παραγωγή ολοκληρωμάτων

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

Γενίκευση θεωρήματος και για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών:

Π.χ. Κατανομή πυκνότητας στον χώρο και στον χρόνο.

$$\rho : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

Αν $dV = dx dy dz$ είναι ένας στοιχειώδης όγκος, τότε ρdV είναι η στοιχειώδης μάζα dm που περιέχεται μέσα στον dV . $dm = \rho(x, y, z, t) \cdot dV$

Αν θέλουμε τη **συνολική μάζα του ρευστού** μέσα σε έναν όγκο V , τότε ολοκληρώνουμε:

$$m(t) = \iiint_V \rho dV = \iiint_V \rho(x, y, z, t) dx dy dz$$

Το ολοκλήρωμα προσθέτει όλη τη μάζα που βρίσκεται μέσα στον όγκο V

Η παράγωγος ως προς χρόνο, περνάει μέσα στο ολοκλήρωμα (Κανόνας Leibniz):

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho(x, y, z, t) dx dy dz = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, y, z, t) dx dy dz$$

Μπορούμε δηλαδή να **υπολογίσουμε πρώτα την παράγωγο της πυκνότητας** (τοπική μεταβολή) και μετά να **ολοκληρώσουμε στον όγκο** για να δούμε τη συνολική αλλαγή μάζας.

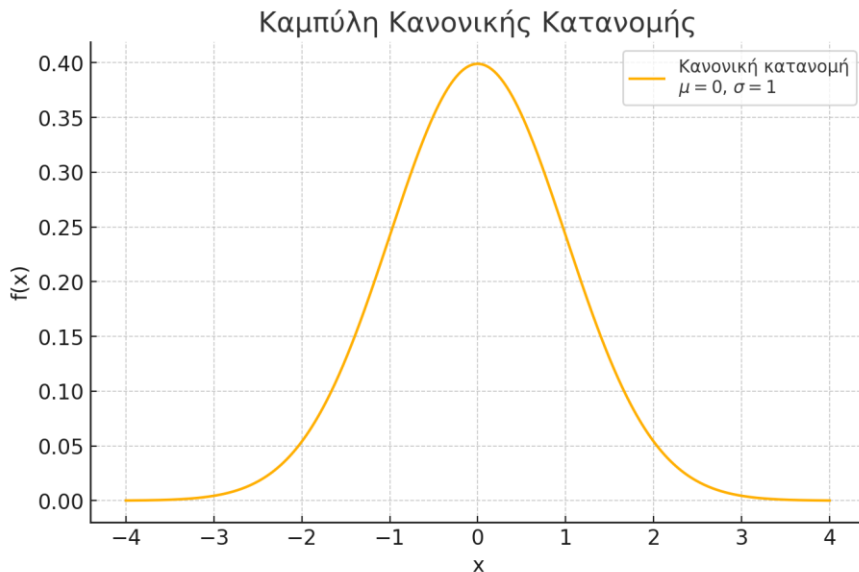
Κανονική Κατανομή

όπου:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- μ : μέση τιμή (μέσος όρος)
- σ : τυπική απόκλιση (standard deviation)
- σ^2 : διασπορά (variance)

1. **Συμμετρία:** η κατανομή είναι συμμετρική γύρω από το μ
2. **Μέγιστο στο $x = \mu$** (το πιο πιθανό σημείο)
3. **Καμπύλη σε σχήμα "καμπάνας"** (bell-shaped curve)
4. **Η συνολική επιφάνεια κάτω από την καμπύλη είναι 1**



καμπάνα Gauss

Κανονική Κατανομή

Παράδειγμα: Θερμοκρασία vs. Βάθος με Τυπική Κανονική Κατανομή

- Μετράμε τη **θερμοκρασία T** της θάλασσας σε διάφορα **βάθη d** (από την επιφάνεια έως τα 500 μέτρα)
- Η **μέση θερμοκρασία** στο βάθος 100 μέτρων είναι π.χ. **15°C**.
- Λόγω φυσικών διακυμάνσεων (ρεύματα, εποχή, κ.λπ.), η θερμοκρασία σε κάθε βάθος **κατανέμεται κανονικά** γύρω από μια μέση τιμή.
- Υποθέτουμε ότι η **τυπική απόκλιση** είναι **2°C** (δηλαδή $\sigma=2$). $T \sim \mathcal{N}(15, 2^2)$



Θέλουμε να υπολογίσουμε την **πιθανότητα** ότι η θερμοκρασία στο βάθος των 100 μέτρων είναι **μεταξύ 13°C και 17°C**.

Βήμα 1 μετατρέπουμε την T σε μια **αδιάστατη μεταβλητή Z** , με μέση τιμή **0** και απόκλιση **1**:

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$Z = \frac{T - \mu}{\sigma}$$

Για το κάτω όριο (13°C):

$$Z_1 = \frac{13 - 15}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Για το πάνω όριο (17°C):

$$Z_2 = \frac{17 - 15}{2} = \frac{2}{2} = +1$$

Βήμα 2 Υπολογισμός πιθανότητας στην τυπική κατανομή

Η πιθανότητα:

$$P(13 \leq T \leq 17) = P(-1 \leq Z \leq 1)$$



$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \approx 0.6827$$

$$P(13 \leq T \leq 17) \approx \boxed{68.27\%}$$

Κανονική Κατανομή

Παράδειγμα: Θερμοκρασία vs. Βάθος με Τυπική Κανονική Κατανομή

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \approx 0.6827$$



Αν πάρεις πολλές μετρήσεις θερμοκρασίας στο βάθος των 100 μέτρων:

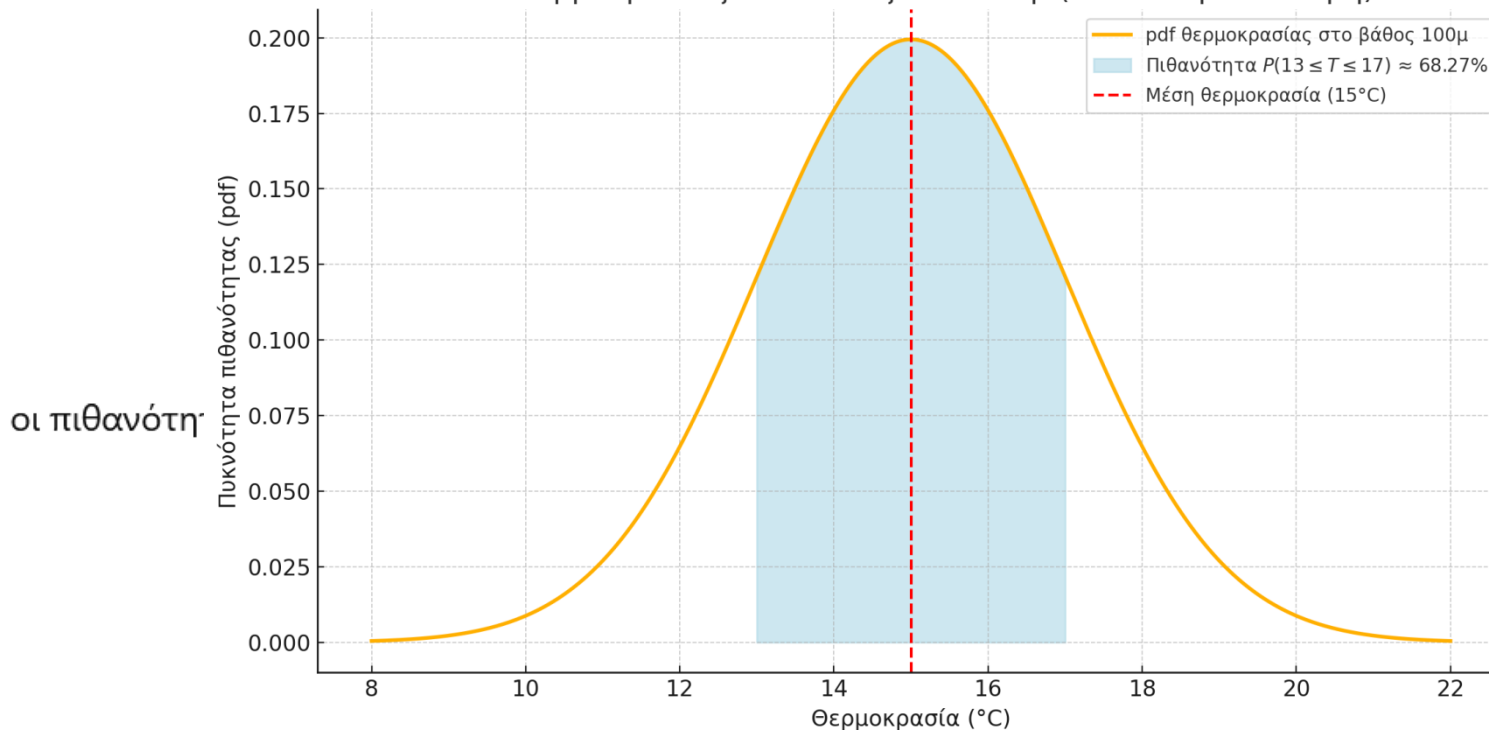
- Περίπου το 68% αυτών θα είναι μεταξύ 13°C και 17°C
- Δηλαδή ±1 τυπική απόκλιση γύρω από τη μέση τιμή

$$P(13 \leq T \leq 17) \approx \boxed{68.27\%}$$

Γιατί:

Probability-density-function

PDF Θερμοκρασίας στο Βάθος των 100μ (Κανονική Κατανομή)



Κανονική Κατανομή

Τι είναι οι **ροπές**;

Οι **ροπές** είναι μαθηματικά εργαλεία που περιγράφουν το **σχήμα** μιας κατανομής. Είναι σαν "χαρακτηριστικά γνωρίσματα" μιας τυχαίας μεταβλητής.

Η **n-οστή ροπή** μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

όπου $f(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της X

n	Ροπή	Τι σημαίνει
1	$\mathbb{E}[X]$	1η ροπή → μέση τιμή (average)
2	$\mathbb{E}[X^2]$	2η ροπή → σχετίζεται με διασπορά
3	$\mathbb{E}[X^3]$	3η ροπή → στρέβλωση (skewness)
4	$\mathbb{E}[X^4]$	4η ροπή → κυρτότητα (kurtosis)
κ.ο.κ.	$\mathbb{E}[X^n]$	n-οστή ροπή

Κανονική Κατανομή

Πώς υπολογίζονται;

Αν έχεις την pdf, τότε:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

Γενικός κανόνας:

$$n\text{-οστή ροπή} = \mathbb{E}[X^n]$$