Μαθηματικά ΙΙ

Υπεύθυνος Καθηγητής:
Γιάννης Ανδρουλιδάκης

3ο Μάθημα

Εαρινό Εξάμηνο 2024-2025

Εξίσωση επιπέδου

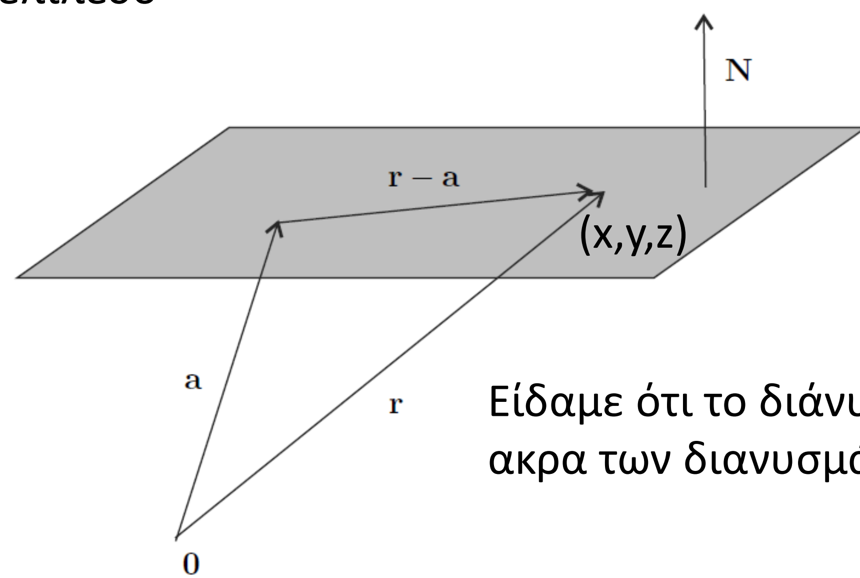
Η εξίσωση ευθείας στο επίπεδο είναι Ax + By + D = 0.

Γενικεύοντας, σε τρεις διαστάσεις, η εξίσωση Ax + By + Cz + D = 0 θα παριστάνει επίπεδο

‘Εστω N = (A,B,C) ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο (Γιατι συμβαίνει αυτό;)

r = (x, y, z) ανήκει στο επίπεδο

a = (a_1, a_2, a_3)



Είδαμε ότι το διάνυσμα που ενώνει τα δύο ακρα των διανυσμάτων **r** και **a** είναι **r-a**

Το διάνυσμα r – a είναι κάθετο στο N → (r – a) · N = 0 => r · N = a · N

Εξίσωση επιπέδου

Παράδειγμα 1

η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το σημείο (1, 0, 0) και είναι κάθετο στο i + j + k δίνεται από την εξίσωση x + y + z = 1.

Παράδειγμα 2.

Αν θεωρήσουμε το σύστημα συντεταγμένων των ωκεανογράφων (δηλαδή άξονας x′x κατά τη διεύθυνσηW-E, άξονας y′y κατά τη διεύθυνση S-N, άξονας z′z κατακόρυφος), περιγράψετε τα σύνολα (α) το σύνολο των $x \in R3$ με $z = 1$ και (β) W το σύνολο των $x \in R3$ που είναι κάθετα στο διάνυσμα $u = (1,−1, 0)$.

Διανυσματικές συναρτήσεις μιάς μεταβλητής (καμπύλες)

- Θεωρούμε ένα σωματίδιο που κινείται στο επίπεδο όπου έχουμε ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων.

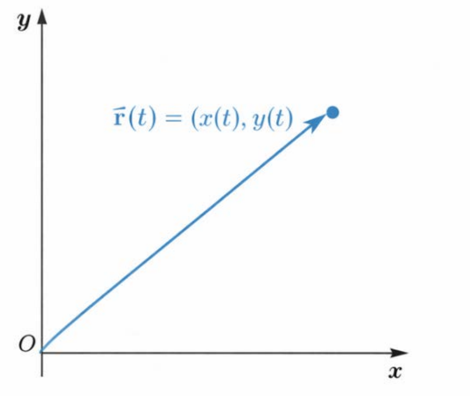
- Τη στιγμή t, έστω x(t) και y(t) οι απομακρύνσεις του σωματιδίου από την αρχή (0, 0) στους αντίστοιχους άξονες

- Το ζεύγος των συναρτήσεων (x(t), y(t)) αποτελεί την παραμετρική αναπαράσταση της τροχιάς του σωματιδίου.

- το διάνυσμα θέσης, **r**, του κινητού τη στιγμή t, θα γράφεται

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad \text{ή} \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \qquad t \in [t_1, t_2]$$

- Γενικώς συναρτήσεις του τύπου r : I → R^n όπου I είναι κάποιο διάστημα πραγματικών αριθμών και n = 2, 3 ονομάζονται **καμπύλες στο επίπεδο ή στον τριδιάστατο χώρο**.



Παράδειγμα 3. Αν $t \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ σταθερά διανύσματα, τότε $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ έχει ως εικόνα την ευθεία που περνά από το σημείο $\mathbf{a}$ και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}$.

r(*t*) = a + *t*v

Γεωμετρική ερμηνεία

Η εικόνα της $\mathbf{r}(t)$ αντιστοιχεί σε μια **ευθεία** στον τρισδιάστατο χώρο.

1. Το **σημείο $\mathbf{a}$** είναι το **σημείο εκκίνησης** της ευθείας.
2. Το **διάνυσμα $\mathbf{v}$** καθορίζει τη **διεύθυνση** της ευθείας.
3. Η παράμετρος t:
   - Όταν $t = 0$, η θέση είναι το σημείο $\mathbf{a}$.
   - Όταν $t > 0$, το σημείο βρίσκεται πάνω στην ευθεία προς τη διεύθυνση του $\mathbf{v}$.
   - Όταν $t < 0$, το σημείο κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση της $\mathbf{v}$.

Παράδειγμα 4. Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = a\cos t$ και $y(t) = a\sin t$ όπου $a > 0$ και $t \in [0, 2\pi]$, είναι παραμετρική παράσταση κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας a. (Υψώστε στο τετράγωνο και προσθέστε κατά μέλη για να πεισθείτε).

Η καμπύλη r(t)=(x(t),y(t)) όπου:

$$x(t) = a\cos t \quad \text{και} \quad y(t) = a\sin t,$$

περιγράφει έναν **κύκλο** με κέντρο στο $(0,0)$ και ακτίνα a.

Παράδειγμα 5. . Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = a\cos\omega t$ και $y(t) =$ $a\sin\omega t$ όπου a ... ου

κύκλου, αλλά τ... Η

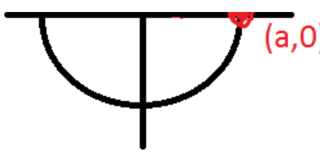
Πρώτο σημείο

$$\mathbf{r}_1(t) = \left(a\cos(\omega_1 t),\ a\sin(\omega_1 t)\right)$$

Το ω είναι η γων...
τον κύκλο. Ειδικ...
γωνία του διανύσ...

Δεύτερο σημείο

$$\mathbf{r}_2(t) = \left(a\cos(\omega_2 t),\ a\sin(\omega_2 t)\right)$$

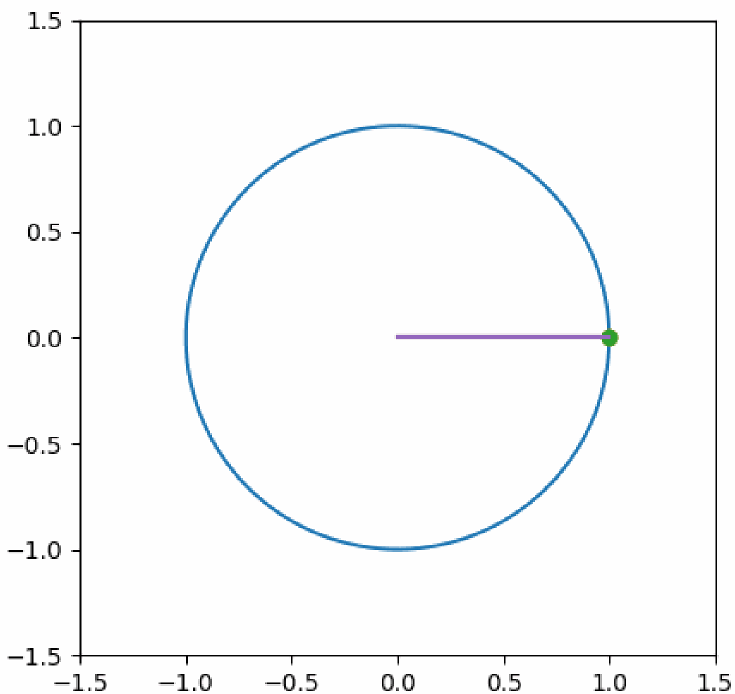


1. **Κίνηση γύρω από τ...**
   γύρω ... επιστρέφει
   στο ίδι...

2. **Γωνιακ...** ... ο σημείο
   διαγρά... ι το
   σημείο

ω (μονάδες rad/sec)

3. **Περίοδ...** ... άψει έναν
   πλήρη ... θέση μετά
   από αυ...

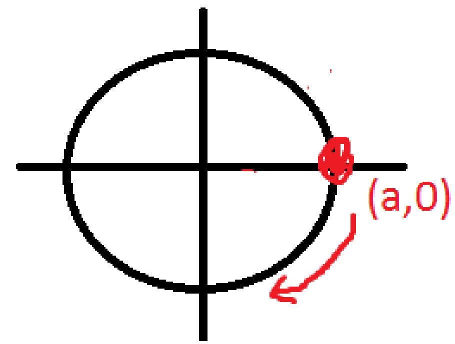


Επο... νω σε έναν κύκλο, αλλά με
διαφ... ιες παραμετρικές εξισώσεις με
διαφ... ρήγορα γύρω από τον κύκλο.

καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = a\cos(-\omega t) = a\cos\omega t$ και $y(t) = a\sin(-\omega t) = -a\sin\omega t$ όπου $a > 0$, $\omega > 0$ και $t \in [0, 2\pi/\omega]$, είναι παραμετρική παράσταση του ίδιου κύκλου

Ποια είναι η διαφορά με την προηγούμενη συνάρτηση;

Το σημείο κινείται ωρολογιακά.



t	x	y	σημείο
0	a	0	$(a, 0)$
$\pi/(2\omega)$	0	$-a$	$(0, -a)$
π/ω	$-a$	0	$(-a, 0)$

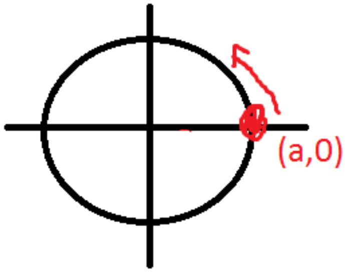
Για την αριστερόστροφη καμπύλη: $x(t) = a\cos(\omega t), \quad y(t) = a\sin(\omega t)$

Παράδειγμα:

Ας πάρουμε $a = 1$ και $\omega = 1$, και να υπολογίσουμε τις θέσεις του σημείου για διάφορες τιμές του χρόνου t για τις δύο περιπτώσεις.

Για την αριστερόστροφη καμπύλη:

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t)$$



Υπολογισμοί για συγκεκριμένες τιμές του t:

Για την αριστερόστροφη καμπύλη:

- Για $t = 0$:

$$x(0) = \cos(0) = 1, \quad y(0) = \sin(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{θέση: } (1, 0)$$

- Για $t = \frac{\pi}{2}$:

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{θέση: } (0, 1)$$

- Για $t = \pi$:

$$x(\pi) = \cos(\pi) = -1, \quad y(\pi) = \sin(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{θέση: } (-1, 0)$$

- Για $t = \frac{3\pi}{2}$:

$$x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{θέση: } (0, -1)$$

- Για $t = 2\pi$:

$$x(2\pi) = \cos(2\pi) = 1, \quad y(2\pi) = \sin(2\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{θέση: } (1, 0)$$

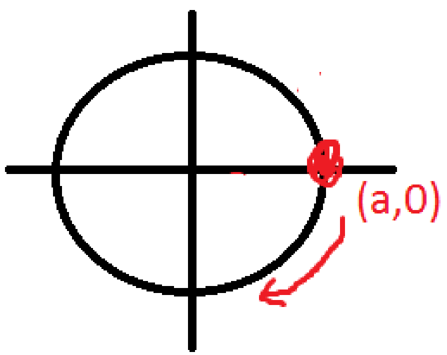
Για την δεξιόστροφη καμπύλη: $x(t) = a\cos(-\omega t), \quad y(t) = -a\sin(\omega t)$

Παράδειγμα:

Ας πάρουμε $a = 1$ και $\omega = 1$, και να υπολογίσουμε τις θέσεις του σημείου για διάφορες τιμές του χρόνου t για τις δύο περιπτώσεις.

Για την δεξιόστροφη καμπύλη:

$$x(t) = \cos(-t), \quad y(t) = -\sin(t)$$



Για την δεξιόστροφη καμπύλη:

- Για $t = 0$:

$$x(0) = \cos(0) = 1, \quad y(0) = -\sin(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{θέση: } (1, 0)$$

- Για $t = \frac{\pi}{2}$:

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{θέση: } (0, -1)$$

- Για $t = \pi$:

$$x(\pi) = \cos(\pi) = -1, \quad y(\pi) = -\sin(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{θέση: } (-1, 0)$$

- Για $t = \frac{3\pi}{2}$:

$$x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{θέση: } (0, 1)$$

- Για $t = 2\pi$:

$$x(2\pi) = \cos(2\pi) = 1, \quad y(2\pi) = -\sin(2\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{θέση: } (1, 0)$$

Διανυσματικές συναρτήσεις μιάς μεταβλητής (καμπύλες)

Παράδειγμα

διάνυσμα

$r(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \sin t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$ ή $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$

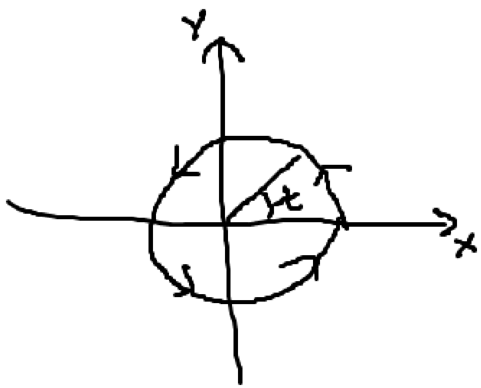
για κάθε t παίρνουμε ένα $\vec{r}$

όπου t είναι η μεταβλητή

(i) Κάθε σημείο στην καμπύλη οι συντεταγμένες είναι

$x = \cos t \quad y = \sin t \;\&\; z = t$

Ας το απλοποιήσουμε στο επίπεδο x, y για αρχή



Ξέρουμε $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \rightsquigarrow x^2 + y^2 = 1$

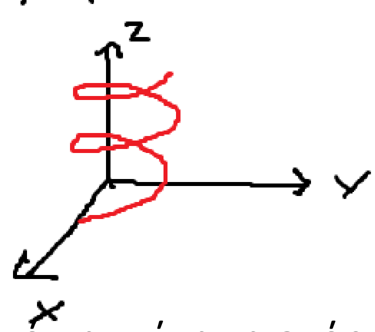
όσο αυξάνει το t έχουμε αντιωρολογιακή περιστροφή.

Επίσης επειδή t αυξάνει τότε z αυξάνει

$\Downarrow$

Και περιστρέφεται και "σηκώνεται" πάνω από το χαρτί

https://www.geogebra.org/calculator



Η έλικα είναι μια καμπύλη που προκυπτει από την κίνηση ενός σημείου με σταθερή ακτίνα γύρω από τον άξονα και με ταυτόχρονη προώθηση κατά μήκος του άξονα.

Ποιες από τις παρακάτω είναι διανυσματικές συναρτήσεις;

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ → διανυσματική συνάρτηση
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ → βαθμωτή (scalar) συνάρτηση

eg: $\bar{f}(t) = t^2 i + \sin t\, j$

δίνει διάνυσμα στο επίπεδο

eg. $\bar{f}(t) = \cos t\, i + \sin t\, j + t\, k$

δίνει διάνυσμα στο χώρο

eg. $f(t) = t^3 + t^2$

Διανυσματικές συναρτήσεις μιάς μεταβλητής (καμπύλες)

Αν απαλείψουμε τον χρόνο στην διανυσματική συνάρτηση του κύκλου που δείξαμε παραπάνω προκύπτει η η αλγεβρική αναπαράσταση του κύκλου,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου

Ωστόσο, ο ίδιος κύκλος μπορεί να περιγραφεί με πολλές **παραμετρικές αναπαραστάσεις**.

Παραδείγματα παραμετρικών αναπαραστάσεων: **r(t)=(x(t),y(t))=(Rcos(t),Rsin(t))**

1. Τυπική παραμετρική αναπαράσταση:

$$x(t) = r\cos(t), \quad y(t) = r\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Αυτή είναι η συνηθισμένη παραμετρική αναπαράσταση ενός κύκλου ακτίνας r.

2. Παραμετρική αναπαράσταση με διαφορετική γωνιακή ταχύτητα:

$$x(t) = r\cos(\omega t), \quad y(t) = r\sin(\omega t), \quad t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$$

Η γωνιακή ταχύτητα $\omega > 0$ μεταβάλλει τον ρυθμό με τον οποίο διατρέχεται ο κύκλος.

3. Αντίθετη φορά (δεξιόστροφη κίνηση):

$$x(t) = r\cos(-t), \quad y(t) = r\sin(-t)$$

ή ισοδύναμα:

$$x(t) = r\cos(t), \quad y(t) = -r\sin(t)$$

Αυτή η παραμετρική μορφή διατρέχει τον κύκλο σε αντίθετη κατεύθυνση (δεξιόστροφα).

4. Μετατόπιση κέντρου:

Εάν ο κύκλος έχει κέντρο στο σημείο (h, k):

$$x(t) = h + r\cos(t), \quad y(t) = k + r\sin(t)$$

https://www.geogebra.org/calculator

Συμπεραίνουμε ότι ενώ η αλγεβρική αναπαράσταση είναι μοναδική, μία καμπύλη μπορεί να έχει πολλές παραμετρικές αναπαραστάσεις

Διανυσματικές συναρτήσεις μιάς μεταβλητής (καμπύλες)

Τι παριστάνει η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (\cos t^2, \sin t^2)\ t \in [0, \sqrt{2\pi}]$;

Η παραμετρική καμπύλη που δίνεται από:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$$

παριστάνει μια **σπειροειδή καμπύλη** (spiral) στο επίπεδο, που περιστρέφεται γύρω από την αρχή των αξόνων με **μεταβαλλόμενη γωνιακή ταχύτητα.**

Ανάλυση:

1. **Γεωμετρική περιγραφή:**
   - Η καμπύλη έχει τη μορφή:
     $$x(t) = \cos(t^2), \quad y(t) = \sin(t^2)$$
   - Οι συναρτήσεις $\cos(t^2)$ και $\sin(t^2)$ εξασφαλίζουν ότι το σημείο $(x(t), y(t))$ κινείται στον κύκλο μονάδας (ακτίνα 1), καθώς ισχύει:
     $$x^2(t) + y^2(t) = \cos^2(t^2) + \sin^2(t^2) = 1$$ **Ταυτότητα**

     Άρα η καμπύλη κινείται πάνω στον κύκλο ακτίνας 1, αλλά με διαφορετική ταχύτητα περιστροφής.
2. **Μεταβαλλόμενη γωνιακή ταχύτητα:**
   - Σε αντίθεση με την κανονική παραμετρική περιγραφή του κύκλου $(\cos t, \sin t)$, όπου το σημείο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, εδώ η γωνιακή ταχύτητα είναι $\frac{d(\theta)}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt} = 2t$, δηλαδή **αυξάνεται γραμμικά** με το χρόνο.
   - Όσο αυξάνεται το t, η γωνία $\theta = t^2$ αυξάνεται πιο γρήγορα, και το σημείο περιστρέφεται όλο και πιο γρήγορα γύρω από την αρχή των αξόνων.

Σε ποια θέση βρίσκεται το σημείο στο t=0?

Ποια η διαφορά της με την συνάρτηση του κύκλου;

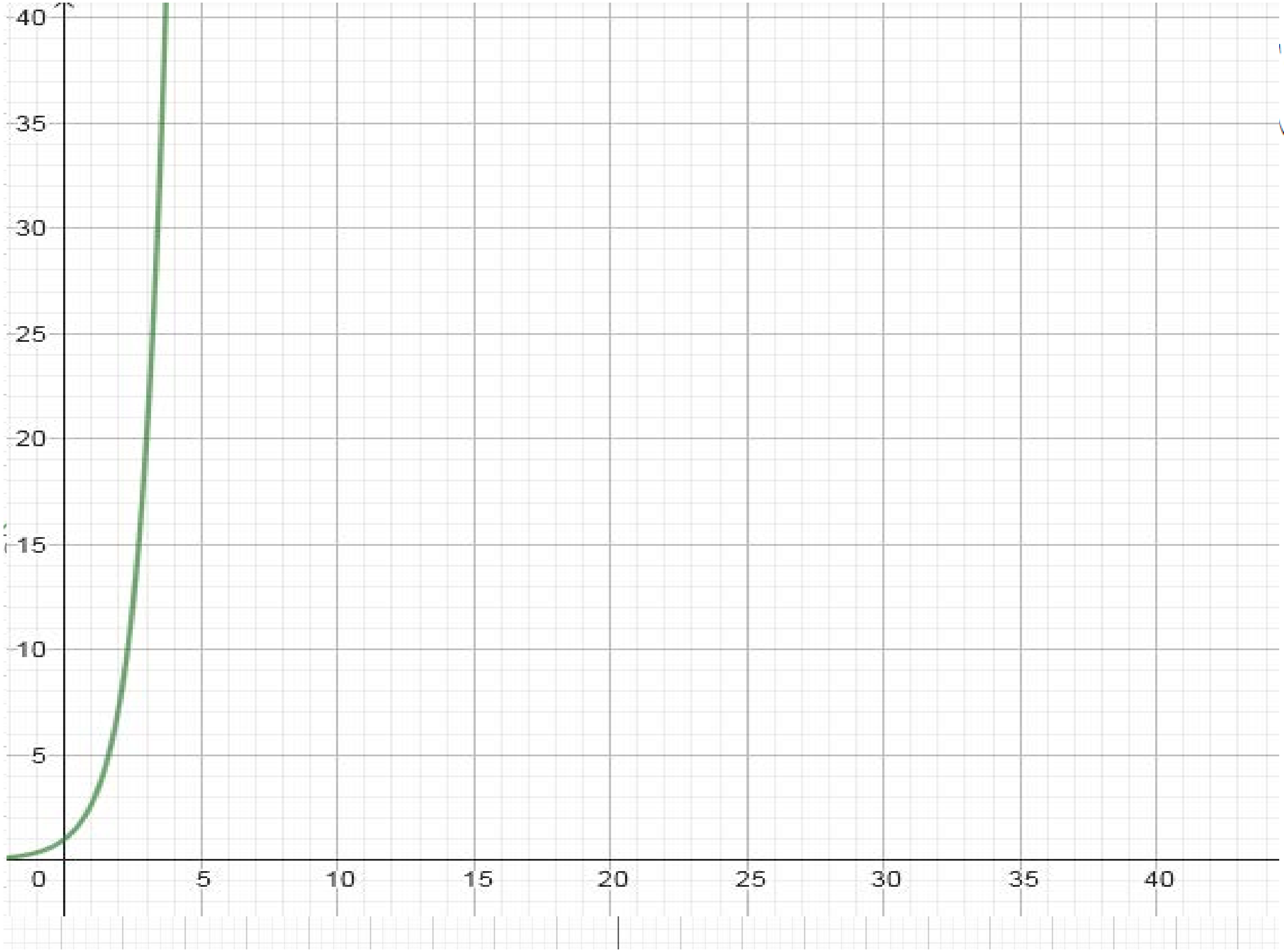
Και οι δύο ικανοποιούν:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$\theta = t$ $\qquad$ $\theta = t^2$

τρόπος που κινείται το σημείο πάνω στον κύκλο.

$\frac{d\theta}{dt} = 1$ $\qquad$ $\frac{d\theta}{dt} = 2t$



ο γράφημα της
αδή

$f(x)$:

- Γραμμή (αν $f(x) = ax + b$, ευθεία).
- Παραβολή (αν $f(x) = ax^2 + bx + c$).
- Εκθετική, λογαριθμική, ημιτονοειδής καμπύλη κ.λπ.

Παραδείγματα:

1. Αν $f(x) = x^2$, τότε η καμπύλη είναι η **παραβολή** $y = x^2$.
2. Αν $f(x) = \sin(x)$, το γράφημα είναι η **ημιτονοειδής καμπύλη**.
3. Αν $f(x) = e^x$, το γράφημα είναι μια **εκθετική καμπύλη**.

Παράδειγμα 7. Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = (v_0 \cos\theta)\, t$ και $y(t) = (v_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2$ όπου $v_0, g > 0$ και $\theta \in [0, \pi/2]$, είναι παραμετρική αναπαράσταση της τροχιάς βλήματος που βάλλεται υπό γωνία ως προς τον ορίζοντα. Απαλείφοντας το χρόνο από τις $x(t)$ και $y(t)$ προκύπτει η αλγεβρική αναπαράσταση της τροχιάς

$$y = \tan\theta\, x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2,$$

που είναι παραβολή.

Τροχιά σε συνάρτηση του x:

Για να βρούμε τη **σχέση y ως συνάρτηση του x**, μπορούμε να εξαλείψουμε τον χρόνο t:

$$x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t \longrightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

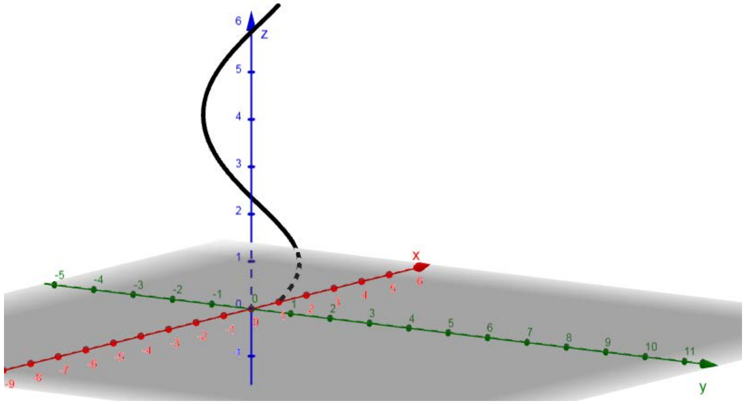
Υποκαθιστούμε στο $y(t)$:

$$y = \cancel{v_0} \sin\theta \cdot \frac{x}{\cancel{v_0} \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2 \xrightarrow[\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta]{} y = x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}$$

Παράδειγμα 8. Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (a\cos\omega t, a\sin\omega t, vt)$, όπου $a, v, \omega > 0$, $t \in [0, 6\pi/\omega]$ είναι παραμετρική αναπαράσταση έλικας με σταθερό βήμα $2\pi v/\omega$.

Προηγουμένως είδαμε την συνάρτηση της έλικας: r(t)= (cost, sint, t)

Ποια η διαφορά μεταξύ των 2 καμπυλών;



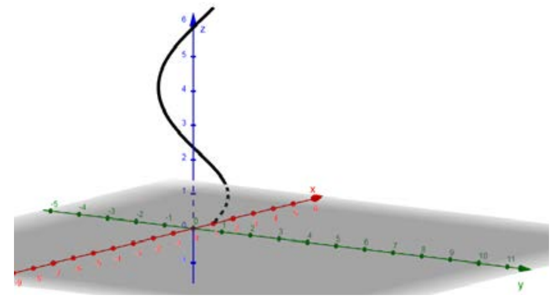
Οι δύο καμπύλες $\mathbf{r}_1(t) = (a\cos(\omega t), a\sin(\omega t), vt)$ και $\mathbf{r}_2(t) = (\cos t, \sin t, t)$ είναι παραμετρικές αναπαραστάσεις **ελίκων** στον τρισδιάστατο χώρο, αλλά έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά λόγω των διαφορετικών παραμέτρων τους.

Εντοπίζονται 4 διαφορές μεταξύ των 2 συναρτήσεων

- **Στην ακτίνα**
- **Στην γωνιακή ταχύτητα**
- **Στην κίνηση στον άξονα z**
- **Στο βήμα της έλικας**

$$\mathbf{r}_1(t) = (a\cos(\omega t), a\sin(\omega t), vt) \qquad \mathbf{r}_2(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

Διαφορές:



1. **Ακτίνα της έλικας:**
   - $\mathbf{r}_1(t)$: Η έλικα έχει ακτίνα a στο επίπεδο xy, καθώς το σημείο $(a\cos(\omega t), a\sin(\omega t))$ παραμένει σε απόσταση a από τον z-άξονα.
   - $\mathbf{r}_2(t)$: Η έλικα έχει σταθερή ακτίνα 1, αφού το σημείο $(\cos t, \sin t)$ βρίσκεται πάνω στον κύκλο μονάδας στο επίπεδο xy.
2. **Γωνιακή ταχύτητα:**
   - $\mathbf{r}_1(t)$: Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από τον z-άξονα είναι ω, δηλαδή το σημείο κάνει μία πλήρη περιστροφή σε χρόνο $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$.
   - $\mathbf{r}_2(t)$: Η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με 1 (μια πλήρης περιστροφή ολοκληρώνεται σε χρόνο $T_2 = 2\pi$).
3. **Γραμμική κίνηση στον z-άξονα:**
   - $\mathbf{r}_1(t)$: Το z-συστατικό αυξάνεται γραμμικά με ρυθμό v, δηλαδή $z(t) = vt$. Η ταχύτητα ανόδου είναι v.
   - $\mathbf{r}_2(t)$: Το z-συστατικό είναι ίσο με t, δηλαδή το σημείο κινείται στον z-άξονα με ταχύτητα 1.
4. **Βήμα της έλικας:**

Το **βήμα της έλικας** είναι το ύψος που διανύει το σημείο στον άξονα z κατά τη διάρκεια μιας πλήρους περιστροφής γύρω από τον άξονα z. Σε μία περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, το z-συστατικό αυξάνεται κατά:

$$\Delta z = vT = v \cdot \frac{2\pi}{\omega}$$

Άρα το **βήμα** της έλικας είναι:

$$\text{Βήμα} = \frac{2\pi v}{\omega}$$

- $\mathbf{r}_2(t)$: Το βήμα της έλικας είναι:

$$\text{Βήμα}_2 = 2\pi$$

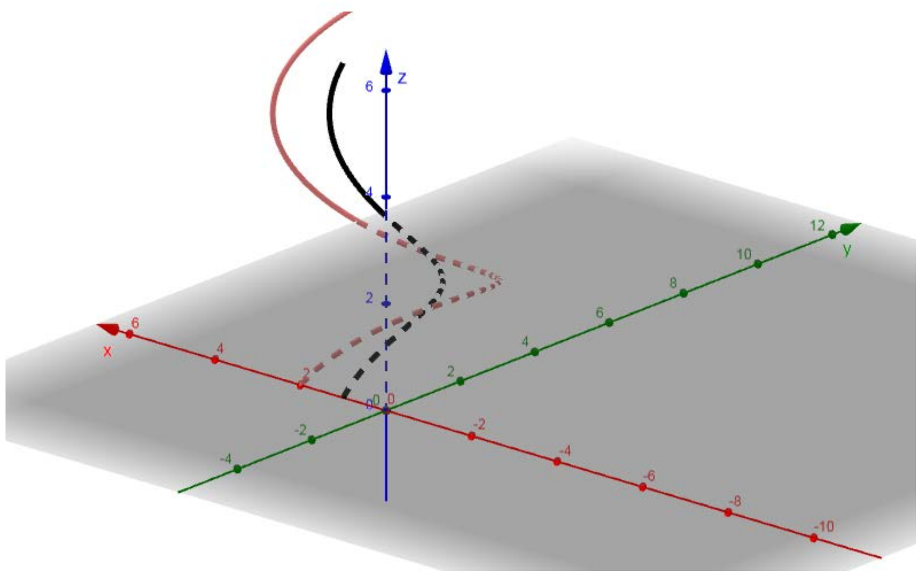
καθώς για κάθε πλήρη περιστροφή ($T_2 = 2\pi$), το z-συστατικό αυξάνεται κατά 2π.

Παράδειγμα 9. Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (a\cos\omega t, a\sin\omega t, vt)$, όπου $a, v, \omega > 0$, $t \in [0, 6\pi/\omega]$ είναι παραμετρική αναπαράσταση έλικας με σταθερό βήμα $2\pi v/\omega$.

Προηγουμένως είδαμε την συνάρτηση της έλικας: r(t)= (cost, sint, t)
Ποια η διαφορά μεταξύ των 2 καμπυλών;

Συμπέρασμα:

- Η $\mathbf{r}_1(t)$ περιγράφει μια **έλικα** με ακτίνα a, μεταβλητή γωνιακή ταχύτητα ω, και γραμμική κίνηση στον z-άξονα με ταχύτητα v.
- Η $\mathbf{r}_2(t)$ περιγράφει μια **έλικα μονάδας** (ακτίνα 1), με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 1, και γραμμική κίνηση στον z-άξονα με ταχύτητα 1.



Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

Η παράγωγος ή ταχύτητα μιας διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ορίζεται ως η παράγωγος της κάθε συνιστώσας της συνάρτησης ως προς το χρόνο t.

Αν η συνάρτηση είναι $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, η παράγωγός της $\mathbf{r}'(t)$ δίνεται από:

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$$

Η παράγωγος $\mathbf{r}'(t)$ αντιπροσωπεύει την ταχύτητα του σωματιδίου που ακολουθεί την τροχιά που περιγράφεται από τη συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$. Πιο συγκεκριμένα:

- Το μέτρο της ταχύτητας (scalar speed) υπολογίζεται ως:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}$$

- Το διάνυσμα ταχύτητας $\mathbf{v}(t)$ δίνει κατεύθυνση και μέτρο, ενώ το μέτρο της ταχύτητας δείχνει το πόσο γρήγορα κινείται το σωματίδιο στη διαδρομή του.

Η παράγωγος μιας διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$ ορίζεται μέσω του ορίου:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Η διαφορά $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$:

Αυτό το διάνυσμα εκφράζει την αλλαγή στη θέση του σωματιδίου κατά το χρονικό διάστημα Δt.

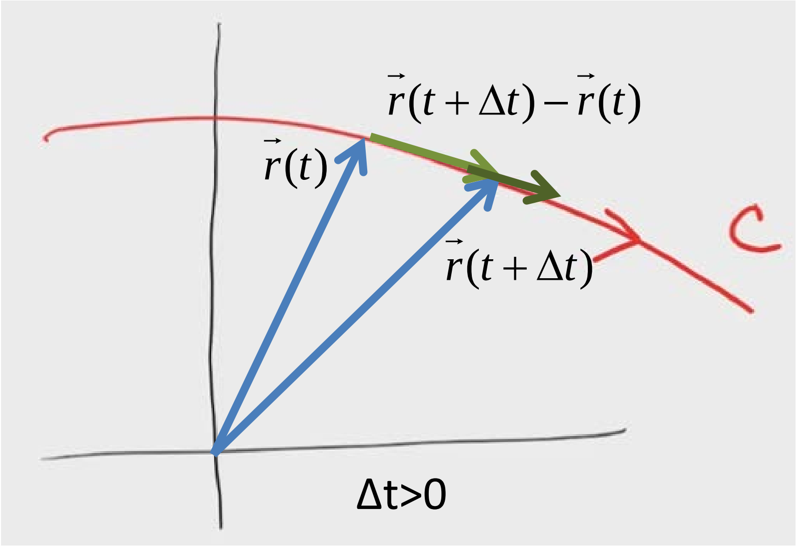
Αντιπροσωπεύει την στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου

Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

Παράγωγος ή ταχύτητα μιας διανυσματικής συνάρτησης r(t) = (x(t), y(t), z(t)) στο σημείο t είναι το διάνυσμα:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Γεωμετρική εξήγηση



Σχεδιάζουμε μια καμπύλη C

Εχουμε το διάνυσμα r(t) από την αρχή των αξόνων

Θεωρούμε την μεταβολή Δt>0

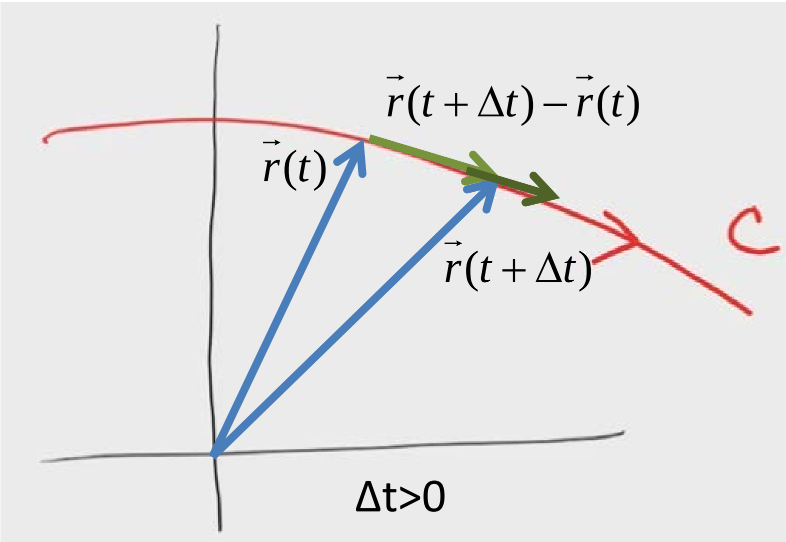
Σχεδιάζουμε το διάνυσμα r(t+Δt) όπου το τέλος του βρίσκεται επίσης πάνω στην καμπύλη και επειδη Δt>0 είναι λιγο «πιο κάτω» από το αρχικό.

Αν αφαιρέσουμε τα 2 διανύσματα έχουμε ένα διάνυσμα που ξεκινάει από το τέλος του ενός και καταλήγει στο τέλος του άλλου

Αν διαιρέσω το νέο διάνυσμα με το Δt ή πολ/σω με το 1/Δt παίρνω ένα πολλαπλάσιο του διανύσματος που έχει την ίδια κατεύθυνση (επειδή Δt>0) αλλά μπορεί να είναι μικρότερο/μεγαλύτερο ανάλογα με την τιμή του Δt. $\longrightarrow \dfrac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$

Αν πάρω το όριο (lim) του Δt που προσεγγίζει το 0 τότε το δεύτερο διάνυσμα r(t+Δt) πλησιάζει στο αρχικό r(t), αρα η διαφορά θα είναι ένα συνεχώς μικρότερο διάνυσμα.

Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης



$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}\,(t+\Delta t) - \mathbf{r}\,(t)}{\Delta t}$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται ως επιτάχυνση η δεύτερη παράγωγος

$$\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r}/dt^2 = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$$

Η οποία είναι ένα διάνυσμα πάλι εφαπτόμενο στην καμπύλη

- Λαμβάνουμε ένα διάνυσμα εφαπτόμενο στην C που ξεκινάει από το τελικό σημείο του **r**(t).

Οπότε όταν C είναι η καμπύλη κίνησης ενός αντικειμένου:

- Το διάνυσμα r(t) δίνει την θέση του αντικειμένου στον χρόνο t

- Το διάνυσμα **dr/dt** = **v** (t) = ταχύτητα του στον χρόνο t, που η ουρά του βρίσκεται πάνω στην καμπύλη

- Το μέγεθος του διανύσματος της ταχύτητας (speed) $|\vec{v}(t)|$ και είναι βαθμωτή ποσότητα

- Ευκολα προκύπτει ότι οι πραγματικές συναρτήσεις x(t), y(t), z(t) είναι παραγωγίσιμες και ισχύει

$$\dot{\mathbf{r}}\,(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

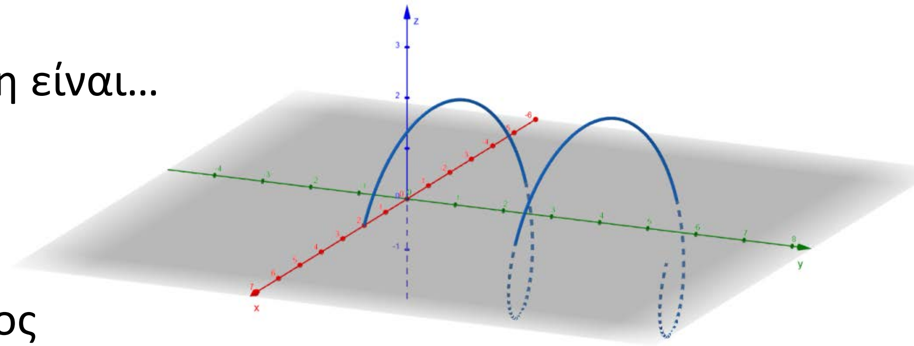
Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

Ασκήση: Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση της συνάρτησης

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos(2t)\ \mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + 2\sin(2t)\ \mathbf{k}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos(2t) \\ y &= t \\ z &= 2\sin(2t) \end{aligned}\right\}$$

Οι τρεις αυτές εξισώσεις εκφράζουν τις x,y,x συντεταγμένες των σημείων στην καμπύλη (**GeoGebra**)



Μπορούμε να φανταστούμε τι είδους καμπύλη είναι…

$$\begin{aligned} x &= 2\cos(2t) \\ y &= t \\ z &= 2\sin(2t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{x}{2} &= \cos(2t) \\ \frac{z}{2} &= \sin(2t) \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 &= 1 \\ x^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

Κυκλικός κύλινδρος

Ενώ στην διάσταση y έχουμε την αυξητική εξίσωση t που αυξάνει με σταθερό ρυθμό → μας λέει πως η καμπύλη «απλώνεται» στον κύλινδρο

Ας υπολογίσουμε τώρα την ταχύτητα και την επιτάχυνση:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \longrightarrow \vec{v}(t) = (-4\sin(2t), 1, 4\cos(2t))$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r}/dt^2 = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \longrightarrow \vec{a}(t) = (-8\cos(2t), 0, -8\sin(2t))$$

Άσκηση για το σπίτι: βάζοντας διαφορετικά t (π.χ. 0, π/4, π/2, 3π/4, π) σχεδιάστε σε σύστημα xyz αξόνων την καμπύλη και βρείτε τα r, v, α στην χρονική στιγμή π/4

Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

Ασκήση: Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση της συνάρτησης

r(t) = (cos t, sin t, t), t ∈ R

Για να βρούμε το διανυσμα της ταχύτητας $\mathbf{v}(t)$, υπολογίζουμε την παράγωγο της $\mathbf{r}(t)$ ως προς t:

Υπολογισμός:

Η παράγωγος υπολογίζεται συνιστώσα προς συνιστώσα:

1. **Πρώτη συνιστώσα** $(\cos(t))$:

$$\frac{d}{dt}[\cos(t)] = -\sin(t)$$

2. **Δεύτερη συνιστώσα** $(\sin(t))$:

$$\frac{d}{dt}[\sin(t)] = \cos(t)$$

3. **Τρίτη συνιστώσα** (t):

$$\frac{d}{dt}[t] = 1$$

Διανυσμα της Ταχύτητας:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = (\underset{\upsilon_x}{-\sin(t)}, \underset{\upsilon_y}{\cos(t)}, \underset{\upsilon_z}{1})$$

Για να βρούμε το **μέτρο της ταχύτητας** $\mathbf{v}(t)$, χρησιμοποιούμε τον τύπο για το μέτρο ενός διανύσματος:

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \Longrightarrow |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (1)^2}$$

(Εδώ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$)

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2}$$

Άσκηση για το σπίτι: ποιο είναι το διάνυσμα και το μέγεθος (μέτρο) της επιτάχυνσης α?

Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

Ασκήση: Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση της συνάρτησης

$$\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\ \mathbf{i} + a\sin\omega t\ \mathbf{j}, \qquad a, \omega > 0.$$

Η ταχύτητα θα είναι λοιπόν

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}\,(t) = -\omega a\sin\omega t\ \mathbf{i} + \omega a\cos\omega t\ \mathbf{j}.}$$

Διάνυσμα ταχύτητας

Το μέτρο της είναι $\longrightarrow$ $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Όπου:

$$v_x = -a\omega\sin(\omega t), \quad v_y = a\omega\cos(\omega t)$$

Υπολογίζουμε το άθροισμα:

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(-a\omega\sin(\omega t))^2 + (a\omega\cos(\omega t))^2}$$

1. Υπολογίζουμε τα τετράγωνα:

$$(-a\omega\sin(\omega t))^2 = (a\omega)^2\sin^2(\omega t)$$

$$(a\omega\cos(\omega t))^2 = (a\omega)^2\cos^2(\omega t)$$

2. Άθροισμα:

$$(a\omega)^2\sin^2(\omega t) + (a\omega)^2\cos^2(\omega t) = (a\omega)^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))$$

3. Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$:

$$\boxed{|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(a\omega)^2 \cdot 1} = a\omega}$$

Μέτρο ταχύτητας

Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

Ασκήσεις (συνέχεια από το προηγούμενο) → θελουμε να δουμε την σχέση των διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας

Δύο διανύσματα είναι κάθετα αν το **εσωτερικό τους γινόμενο** είναι μηδέν:

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$$

$$\mathbf{r}(t) = a\cos(\omega t)\mathbf{i} + a\sin(\omega t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}(t) = -a\omega\sin(\omega t)\mathbf{i} + a\omega\cos(\omega t)\mathbf{j}$$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = (a\cos(\omega t))\,(-a\omega\sin(\omega t)) + (a\sin(\omega t))\,(a\omega\cos(\omega t))$$

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = -a^2\omega\,\cancel{\cos(\omega t)\sin(\omega t)} + a^2\omega\,\cancel{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}$$

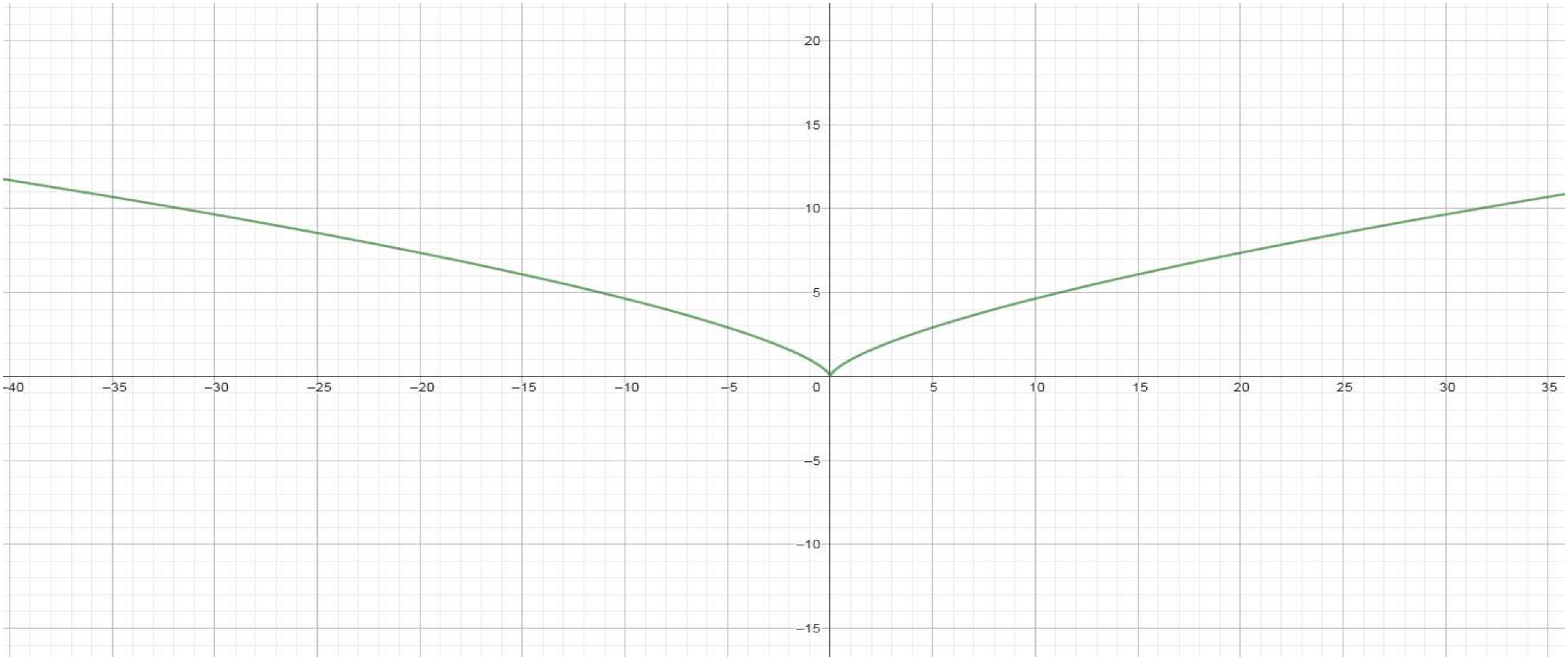
$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$$

Το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν, άρα το διάνυσμα της ταχύτητας $\mathbf{v}(t)$ είναι **κάθετο** στο διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή.

Αυτό σημαίνει ότι το αντικείμενο κινείται σε **κυκλική τροχιά** με σταθερό μέτρο ταχύτητας και η ταχύτητα είναι πάντα εφαπτομένη στην τροχιά, ενώ το διάνυσμα θέσης δείχνει προς το κέντρο της τροχιάς.

Η επιτάχυνση $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 a\cos\omega t\ \mathbf{i} - \omega^2 a\sin\omega t\ \mathbf{j} = -\omega^2\mathbf{r}(t)$

Η έννοια της «λείας καμπύλης»



Αντίθετα:

Η καμπύλη

$$x(t) = t^3, \quad y(t) = t^3, \quad t \in \mathbb{R}$$

έχει ταχύτητα $(3t^2, 3t^2)$, η οποία μηδενίζεται στο $t = 0$. Επομένως, δεν είναι λεία με βάση τον παραπάνω ορισμό.

Ιδιότητα Leibnitz

- Ο τύπος εκφράζει ότι η χρονική παράγωγος του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων είναι το άθροισμα:
  1. του εσωτερικού γινομένου της παραγώγου του $\mathbf{r}$ με το $\mathbf{p}$,
  2. και του εσωτερικού γινομένου του $\mathbf{r}$ με την παράγωγο του $\mathbf{p}$.

- Ο τύπος εκφράζει ότι η χρονική παράγωγος του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων είναι το άθροισμα:
  1. του εξωτερικού γινομένου της παραγώγου του $\mathbf{r}$ με το $\mathbf{p}$,
  2. και του εξωτερικού γινομένου του $\mathbf{r}$ με την παράγωγο του $\mathbf{p}$.

1. Απόδειξη → έστω $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$

Ορισμός του εσωτερικού γινομένου → Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\mathbf{r}$ και $\mathbf{p}$ δίνεται από:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = r_1 p_1 + r_2 p_2 + r_3 p_3$$

Παράγωγος ως προς τον χρόνο → Παίρνουμε τη χρονική παράγωγο του εσωτερικού γινομένου:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = \frac{d}{dt}(r_1 p_1 + r_2 p_2 + r_3 p_3)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = \frac{d}{dt}(r_1 p_1) + \frac{d}{dt}(r_2 p_2) + \frac{d}{dt}(r_3 p_3)$$

Παράγωγος γινομένου κάθε όρου

$$\frac{dr_1}{dt} p_1 + r_1 \frac{dp_1}{dt} \qquad \frac{dr_2}{dt} p_2 + r_2 \frac{dp_2}{dt} \qquad \frac{dr_3}{dt} p_3 + r_3 \frac{dp_3}{dt}$$

$$\dot{r}_1 p_1 + r_1 \dot{p}_1 \qquad \dot{r}_2 p_2 + r_2 \dot{p}_2 \qquad \dot{r}_3 p_3 + r_3 \dot{p}_3$$

$$(\dot{r}_1 p_1 + r_1 \dot{p}_1) + (\dot{r}_2 p_2 + r_2 \dot{p}_2) + (\dot{r}_3 p_3 + r_3 \dot{p}_3)$$

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} \qquad \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}$$

Ιδιότητα Leibnitz → Νόμος του Νεύτωνα → Ρυθμός μεταβολής Στροφορμής

Η **ορμή** $\mathbf{p}$ ορίζεται ως:

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}},$$

όπου m είναι η μάζα (υποτίθεται σταθερή), και $\dot{\mathbf{r}}$ είναι η ταχύτητα.

Η στροφορμή ενός σωματιδίου ως προς κάποιο σημείο ορίζεται ως:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

όπου:

- $\mathbf{r}$: Διάνυσμα θέσης του σωματιδίου.
- $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$: Ορμή του σωματιδίου ($m$ είναι η μάζα και $\dot{\mathbf{r}}$ η ταχύτητα).

Η χρονική παράγωγος της στροφορμής είναι:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}).$$

Χρησιμοποιώντας τον **κανόνα Leibniz** για την παράγωγο ενός γινομένου δύο διανυσμάτων, έχουμε:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$$

2ο νόμος Νευτωνα

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} \times (m\dot{\mathbf{r}})$$

Επειδή το διάνυσμα $\dot{\mathbf{r}}$ είναι παράλληλο προς τον εαυτό του, το διανυσματικό γινόμενο $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}$ είναι μηδέν:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = 0.$$

$$\mathbf{F} = \dot{\mathrm{p}}$$

Άρα το 2ο όρος γινεται

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Συμπέρασμα

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής δίνεται από:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Ιδιότητα Leibnitz → Στροφορμή ενός υλικού σημείο στο πεδίο βαρύτητας

Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης γράφεται $\mathbf{F}(x,y,z) = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3}$

M και m είναι οι μάζες π.χ. του ήλιου και κάποιου πλανήτη και G η παγκόσμια σταθερα της βαρύτητας (≈$6.674\times10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$)

Ορίζεται η αρχή των αξόνων (0,0,0) στον ήλιο.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ είναι το διάνυσμα θέσης του πλανήτη τη στιγμή t

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Επομένως παίρνοντας τη norm στον παραπάνω τύπο θα έχουμε το γνωστό νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου:

$$|\mathbf{F}| = GMm\frac{|\mathbf{r}|}{r^3} = \frac{GMm}{r^2}$$

Άρα $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r}\times\left(-\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\right)$

$$\Downarrow$$

L=σταθερό $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Leftarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{r}})$

Αλλά το διάνυσμα $\mathbf{r}$ είναι παράλληλο με το $\hat{\mathbf{r}}$, άρα το διανυσματικό γινόμενο $\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{r}}$ είναι μηδέν:

Αυτό σημαίνει ότι η στροφορμή του υλικού σημείου που κινείται στο πεδίο βαρύτητας μιας σημειακής μάζας διατηρείται σταθερή

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

1. Βρείτε παραμετρικές αναπαραστάσεις $\mathbf{r}(t)$ των παρακάτω καμπυλών: ευθεία που περνά από τα σημεία $(1, 1, 1)$ και $(2, 3, 2)$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x\}$, έλικα ακτίνας 2 και βήματος $1/3$.

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

2. Δυο διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ του επιπέδου ορίζονται με πολικές συντεταγμένες ως (θ_1, r_1) και (θ_2, r_2). Αν το $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$ ορίζεται ως (θ, r), πως συνδέονται τα (θ, r) με τα $(\theta_1, r_1), (\theta_1, r_1)$;

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

3. Γράψτε την εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο $(0,1,2)$ και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}=(1,1,3)$.

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

4. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ και $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη:

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

5. Αν $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ και $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, τότε ένα τουλάχιστον από τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι μηδέν

Απόδειξη:

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

6. Έστω $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$ και $\mathbf{b} = (3, 4, -1)$. Βρείτε διάνυσμα $\mathbf{c}$ ώστε $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}$

7. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ και αντίστροφα.

8. Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα $(1,1,1)$ και $(2,3,-1)$

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

9. Βρείτε δυο κάθετα διανύσματα και κάθετα στο $(2, 3, -1)$

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

10. Αποδείξτε την ταυτότητα $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

11. Ένα επίπεδο έχει εξίσωση $x + 2y - 2z + 7 = 0$. Βρείτε: α) ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα β) τα σημεία τομής με τους άξονες γ) την απόσταση του επιπέδου από την αρχή δ) τις συντεταγμένες του σημείου του επιπέδου που έχει την ελάχιστη απόσταση από τη αρχή.

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

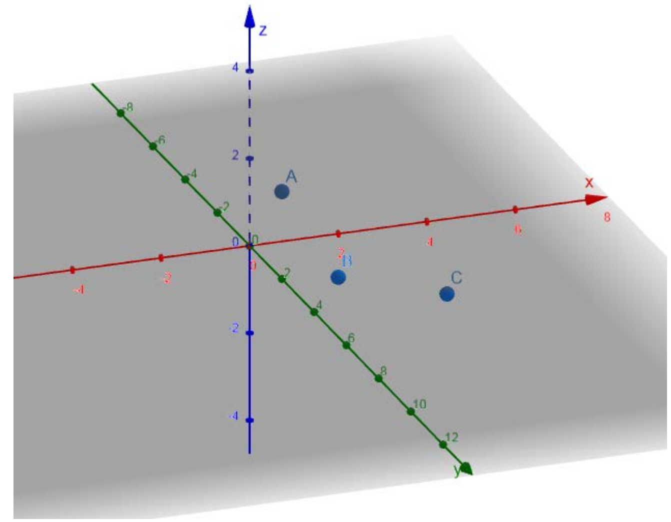
12. Υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημειο $\mathbf{a}$ και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u}$ γράφεται $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u} + \mathbf{a}$. Δείξτε ότι αυτή μπορεί εν γένει να γραφεί ως

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \tag{1.4.1}$$

Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημειο $(1, 1, 1)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο με εξίσωση $4x - 3y + z = 5$.

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

13. Βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που περνά από τα σημεία $(0, 2, 2)$, $(2, 0, -1)$ και $(3, 4, 0)$.



Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

14. Βρείτε τη διανυσματική ταχύτητα και το μέτρο της στις παρακάτω καμπύλες

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(t) = (a\cos t, b\sin t, 0), \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{u} + \mathbf{a},$$

όπου a, b σταθερές και $\mathbf{u}, \mathbf{a}$ σταθερά διανύσματα.

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

15. Δείξτε ότι η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = \cosh t\ \mathbf{i} + \sinh t\ \mathbf{j}$, $t \in [-2, 2]$ παριστά υπερβολή. Βρείτε την ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}(t)$ τις στιγμές $t = 0, 1$. Κάνετε σκίτσο της τροχιάς.

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

16. Υπολογίστε τα μήκη των καμπυλών

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \left(2\cos t, 2\sin t, \sqrt{3}t\right), \quad t \in [0, 3\pi], \\
\mathbf{r}(t) &= (t - \sin t, 1 - \cos t, 0), \quad t \in [0, 2\pi].
\end{aligned}
$$

Υπόμνηση:

$$
l(\mathbf{r}) = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt.
$$

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

17. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

    (α) Σε μία καμπύλη το διάνυσμα της ταχύτητας $\dot{\mathbf{r}}(t)$ είναι πάντα κάθετο στο διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)$.

    (β) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων του τριδιάστατου Ευκλείδιου χώρου είναι μή αρνητικός αριθμός.

Ασκήσεις - Παράγωγος ή Ταχύτητα Διανυσματικής Συνάρτησης

(γ) Αν $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, τότε τουλάχιστον ένα από τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

(δ) Αν $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$, τότε ένα από τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των δύο άλλων.