Μαθηματικά ΙΙ

Υπεύθυνος Καθηγητής:
Γιάννης Ανδρουλιδάκης

2ο Μάθημα

Εαρινό Εξάμηνο 2025-2026

Εξωτερικό Γινόμενο

Το *εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο* δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, ορίζεται ως

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{k},$$

ή συμβολικά

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Αυτή δεν είναι αριθμητική ορίζουσα. Είναι συμβολικός τρόπος γραφής που σημαίνει ανάπτυξη ως προς την 1η γραμμή.

Παράδειγμα 1

$\mathbf{u} = (1, -2, 0)$ και $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$

Εξωτερικό Γινόμενο

Προτού προχωρήσουμε στον ορισμό και τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου, θα πρεπει να γίνει απολυτα σαφές ότι το εξωτερικό γινόμενο ορίζεται μόνο σε τρισδιάστατο διανυσματικό χώρο R^3.

Ορισμός : Έστω $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ μια θετικά προσανατολισμένη βάση ενός τρισδιάστατου δ.χ. Εάν $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ δύο διανύσματα του χώρου αυτού, τότε ονομάζουμε εξωτερικό γινόμενο των a,b και συμβολίζουμε με $\overline{a} \times \overline{b}$ το διάνυσμα :

$$\overline{a} \times \overline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_1)\overline{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\overline{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\overline{e}_3$$

Διανύσματα βάσης του χώρου

Ο προηγούμενος τύπος δεν είναι τίποτα άλλο από την ορίζουσα αρκεί να την αναπτύσσουμε πάντα ως προς την 1η γραμμή.

$$\begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Συντεταγμένες των διανυσμάτων α και b

Η **κανονική (ή καρτεσιανή) βάση** είναι:

$$\boxed{\mathbf{i} = (1,0,0), \quad \mathbf{j} = (0,1,0), \quad \mathbf{k} = (0,0,1)}$$

Γιατί λέγονται “βάση”; Γιατί κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ γράφεται μοναδικά ως:

$\boxed{\mathbf{v} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}$ με $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Οι αριθμοί x,y,z λέγονται συντεταγμένες του **v** στη βάση (i,j,k)

Εφόσον τα διανύσματα βάσης είναι τα μοναδιαία διανύσματα i, j, k τότε έχουμε:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{k},$$

ή συμβολικά

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων a και b.

Απόδειξη

Το μήκος του διανύσματος $\mathbf{u}$ είναι $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

Συνεπώς, το τετράγωνο του μέτρου είναι:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2.$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = \underbrace{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}_{|\mathbf{a}|^2}\underbrace{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}_{|\mathbf{b}|^2} - \underbrace{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2}_{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2} = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2\theta$$

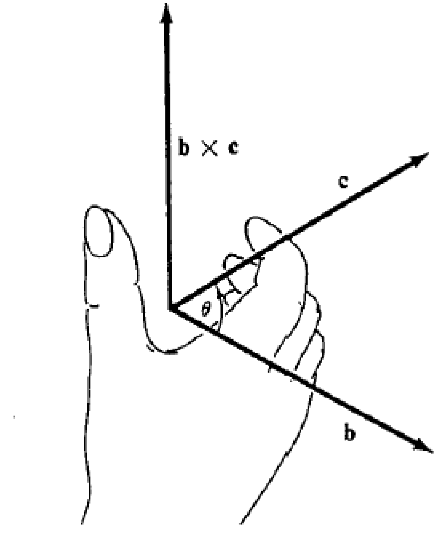
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta.$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta,$$

Παράδειγμα 2

$\mathbf{u} = (1, -2, 0)$ και $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$

Να υπολογιστεί το μέτρο.



Εξωτερικό Γινόμενο

Από τον ορισμό προκύπτουν αμέσως οι ακόλουθες ιδιότητες. Χρησιμοποιούμε τα διανύσματα **a, b, c** και **λ, μ** πραγματικούς αριθμούς).

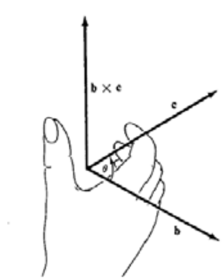
$$(1) \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Απόδειξη

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{i}(b_2a_3 - b_3a_2) - \mathbf{j}(b_1a_3 - b_3a_1) + \mathbf{k}(b_1a_2 - b_2a_1)$$

Γεωμετρική Ερμηνεία



Το διανυσματικό γινόμενο $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

- Παράγει ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$,
- Ακολουθεί τον **κανόνα του δεξιού χεριού** για την κατεύθυνσή του.

Αν αντιστρέψουμε τη σειρά ($\mathbf{b} \times \mathbf{a}$), το νέο διάνυσμα είναι ίσο σε μέτρο, αλλά δείχνει προς την αντίθετη κατεύθυνση, εξηγώντας γιατί ισχύει:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Εξωτερικό Γινόμενο

Από τον ορισμό προκύπτουν αμέσως οι ακόλουθες ιδιότητες. Χρησιμοποιούμε τα διανύσματα **a, b, c** και **λ, μ** πραγματικούς αριθμούς).

$$(2) \qquad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

Απόδειξη

Αναλύουμε τα δύο μέλη της (2) βάσει του εξωτερικού γινομένου

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{k}$$

Εξωτερικό Γινόμενο

Από τον ορισμό προκύπτουν αμέσως οι ακόλουθες ιδιότητες. Χρησιμοποιούμε τα διανύσματα **a, b, c** και **λ, μ** πραγματικούς αριθμούς).

(3) $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

Απόδειξη

Το διανυσματικό γινόμενο $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ δίνεται από τον τύπο:

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Υπολογισμός οριζουσών

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των οριζουσών που λέει ότι μπορούμε να βγάλουμε έναν κοινό παράγοντα λ από μία γραμμή:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Άρα:

Το διανυσματικό γινόμενο γίνεται:

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Εξωτερικό Γινόμενο

Από τον ορισμό προκύπτουν αμέσως οι ακόλουθες ιδιότητες. Χρησιμοποιούμε τα διανύσματα **a, b, c** και **λ, μ** πραγματικούς αριθμούς).

(4) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{k}$$

Εξωτερικό Γινόμενο

Από τον ορισμό προκύπτουν αμέσως οι ακόλουθες ιδιότητες. Χρησιμοποιούμε τα διανύσματα **a, b, c** και **λ, μ** πραγματικούς αριθμούς).

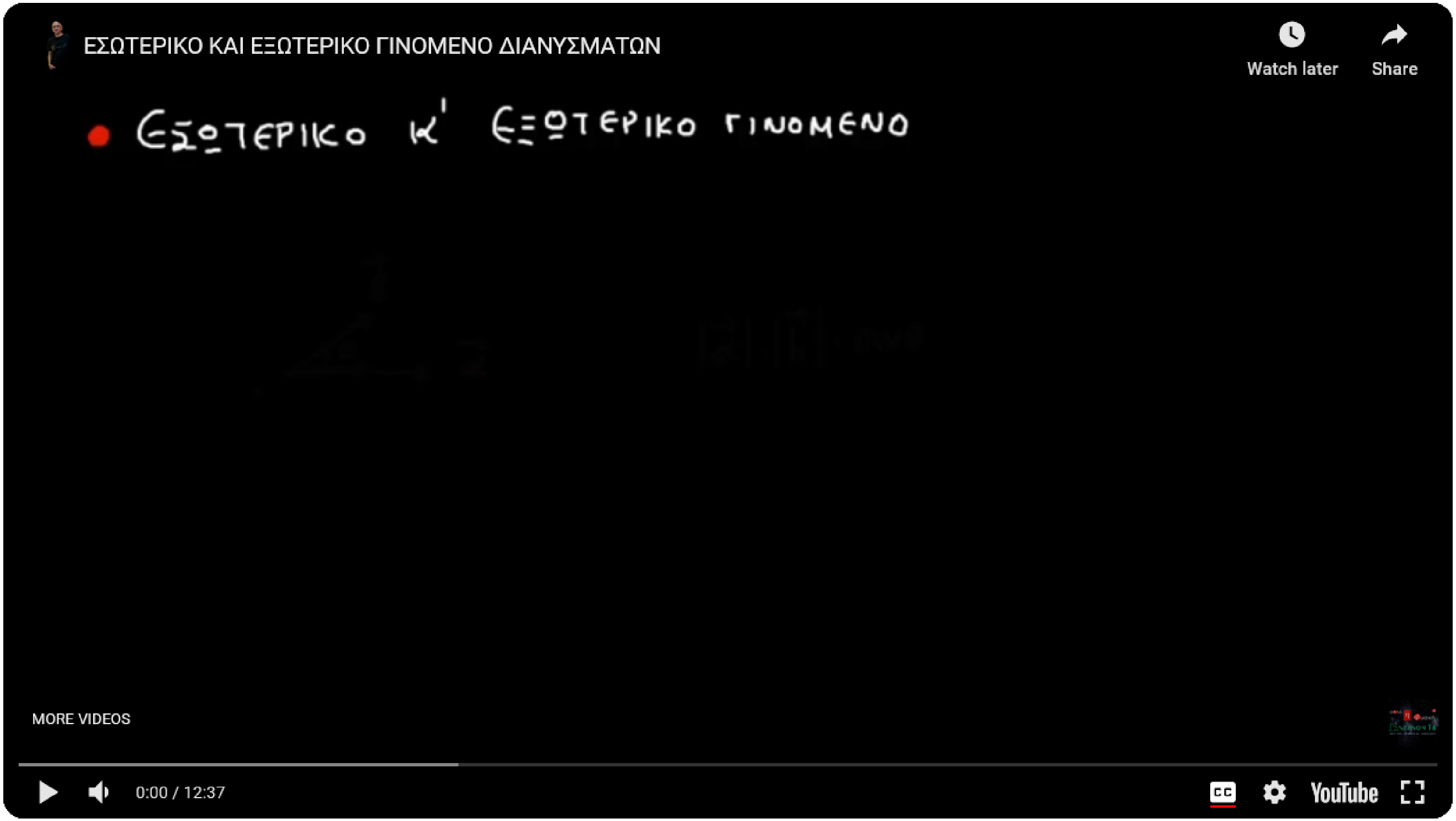
(5) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}.$

Εξωτερικό Γινόμενο

Από τον ορισμό προκύπτουν αμέσως οι ακόλουθες ιδιότητες. Χρησιμοποιούμε τα διανύσματα **a, b, c** και **λ, μ** πραγματικούς αριθμούς).

(6) $$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Ποια είναι η σημασία των εσωτερικών και εξωτερικών γινομένων στη φυσική…



Δύναμη Coriolis F=m 2Ωημφ u

Δηλαδή, όταν θεωρούμε τα θαλάσσια δυναμική ρευστών, μπορούμε να δεχτούμε ότι είναι σημαντική μόνο η οριζόντια περιστροφή:

$$2\vec{\Omega} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 2\Omega sin\varphi \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & f \\ u & v & w \end{vmatrix} =$$

$$-\boldsymbol{f v}\,\hat{\imath} + \boldsymbol{f u}\,\hat{\jmath}$$

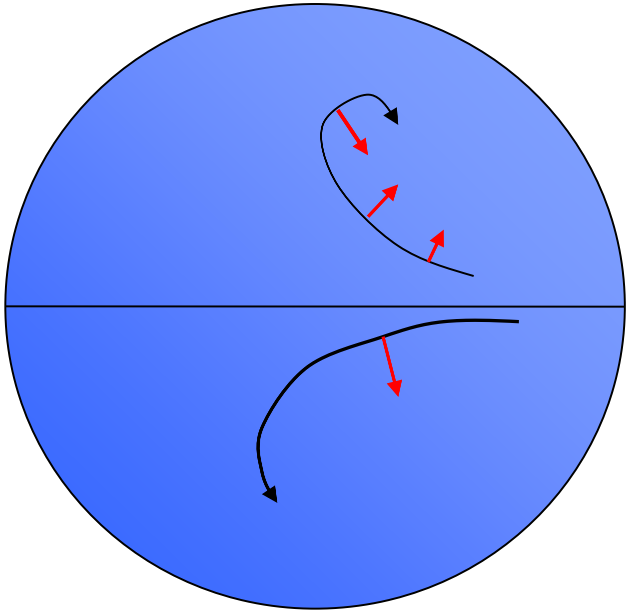
[9]

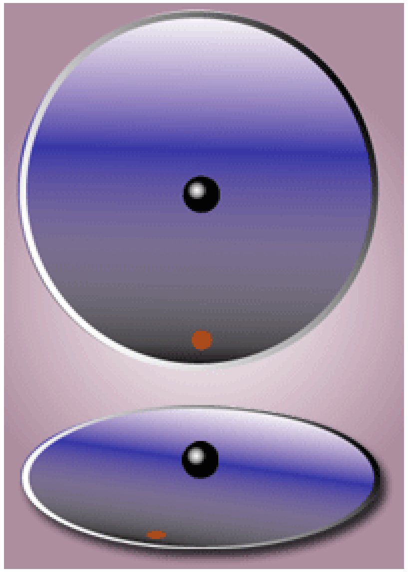
Gustave Gaspard Coriolis (1792–1843). French mathematician who discussed what we now refer to as the "Coriolis force" in addition to the already-known centrifugal force. The explanation of the effect sprang from problems of early 19th-century industry, for example, rotating machines, such as water-wheels.

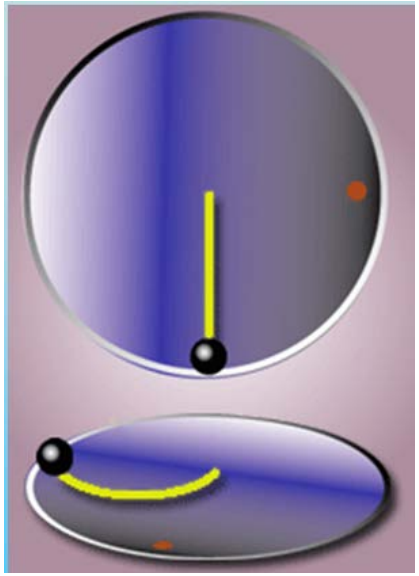
Δύναμη Coriolis

Η δύναμη Coriolis λοιπόν είναι μια ψευδοδύναμη που δρα κάθετα στο διάνυσμα της ταχύτητας στο οριζόντιο επίπεδο, και έχει φορά προς τα δεξιά της ταχύτητας στο Βόρειο ημισφαίριο και στα αριστερά στο Νότιο.

Η δύναμη Coriolis μεταβάλλεται με το γεωγραφικό πλάτος, και είναι μέγιστη στους Πόλους, ενώ μηδενίζεται στον Ισημερινό. Η μεταβολή οφείλεται στην καμπυλότητα της Γης.



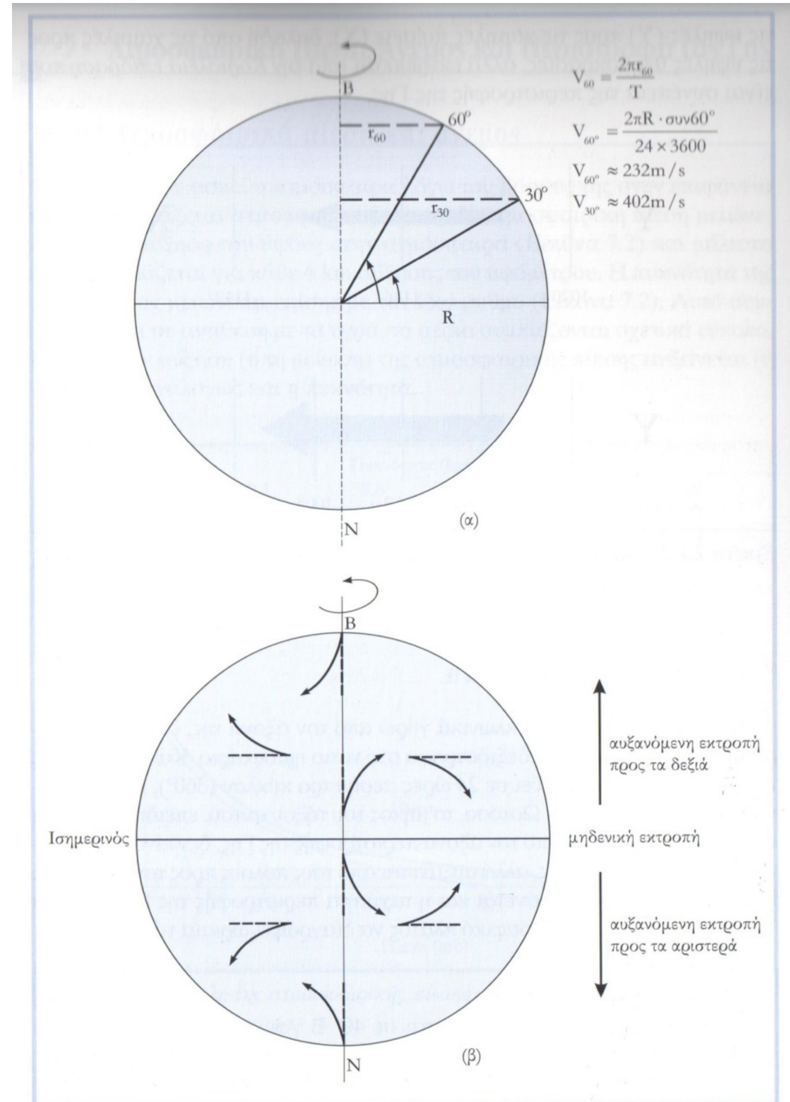




Προς τα πού στρέφεται η Γη?

Δύναμη Coriolis – αδρανειακή κυκλοφορία

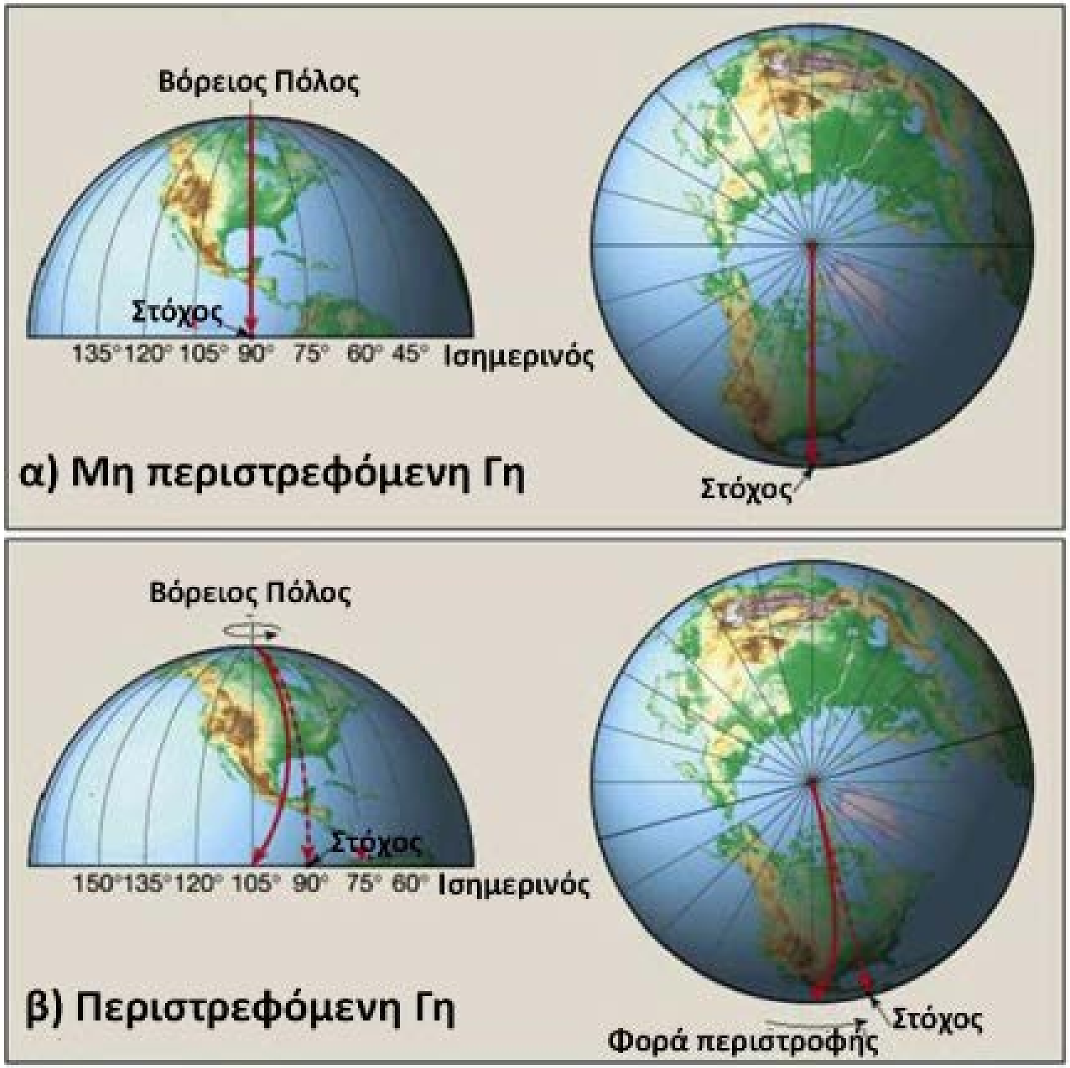
- Κάθε σημείο της Γης διανύει σε 24h όλη την περίμετρο
- Το τόξο που διανύει κάθε σημείο έχει σχέση από την απόσταση του από τον άξονα (δεν είναι το ίδιο παντού)
- Μικρή ταχύτητα προς τους πόλους
- Αέρια/υγρή μάζα γ.π. 30^o περιστρέφεται μαζί με τη Γη με ταχύτητα 1400 km/h (402 m/s)
- Ο ισημερινός κινείται με 1600 km/h προς τα ανατολικά (διαφορά 200 km/h)
- Έστω η μάζα κινείται από τον βορά προς τον ισημερινό με 32 km/h όπου θα φτάσει μετά από 100 ώρες
- η θέση που θα έφτανε έχει μετατοπιστεί 200km/h*100h=20,000 km
- **«φαίνεται»** ότι η μάζα εκτράπηκε προς δεξιά
- F=m 2Ωημφ u (κορειόλεια δύναμη/παράμετρος *f*= 2Ωημφ)



Εικόνα 7.4: Η Κοριόλεια επίδραση: (α) μεταβολή της ταχύτητας περιστροφής της Γης με το γεωγραφικό πλάτος και (β) οι συνέπειές της

https://www.youtube.com/watch?v=i2mec3vgeaI

Δύναμη Coriolis – αδρανειακή κυκλοφορία



Εξωτερικό Γινόμενο - Ασκήσεις

1. Εξηγείστε γιατί οι παρακάτω παραστάσεις είναι ασαφείς ή εσφαλμένες και αν ειναι σωστες υπολογίστε το αποτελεσμα για a=(1,2,1), b=(3,2,3), c=(1,0,0)

$\mathbf{a \times b \times c}$

$\mathbf{ab}$

$\mathbf{a \cdot (b \cdot c)}$

Εξωτερικό Γινόμενο - Ασκήσεις

1. Εξηγείστε γιατί οι παρακάτω παραστάσεις είναι ασαφείς ή εσφαλμένες

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

$\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

Εξωτερικό Γινόμενο - Ασκήσεις

2. Δείξτε ότι αν $a = \lambda b + \mu c$, τότε $a \cdot (b \times c) = 0$

Εξωτερικό Γινόμενο - Ασκήσεις

3. Δείξτε ότι το γινόμενο $a \cdot (b \times c)$ παραμένει αναλλοίωτο σε κυκλική εναλλαγή των a, b, c

Εξωτερικό Γινόμενο - Ασκήσεις

4. Δείξτε τις παρακάτω ιδιότητες του τριπλού διανυσματικού γινομένου

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

Εξωτερικό Γινόμενο - Ασκήσεις

5. Δείξτε τις παρακάτω ιδιότητες του τριπλού διανυσματικού γινομένου

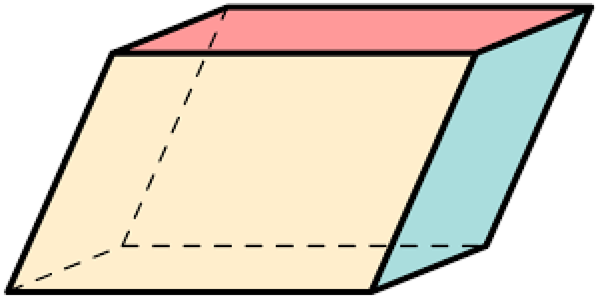
$$a\times(b \times c) + c\times(a \times b) + b\times(c \times a) = 0.$$

Εξωτερικό Γινόμενο - Ασκήσεις

6. Δείξτε ότι $(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$

Εξωτερικό Γινόμενο - Ασκήσεις

7. Δείξτε ότι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου, |a × b|, παριστάνει το εμβαδό του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα a και b. Η απόλυτη τιμή του a · (b × c) παριστάνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που προσδιορίζεται από τα διανύσματα a, b και c.



Εξωτερικό Γινόμενο - Ασκήσεις

8. ΄Εστω $a = i + 2j + k$, $b = 2i + j$, $c = 3i - 4j - 5k$. Βρείτε τις προβολές των a και b πάνω στο c. Βρείτε τα $a \cdot (b \times c)$, $(a \times b) \cdot c$, $a \times (b \times c)$, $(a \times b) \cdot (a \times c)$, $(a \times b) \times (a \times c)$.

Εξωτερικό Γινόμενο - Ασκήσεις

8. Για δύο μή μηδενικά διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ισχύει $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$, αν και μόνο αν τα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ είναι ορθογώνια.

Εξωτερικό Γινόμενο - Ασκήσεις

Για δύο μή μηδενικά διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ισχύει $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$, αν και μόνο αν τα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ είναι ...

Εξωτερικό Γινόμενο - Ασκήσεις

9. Θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο που προσδιορίζεται από τα διανύσματα (2, 1, 1), (1, 3, 4), (2, 2, 3). Επομένως τέσσερεις κορυφές του παραλληλεπιπέδου είναι τα σημεία (0, 0, 0) , (2, 1, 1), (1, 3, 4) , (2, 2, 3). Προσδιορίστε τις υπόλοιπες κορυφές του παραλληλεπιπέδου και υπολογίστε τον όγκο του.