Μαθηματικά ΙΙ

Υπεύθυνος Καθηγητής:
Γιάννης Ανδρουλιδάκης

4ο & 5ο Μάθημα

Εαρινό Εξάμηνο 2024-2025

Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$

Το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ συμβολίζεται με $\mathbb{R}^n$ και λέγεται n-διάστατος Ευκλείδειος χώρος. Τα στοιχεία του $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ λέγονται σημεία του $\mathbb{R}^n$, ή n-διανύσματα. Όπως και στην περίπτωση του τριδιάστατου Ευκλείδειου χώρου, ορίζουμε άθροισμα των διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

και πολλαπλασιασμό με βαθμωτό λ

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Με τις δύο αυτές πράξεις, το σύνολο R^n αποκτά την αλγεβρική δομή ενός διανυσματικού χώρου, έχει δηλαδή τις ιδιότητες ΔΧ1 έως ΔΧ10.

Ιδιότητες Διανυσματικού Χώρου (ΔΧ)

Πρόσθεση διανυσμάτων:

1. $\Delta X1$: **Κλειστότητα στην πρόσθεση**

   Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

2. $\Delta X2$: **Αντιμεταθετικότητα**

   Για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}.$$

3. $\Delta X3$: **Προσεταιριστική ιδιότητα**

   Για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}).$$

4. $\Delta X4$: **Μηδενικό στοιχείο στην πρόσθεση**

   Υπάρχει ένα διάνυσμα $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

5. $\Delta X5$: **Αντίθετο στοιχείο**

   Για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, υπάρχει $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Ιδιότητες Διανυσματικού Χώρου (ΔΧ)

Πολλαπλασιασμός με βαθμωτούς:

6. $\Delta X6$: **Κλειστότητα στον πολλαπλασιασμό με βαθμωτό**

   Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

7. $\Delta X7$: **Προσεταιριστική ιδιότητα βαθμωτού πολλαπλασιασμού**

   Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x}).$$

8. $\Delta X8$: **Διανεμητική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση βαθμωτών**

   Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}.$$

9. $\Delta X9$: **Διανεμητική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων**

   Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}.$$

10. $\Delta X10$: **Πολλαπλασιαστική ταυτότητα**

    Για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Συνήθη διανύσματα βάσης (ή τυπικά διανύσματα βάσης)

Ορισμός:

Τα συνήθη διανύσματα βάσης του $\mathbb{R}^n$ είναι:

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n,$$

όπου το κάθε διάνυσμα $\mathbf{e}_i$ έχει όλες τις συντεταγμένες μηδέν, εκτός από τη i-στή συντεταγμένη, η οποία είναι 1.

Συμβολικά:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

κάθε διάνυσμα $x \in R^n$, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

Παράδειγμα στον $\mathbb{R}^3$:

Στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$, τα συνήθη διανύσματα βάσης είναι:

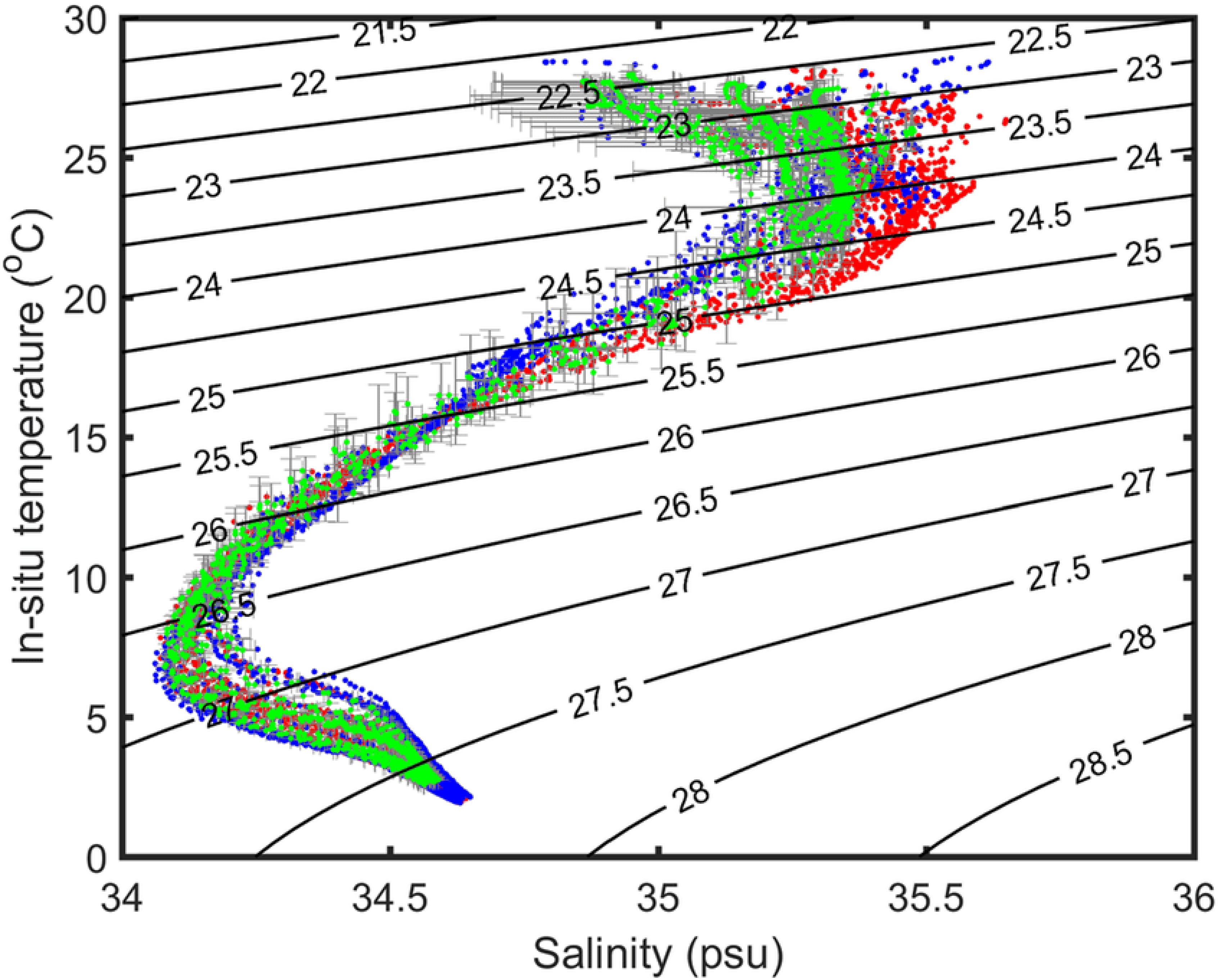
$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Αν έχουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{x} = (2, -1, 3)$, τότε μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 - 1\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3.$$

Γιατί είναι χρήσιμο

Πολλά προβλήματα χρειάζονται **πολλές μεταβλητές**.


In-situ temperature (°C)
Salinity (psu)
30
25
20
15
10
5
0
34
34.5
35
35.5
36

Συνήθη διανύσματα βάσης (ή **τυπικά διανύσματα βάσης**)

Ιδιότητες:

Ορθογωνιότητα: Τα διανύσματα βάσης είναι ορθογώνια μεταξύ τους, δηλαδή:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0, \text{ για } i \neq j.$$

Συνήθη διανύσματα βάσης (ή τυπικά διανύσματα βάσης)

Ιδιότητες:

Μήκος 1: Το μήκος κάθε διανύσματος βάσης είναι 1:

$$\|\mathbf{e}_i\| = 1.$$

Πίνακες

Πίνακες, ορισμοί

Ένας $m \times n$ πίνακας A, είναι μία ορθογώνια διάταξη αριθμών με m γραμμές και n στήλες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης είναι το a_{ij}. Πολλές φορές για λόγους οικονομίας γράφουμε τον πίνακα A ως

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Η j-στήλη συμβολίζεται με $\mathbf{A}^j$ και συνήθως λέγεται διάνυσμα j-στήλης (θεωρούμενη ως μία m-άδα αριθμών, είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^m$),

$$\mathbf{A}^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}. \qquad \boldsymbol{A^j = (a_{1j},\, a_{2j},\, \ldots,\, a_{mj})}$$

Όμοια η i-γραμμή συμβολίζεται με $\mathbf{A}_i$ και συνήθως λέγεται διάνυσμα i-γραμμής (θεωρούμενη ως μία n-άδα αριθμών, είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^n$),

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

έχει ως στήλες τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Το διάνυσμα γραμμής $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι ένας **πίνακας** $1 \times n$, δηλαδή μία διάταξη δεδομένων που αποτελείται από μία γραμμή και n στήλες. Για παράδειγμα:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

Αντίστοιχα, το **διάνυσμα στήλης** αναπαρίσταται ως ένας **πίνακας** $n \times 1$, δηλαδή μία διάταξη δεδομένων που αποτελείται από n γραμμές και μία στήλη:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ένας πίνακας λέγεται **τετραγωνικός** όταν ο αριθμός των γραμμών (m) είναι ίσος με τον αριθμό των στηλών (n), δηλαδή όταν m=n. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας έχει την ίδια διάσταση και στις δύο κατευθύνσεις και η μορφή του είναι:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ένας πίνακας λέγεται **μηδενικός πίνακας** όταν **όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με το μηδέν**. Δηλαδή, για έναν πίνακα A με διαστάσεις m×n, ισχύει:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Συμβολίζεται συχνά με $0_{m \times n}$, όπου m είναι ο αριθμός των γραμμών και n ο αριθμός των στηλών.

Ένας **τετραγωνικός πίνακας** λέγεται **διαγώνιος** όταν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται **εκτός της κύριας διαγωνίου** είναι μηδέν.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Συμβολίζουμε τον διαγώνιο πινακα ως $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

Ένας τετραγωνικός n×n πίνακας λέγεται **συμμετρικός** αν ισχύει η ιδιότητα:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του πίνακα που βρίσκεται στη θέση (i, j) είναι ίσο με το στοιχείο που βρίσκεται στη θέση (j, i). Με άλλα λόγια, ο πίνακας είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιό του.

Για παράδειγμα, ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

είναι συμμετρικός, επειδή για κάθε i, j ισχύει ότι $a_{ij} = a_{ji}$.

Ο **μοναδιαίος** πίνακας, ή πίνακας μονάδα ***I***, είναι ένας διαγώνιος πίνακας που όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι 1

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Γινόμενο των δύο πινάκων

Το γινόμενο των δύο πινάκων $A = (a_{ij})$, ένας $m \times n$ πίνακας, και $B = (b_{ij})$, ένας $n \times r$ πίνακας, ορίζεται ως ένας $m \times r$ πίνακας $C = (c_{ij})$, όπου τα στοιχεία του C δίνονται από τον τύπο:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ j \in \{1, 2, \ldots, r\}.$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, r$$

Παράδειγμα 1

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Γινόμενο των δύο πινάκων

Το γινόμενο των δύο πινάκων $A = (a_{ij})$, ένας $m \times n$ πίνακας, και $B = (b_{ij})$, ένας $n \times r$ πίνακας, ορίζεται ως ένας $m \times r$ πίνακας $C = (c_{ij})$, όπου τα στοιχεία του C δίνονται από τον τύπο:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ j \in \{1, 2, \ldots, r\}.$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, r$$

Παράδειγμα 2

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Ιδιότητες του γινομένου

Εν γένει, το γινόμενο πινάκων **δεν είναι μεταθετικό**, δηλαδή για δύο πίνακες A και B, συνήθως:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Αυτό σημαίνει ότι η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζουμε δύο πίνακες επηρεάζει το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 3

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Ιδιότητες του γινομένου

Το γινόμενο πινάκων είναι **προσεταιριστικό**.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Δηλαδή, για τρεις πίνακες A, B, και C, το αποτέλεσμα του γινομένου δεν εξαρτάται από τη σειρά που εκτελούμε την πράξη, αρκεί να διατηρείται η διάταξη τους

Παράδειγμα 4

Προϋπόθεση:

Για να ισχύει αυτή η ιδιότητα, οι διαστάσεις των πινάκων πρέπει να είναι συμβατές για πολλαπλασιασμό. Δηλαδή:

- Αν A είναι $m \times n$, τότε:
  - B πρέπει να είναι $n \times p$,
  - C πρέπει να είναι $p \times q$, ώστε τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot C$ να είναι ορισμένα.

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Ιδιότητες του γινομένου

Ισχύει η **επιμεριστική** ιδιότητα ως προς την πρόσθεση

$$A(B+C) = AB + AC$$

Παράδειγμα 5

΄Ενας τετραγωνικός n × n πίνακας A λέγεται **αντιστρέψιμος**, αν υπάρχει ένας n × n πίνακας B τέτοιος ώστε

$$AB = BA = I_n$$

Ο πίνακας B λέγεται αντίστροφος του A και συμβολίζεται με $A^{-}1$. Ο αντίστροφος ενός πίνακα, αν υπάρχει, είναι μοναδικός. ΄Ενας απλός τρόπος προσδιορισμού του αντιστρόφου πίνακα, είναι η λύση του συστήματος $AA^{-1} = I$.

Παράδειγμα 6

Παρατήρηση: Γεωμετρική ερμηνεία πινάκων

Ας θυμηθούμε αρχικά ότι ένα διάνυσμα είναι ένας ειδικός τύπος πίνακα, είτε n×1 (στήλη) είτε 1×n (γραμμή)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

Όταν λέμε ότι ένας πίνακας A "δρα πάνω" σε ένα διάνυσμα x του $\mathbb{R}^n$, εννοούμε ότι ο πίνακας A εφαρμόζει έναν **γραμμικό μετασχηματισμό** στο διάνυσμα x, μετατρέποντάς το σε ένα νέο διάνυσμα y που ανήκει στον $\mathbb{R}^m$, σύμφωνα με τη σχέση:

$$y = A \cdot x.$$

Παράδειγμα 7

Παρατήρηση: Γεωμετρική ερμηνεία πινάκων

- **Περιστρέφει** το x: Τότε το νέο διάνυσμα y βρίσκεται σε διαφορετική κατεύθυνση αλλά έχει το ίδιο μήκος (αν ο πίνακας είναι ορθογώνιος).

Ένας πίνακας μπορεί να περιστρέψει ένα διάνυσμα, και αυτή η περιστροφή είναι συνήθως μια γεωμετρική μετατροπή σε δύο ή τρεις διαστάσεις. Ο πίνακας που κάνει αυτή την περιστροφή είναι ορθογωνικός και η περιστροφή του διανύσματος μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω γινομένων πίνακα-διανύσματος.

Παράδειγμα 8

Παρατήρηση: Γεωμετρική ερμηνεία πινάκων

- **Διαστέλλει** ή **συρρικνώνει**: Τότε το μήκος του x αλλάζει ανάλογα με τους συντελεστές του A

Ο πίνακας A **διαστέλλει** το διάνυσμα **x** όταν το μήκος του νέου διανύσματος **Ax** είναι μεγαλύτερο από το μήκος του αρχικού διανύσματος **x**. Αυτό συμβαίνει όταν ο πίνακας έχει **ιδιοτιμές μεγαλύτερες από 1** σε κάποιον άξονα του χώρου, δηλαδή όταν ο πίνακας τεντώνει το διάνυσμα κατά μήκος αυτών των αξόνων.

Παράδειγμα 9

Παρατήρηση: Γεωμετρική ερμηνεία πινάκων

- **Διαστέλλει** ή **συρρικνώνει**: Τότε το μήκος του x αλλάζει ανάλογα με τους συντελεστές του A

Παράδειγμα 10

Σε ποια περίπτωση δεν θα άλλαζε η διεύθυνση του διανύσματος (δηλαδή αλλάζει μονο το μήκος του;)

Για να έχουμε παράδειγμα όπου **δεν αλλάζει η διεύθυνση** του διανύσματος, ο πίνακας πρέπει να έχει τις ιδιότητες που θα επιτρέπουν στο διάνυσμα να **διατηρήσει την ίδια κατεύθυνση** ενώ το μήκος του μπορεί να αλλάξει (διαστολή ή συρρίκνωση).

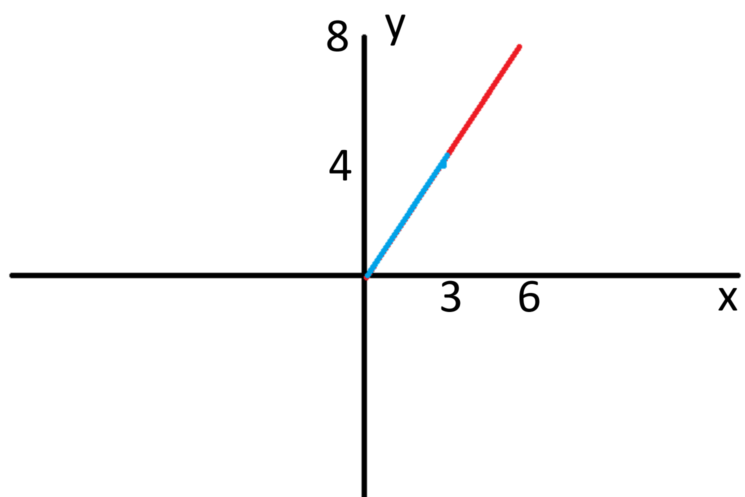
Ένα παράδειγμα τέτοιου πίνακα είναι ένας πίνακας που **πολλαπλασιάζει** το διάνυσμα με έναν αριθμό (κλίμακα), χωρίς να επηρεάζει την κατεύθυνσή του.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας A και το διάνυσμα $\mathbf{x}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος δεν άλλαξε, επειδή ο πίνακας A είναι ένας **ομοιογενής κλίμακας πίνακας**, δηλαδή πολλαπλασιάζει το διάνυσμα με έναν σταθερό παράγοντα (στην περίπτωση αυτή, 2 σε κάθε κατεύθυνση).



Παρατήρηση: Γεωμετρική ερμηνεία πινάκων

- **Προβάλλει**: Τότε το y θα είναι "σκιά" του x σε έναν μικρότερο χώρο

Αλλαγή Χώρου: Ο πίνακας μπορεί επίσης να αλλάξει τη διάσταση του διανύσματος. Για παράδειγμα, αν έχουμε έναν πίνακα που μειώνει τη διάσταση του διανύσματος από $\mathbb{R}^3$ σε $\mathbb{R}^2$, το νέο διάνυσμα $A\mathbf{x}$ θα βρίσκεται σε έναν μικρότερο χώρο, και μπορεί να φανεί σαν «σκιά» του αρχικού διανύσματος σε έναν μικρότερο χώρο.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας A έχει τη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και το διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$ **2-d**

Η εφαρμογή του πίνακα A στο διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι:

$$y = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το **y=Ax** είναι το διάνυσμα [3,0] που βρίσκεται σε έναν μικρότερο χώρο, δηλαδή στον άξονα x. Το αρχικό διάνυσμα x=[3,4] ήταν σε έναν 2-διάστατο χώρο, ενώ το νέο διάνυσμα Ax είναι μια "σκιά" του σε έναν 1-διάστατο χώρο.

Έτσι, το Ax μπορεί να θεωρηθεί ως μια **σκιά του x** σε μικρότερο χώρο.

Ορίζουσες

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του είναι ο αριθμός $ad - bc$ και συμβολίζεται με $\det A$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Αν $\mathbf{A}^1$ και $\mathbf{A}^2$ είναι οι δύο στήλες του *A*, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\det A = D(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2)$ για την ορίζουσα του

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Για έναν πίνακα 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα $\det(A)$ υπολογίζεται ως:

$$\det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Αν $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^2$ και $\mathbf{A}^3$ είναι οι στήλες του *A*, χρησιμοποιούμε πάλι το συμβολισμό $\det A = D(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3)$ για την ορίζουσα του

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

Ορίζουσες - Ιδιότητες

- **Ο1** **Ως συνάρτηση των διανυσμάτων στήλης A^j , η ορίζουσα είναι γραμμική**

$$D(A^1 + B,\ A^2) = D(A^1, A^2) + D(B, A^2)$$

Ορίζουσες - Ιδιότητες

- **O1** **Ως συνάρτηση των διανυσμάτων στήλης A^j , η ορίζουσα είναι γραμμική**

$$D(A^1,\ A^2 + B) = D(A^1, A^2) + D(A^1, B)$$

Ορίζουσες - Ιδιότητες

- **Ο1** **Ως συνάρτηση των διανυσμάτων στήλης A^j , η ορίζουσα είναι γραμμική**

$$D(\lambda A^1, A^2) = \lambda D(A^1, A^2) = D(A^1, \lambda A^2)$$

Ορίζουσες - Ιδιότητες

- **Ο2** Αν δύο στήλες είναι ίσες, η ορίζουσα είναι **μηδέν**.

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2 & 2} \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

2 στήλες ίσες

Η ορίζουσα κατά την πρώτη γραμμή:

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε κάθε επιμέρους ορίζουσα:

1. $\det \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = (4 \cdot 6 - 4 \cdot 6) = 0,$
2. $\det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = (3 \cdot 6 - 4 \cdot 5) = 18 - 20 = -2$

$$\det(A) = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)$$

$$\det(A) = 0 + 4 - 4 = 0$$

Ορίζουσες - Ιδιότητες

- **Ο3** Η ορίζουσα του **μοναδιαίου πίνακα** είναι 1.

Για παράδειγμα, ο μοναδιαίος πίνακας I_3 είναι:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε την εξέλιξη κατά την πρώτη γραμμή:

$$\det(I_3) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ορίζουσες - Ιδιότητες

- **O4** Η ορίζουσα μπορεί να αναπτυχθεί κατά στήλες ή γραμμές, άρα detA = det A^T.

Homework → δείξτε το ίδιο με ένα 3x3 πίνακα π.χ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Ορίζουσες - Ιδιότητες

- **O5** Αν εναλλάξουμε τις δυο στήλες, η ορίζουσα **αλλάζει πρόσημο**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} + 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (5 \cdot 10) - (6 \cdot 8) = 50 - 48 = 2. \\ (4 \cdot 10) - (6 \cdot 7) = 40 - 42 = -2 \\ (4 \cdot 8) - (5 \cdot 7) = 32 - 35 \end{array}\right\} \det(A) = 2 + 4 - 9 = -3$$

Αλλαζουμε την 1η με την 2η στήλη στον Α

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A') = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (2) + 3 \cdot (3) \Longrightarrow \det(A') = -4 - 2 + 9 = 3$$

$$\det(A') = -\det(A).$$

$$\det(A') = 3, \quad \det(A) = -3.$$

Αν εναλλάξουμε δυο γραμμές ισχύει το ίδιο.

Ορίζουσες - Ιδιότητες

- **Ο6** Αν προσθέσουμε ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο μίας στήλης σε μια άλλη στήλη, η **ορίζουσα δεν αλλάζει**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

Προσθέτουμε $2 \cdot (1\text{η στήλη})$ στη 2η στήλη. Ο νέος πίνακας είναι:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 13 & 6 \\ 7 & 22 & 9 \end{bmatrix}.$$

det (A') = 1 (117 – 132) – 4 (36 - 42) + 3 (88 – 91) = 0

Homework → δείξτε το ίδιο αλλάζοντας την 3η στήλη

Γενική μορφή ορίζουσας

Η **ελάσσων ορίζουσα** που αντιστοιχεί στο στοιχείο a_{ij} ενός πίνακα, είναι η ορίζουσα του υποπίνακα που προκύπτει όταν διαγραφεί η γραμμή i και η στήλη j από τον αρχικό πίνακα.

Εστω ότι έχουμε εναν 3x3 πίνακα: $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Για τον παραπάνω 3 × 3 πίνακα A, μερικές ελάσσονες ορίζουσες είναι:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Η ανάπτυξη της ορίζουσας det(A)κατά την **πρώτη γραμμή** είναι:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{12} \cdot \det(A_{12}) + a_{13} \cdot \det(A_{13})$$

Det (*A_{13}*) ελάσσων ορίζουσα

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

+ det(*A_{13}*) αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου $α_{ij}$ (δηλ. του $α_{13}$)

Γενική μορφή ορίζουσας

Γενική μορφή:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

- a_{ij} είναι το στοιχείο στην i-η γραμμή και την j-η στήλη του πίνακα A
- Aij είναι η ελάσσων ορίζουσα που προκύπτει από τον πίνακα A αν διαγράψουμε την i-η γραμμή και την j-η στήλη
- $(-1)^{i+j}$ είναι ο παράγοντας που καθορίζει το πρόσημο, και εξαρτάται από τη θέση του στοιχείου a_{ij} στον πίνακα.

Η ανάπτυξη κατά την i−γραμμή γράφεται

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} A_{in}.$$

Η ανάπτυξη κατά την j−στήλη γράφεται

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} A_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} A_{nj},$$

όπου A_{ij} είναι πάντα η ελάσσων ορίζουσα.

Δηλαδή για την 1-γραμμή

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} A_{12} \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} A_{1n}$$

- Αν έχουμε το στοιχείο a_{11}, το οποίο βρίσκεται στην πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη, το πρόσημο είναι $(-1)^{1+1}$ άρα το πρόσημο είναι θετικό

- Αν έχουμε το στοιχείο a_{12}, το οποίο βρίσκεται στην πρώτη γραμμή και τη δεύτερη στήλη, το πρόσημο είναι $(-1)^{1+2}=-1$, άρα το πρόσημο είναι αρνητικό

- Το α_{13}?

Γενική μορφή ορίζουσας

Παράδειγμα: Πίνακας 3x3 και ορίζουσα κατά την $1^η$ γραμμή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Η γενική φόρμουλα για την ανάπτυξη κατά την πρώτη γραμμή είναι η εξής:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \mathrm{de}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Προσοχή στο πρόσημο

Αυτή η διαδικασία δείχνει γιατί τα πρόσημα εναλλάσσονται. Τα πρόσημα καθορίζονται από τον παράγοντα $(-1)^{1+j}$, ο οποίος εξαρτάται από τη θέση του στοιχείου a_{1j} στον πίνακα.

Παράδειγμα: Πίνακας 3x3 και ορίζουσα κατά την $2^η$ γραμμή

$$\det(A) = -a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$(-1)^{2+1}$ $(-1)^{2+2}$ $(-1)^{2+3}$

Και τελικά λύνουμε την ορίζουσα οπως γνωρίζουμε:

$$\det(A) = -a_{21} \cdot (a_{12} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{32}) + a_{22} \cdot (a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31}) - a_{23} \cdot (a_{11} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{31})$$

Εύρεση του αντιστρόφου ενός τετραγωνικού πίνακα
(με χρήση οριζουσών)

Θεωρούμε τον πίνακα C με στοιχεία τα αλγεβρικά συμπληρώματα των a_{ij} του πίνακα A,
Δηλαδή αν ο πίνακας A είναι:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Longrightarrow c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

Τότε ο αντίστροφος του A δίνεται από τον τύπο: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^T$

Επομένως για να να βρούμε τον αντίστροφο ενός τετραγωνικού πίνακα A ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Βρίσκουμε την ορίζουσα του A, (αν $\det A = 0$, ο πίνακας δεν αντιστρέφεται).

2. Βρίσκουμε τις ελάσσονες ορίζουσες A_{ij}, $\quad i, j = 1, 2, \ldots, n$.

3. Βρίσκουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα, $c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$.

4. Γράφουμε τον πίνακα $C = (c_{ij})$ και σχηματίζουμε τον ανάστροφό του, C^T.

5. Εφαρμόζουμε τον τύπο $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^T$

Εύρεση του αντιστρόφου ενός τετραγωνικού πίνακα

(με χρήση οριζουσών)

Παράδειγμα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

1. Βρίσκουμε την ορίζουσα του Α: $\det A = 2\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 6$

2. Βρίσκουμε τις ελάσσονες του Α:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \\
A_{21} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \\
A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6.
\end{aligned}$$

3. Βρίσκουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα (προσοχή στα πρόσημα που ορίζονται από το i+j):

$C = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

4. Βρισκουμε τον ανάστροφο → C^T: $C^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -4 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

5. Εφαρμόζουμε τον τύπο: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^T$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Εύρεση του αντιστρόφου ενός τετραγωνικού πίνακα

(με χρήση οριζουσών)

Παράδειγμα (Επαλήθευση):

$A\,A^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} =$$

$c_{11} = (2 \cdot \frac{5}{6}) + (1 \cdot -\frac{2}{3}) + (0 \cdot -\frac{1}{3})$ **1**

$c_{12} = (2 \cdot -\frac{1}{3}) + (1 \cdot \frac{2}{3}) + (0 \cdot \frac{1}{3})$ **0**

$c_{13} = (2 \cdot -\frac{1}{2}) + (1 \cdot 1) + (0 \cdot 1)$ **0**

$c_{21} = (2 \cdot \frac{5}{6}) + (4 \cdot -\frac{2}{3}) + (-3 \cdot -\frac{1}{3})$ **0**

$c_{22} = (2 \cdot -\frac{1}{3}) + (4 \cdot \frac{2}{3}) + (-3 \cdot \frac{1}{3})$ **1**

$c_{23} = (2 \cdot -\frac{1}{2}) + (4 \cdot 1) + (-3 \cdot 1)$ **0**

$c_{31} = (0 \cdot \frac{5}{6}) + (-1 \cdot -\frac{2}{3}) + (2 \cdot -\frac{1}{3})$ **0**

$c_{32} = (0 \cdot -\frac{1}{3}) + (-1 \cdot \frac{2}{3}) + (2 \cdot \frac{1}{3})$ **0**

$c_{33} = (0 \cdot -\frac{1}{2}) + (-1 \cdot 1) + (2 \cdot 1)$ **1**

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γεωμετρική Ερμηνεία για 2D και 3D:

- Στον **2D χώρο**, η ορίζουσα ενός πίνακα 2×2 μπορεί να ερμηνευτεί ως το **εμβαδόν** του παραλληλόγραμμου που σχηματίζεται από τα δύο διανύσματα που περιγράφονται από τις στήλες του πίνακα.
- Στον **3D χώρο**, η ορίζουσα ενός πίνακα 3×3 ερμηνεύεται ως τον **όγκο** του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζεται από τα τρία διανύσματα που περιγράφονται από τις στήλες του πίνακα.

Παράδειγμα:

Για τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα είναι:

$$\det(A) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5$$

Αυτό σημαίνει ότι η ορίζουσα του πίνακα A είναι 5, και το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ έχει εμβαδόν 5.

Ασκήσεις

1. Έστω I ο $n \times n$ πίνακας μονάδα και A ένας $n \times r$ πίνακας. Βρείτε τον IA.

Ασκήσεις

2. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες ισχύει ότι $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$;

Ασκήσεις

3. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τους A^2, A^3. Γενικεύσετε για 4×4 πίνακες.

Ασκήσεις

4. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τους A^2, A^3.

Ασκήσεις

5. Έστω $R(\theta)$ ο πίνακας στροφής

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι

$$R(\theta)^2 = R(\theta)\,R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

Ασκήσεις

5. Έστω $R(\theta)$ ο πίνακας στροφής

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι ο *R(ϑ) έχει αντίστροφο και βρείτε τον*

Ασκήσεις

5. Έστω $R(\theta)$ ο πίνακας στροφής

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Αν το διάνυσμα $x = (1, 2)^T$ στραφεί κατά π/6, ποιές είναι οι νέες συντεταγμένες του;

Ασκήσεις

5. Έστω $R(\theta)$ ο πίνακας στροφής

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Για $x \in R^2$, έστω $y = R(\theta)\, x$. Δείξετε ότι $|y| = |x|$

Ασκήσεις

6. Έστω A ένας 4×4 πίνακας με στοιχεία a_{ij} (γράψτε τον!). Έστω U ένας από τους παρακάτω πίνακες. Βρείτε σε κάθε περίπτωση τους UA και AU.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Όμοια βρείτε σε κάθε περίπτωση τους EA και AE για E έναν από τους

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ασκήσεις

7. Αν A είναι ένας 3×3 πίνακας και $\lambda \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det A$.

Ασκήσεις

8. Βρείτε τον αντίστροφο του

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ασκήσεις

9. Αν

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δείξτε ότι ο $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος και ότι ο A ικανοποιεί την εξίσωση

$$A^3 - 2A^2 - A + 2I = O$$

Ασκήσεις

10. Αν $i = \sqrt{-1}$, δείξτε ότι οι πίνακες του $Pauli$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I$$

$$\sigma_j \sigma_k = i\sigma_l, \qquad j, k, l \ \text{κυκλικά.}$$

Ασκήσεις

11. Βρείτε τους αντίστροφους (αν υπάρχουν) των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ασκήσεις

12. Δείξετε ότι η ορίζουσα του γινομένου δύο 2×2 πινάκων ισούται με το γινόμενο των οριζουσών. Όπως θα δούμε στη Γραμμική Άλγεβρα, για δύο οποιουσδήποτε τετραγωνικούς πίνακες A και B ισχύει ότι, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.