Μαθηματικά ΙΙ

Υπεύθυνος Καθηγητής:
Γιάννης Ανδρουλιδάκης

1ο Μάθημα

Εαρινό Εξάμηνο 2025-2026

Δομή Μαθήματος

- **1. Διανυσματική Άλγεβρα**
  - Διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$
  - Πράξεις διανυσμάτων (άθροισμα, βαθμωτός πολλαπλασιασμός)
  - Εσωτερικό γινόμενο – μέτρο, γωνία, προβολές
  - Εξωτερικό (διανυσματικό) γινόμενο – γεωμετρική ερμηνεία
  - Πίνακες και ορίζουσες
  - Γραμμική ανεξαρτησία, βάση, διάσταση
  - Γραμμικά συστήματα – γεωμετρική ερμηνεία
  - Γραμμικές απεικονίσεις
- **2. Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών**
  - Βαθμωτά πεδία – γραφήματα και σύνολα στάθμης
  - Μερικές παράγωγοι
  - Gradient (βαθμίδα)
  - Κατευθυνόμενη παράγωγος – παράγωγος κατά μήκος καμπύλης
  - Διανυσματικά πεδία
  - Απόκλιση και στροβιλισμός ($\nabla\cdot$, $\nabla\times$)
  - Ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών
  - Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων
  - Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων
  - Παραγώγιση ολοκληρωμάτων

Δομή Μαθήματος

- **3. Σειρές**
  - Σειρές Taylor (μίας και πολλών μεταβλητών)
  - Δυναμοσειρές
  - Εφαρμογές στη Φυσική
  - Ελλειπτικά ολοκληρώματα
- **4. Εξισώσεις Μαθηματικής Φυσικής**
  - Λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων
  - Ροή διανυσματικού πεδίου
  - Γεωμετρική σημασία της απόκλισης
  - Εξίσωση συνέχειας
  - Εξισώσεις κίνησης ρευστών
    - Ιδανικά ρευστά
    - Πραγματικά ρευστά
  - Συνοριακές συνθήκες
  - Καταστατικές εξισώσεις
  - Σύνοψη και ασκήσεις

Θεωρία-Ασκήσεις
Δευτέρα 12:00 - 15:00
Τετάρτη 12:00 - 14:00

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
Ι. Μυριτζής
2021
(e-class)

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

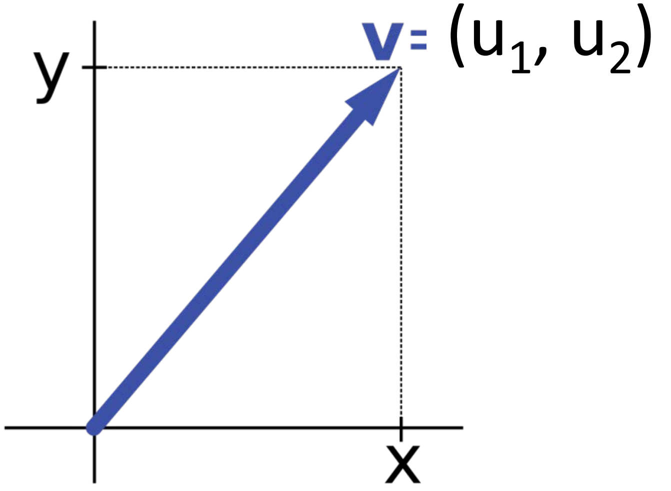
Πως χρησιμοποιούνται τα διανύσματα στην Ωκεανογραφία;

Ο διανυσματικός χώρος R^3

- Είναι γνωστό ότι τα σημεία του επιπέδου μπορούν να παρασταθούν ως διατετεταγμένα ζεύγη αριθμών.

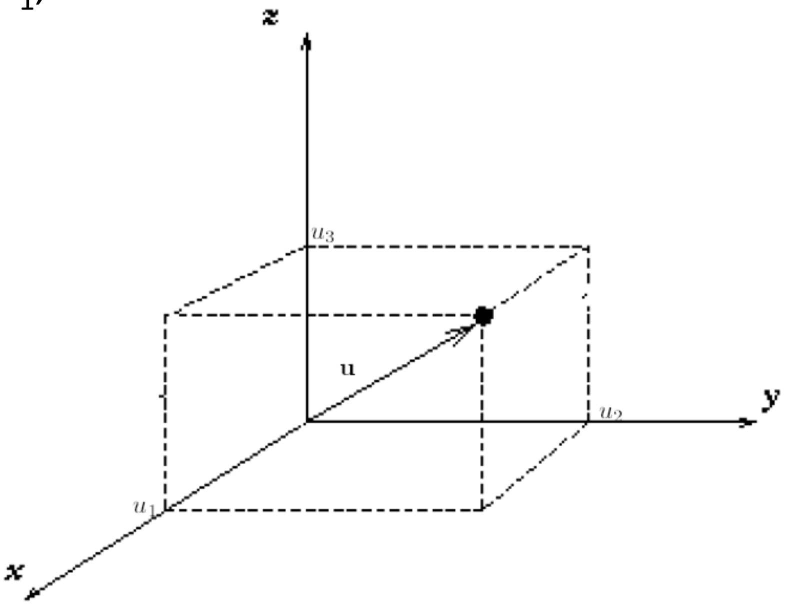
- Οι συντεταγμένες του διανύσματος u είναι οι αριθμοί u_1 και u_2 και θα γράφουμε $\mathbf{v} = (u_1, u_2)$.

- τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x και y αντίστοιχα που συμβολίζονται ως i = (1, 0) και j = (0, 1).



- Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (u_1, u_2) με $u_1, u_2 \in R$, είναι το καρτεσιανό γινόμενο R×R και συμβολίζεται με R^2.

- Στον τρισδιάστατο χώρο αντίστοιχα το σύνολο των διατεταγμένων τριάδων (u_1, u_2, u_3) πραγματικών αριθμών το καρτεσιανό γινόμενο R × R × R, συμβολίζεται με R^3.



Βασικοί Ορισμοί

Ορισμός 1.1. *Δύο διανύσματα* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *είναι ίσα, αν έχουν τις ίδιες συντεταγμένες. Το μηδενικό διάνυσμα,* $\mathbf{0}$, *έχει μηδενικές συντεταγμένες,* $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Ορισμός 1.2. *Άθροισμα των διανυσμάτων* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *και* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, *ορίζεται ως*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

Πολλαπλασιασμός με βαθμωτό $\lambda \in \mathbb{R}$, *ορίζεται ως*

$$\lambda \mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3).$$

Παράδειγμα 1

Ιδιότητες

1. ΔΧ 1 Αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ανήκουν στο $\mathbb{R}^3$ τότε και $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ ανήκει επίσης στο $\mathbb{R}^3$.
2. ΔΧ 2 Για όλα τα στοιχεία $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ του $\mathbb{R}^3$ ισχύει $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$.
3. ΔΧ 3 $\lambda\mathbf{x}$ ανήκει στο $\mathbb{R}^3$.
4. ΔΧ 4 $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$.
5. ΔΧ 5 Υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ που συμβολίζεται με $\mathbf{0}$ τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^3$ να ισχύει $\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x}$.
6. ΔΧ 6 Για κάθε $\mathbf{x}$ στο $\mathbb{R}^3$ υπάρχει ένα στοιχείο $-\mathbf{x}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
7. ΔΧ 7 $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$.
8. ΔΧ 8 $(\lambda+\mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$.
9. ΔΧ 9 $(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$.
10. ΔΧ 10 $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$. (1 είναι ο αριθμός 1).

Ασκήσεις

1. Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1, -1, 2)\,, \quad \mathbf{b} = (2, 0, 3)$ και $\mathbf{c} = (3, -2, 4)$.
   Βρείτε τα $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$.

Ασκήσεις

2. Για τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1,2)$, $\mathbf{b} = (3,1)$, βρείτε και σχεδιάστε το $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ για τις τιμές $t = 0,\ 1/3,\ 1/2,\ 1,\ 2,\ 3$. Ποιό είναι κατά τη γνώμη σας το σύνολο των σημείων της μορφής $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$, $t \in \mathbb{R}$;

Ασκήσεις

3. Για τα διανύσματα $\mathbf{u} = (1,2)\,, \quad \mathbf{v} = (3,1)$, θεωρείστε όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$, όπου λ, μ διατρέχουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Ποιό είναι κατά τη γνώμη σας το σύνολο των σημείων αυτών;

Εσωτερικό Γινόμενο

Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

του R3, το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

είναι ο πραγματικός αριθμός (**όχι διάνυσμα**)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Παράδειγμα 2

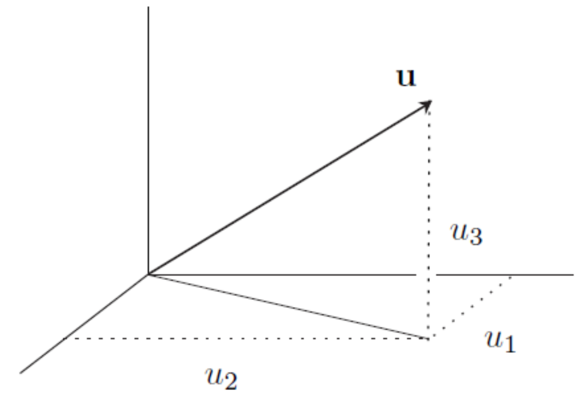
Ιδιότητες

- ΕΓ 1 $\quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, και $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- ΕΓ 2 $\quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
- ΕΓ 3 $\quad (\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.
- ΕΓ 4 $\quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

Εσωτερικό Γινόμενο

Μέτρο ή μήκος

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$



Γεωμετρική ερμηνεία: μήκος (ή μέτρο του διανύσματος **u**)

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Ορισμός 1.4. *Ο μή αρνητικός αριθμός* $|\mathbf{u}|$ *που ορίζεται ως*

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2},$$

ονομάζεται norm, ή μήκος, ή μέτρο του διανύσματος **u**.

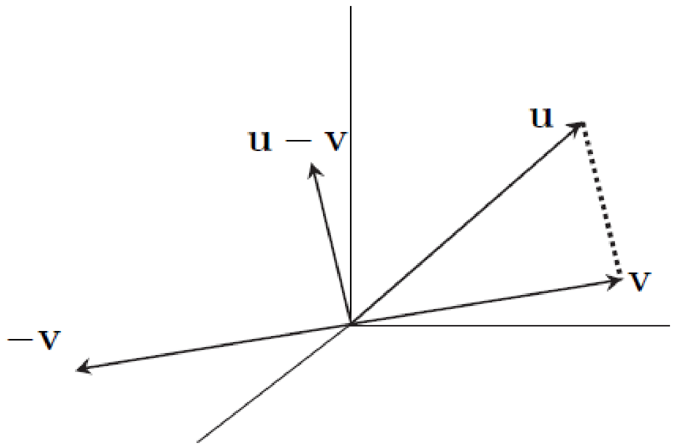
$\|\mathbf{u}\|$

u

Παράδειγμα 3

Εσωτερικό Γινόμενο

Απόσταση διανυσμάτων



Το μήκος ενός διανύσματος $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ δίνεται από τον κανόνα:

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}.$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος του διανύσματος $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, αρχικά βρίσκουμε τις συνιστώσες του:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3).$$

Το μήκος του $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ είναι:

$$\boxed{|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}.}$$

Εσωτερικό Γινόμενο

Απόσταση διανυσμάτων

Ερώτημα 1

Ποια είναι η απόσταση του μοναδιαίου i από το j;

Εσωτερικό Γινόμενο

Απόσταση διανυσμάτων

Ερώτημα 2

Ποια είναι η απόσταση του (1, 1, 1) από το (1, 1, 0);

Εσωτερικό Γινόμενο

Γωνία διανυσμάτων

Θεώρημα 1.1. *Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα* $\mathbf{u}$ *και* $\mathbf{v}$ *του* $\mathbb{R}^3$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$, *τότε*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta.$$

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ στο $\mathbb{R}^3$, και ας υπολογίσουμε το μήκος του διανύσματος $\mathbf{u} - \mathbf{v}$:

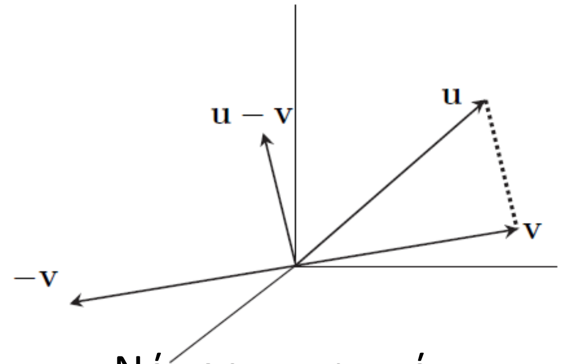
$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}).$$

Αναπτύσσουμε το τετράγωνο:

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Αντικαθιστούμε:

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).$$



Νόμος συνημιτόνων

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta.$$

Εσωτερικό Γινόμενο

Παράδειγμα 3

Γωνία διανυσμάτων

Γωνία για τα διανύσματα $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} = (1, 1, -1)$

Εσωτερικό Γινόμενο

Γωνία διανυσμάτων

Θεώρημα 1.2

Ποιο ειναι το εσωτερικο γινομενο 2 καθετων διανυσματων;

Ορισμός 1.5. *Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται κάθετα ή ορθογώνια, αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. Θα γράφουμε* $\boxed{\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \text{ αν } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.}$

Εσωτερικό Γινόμενο

Γωνία διανυσμάτων

Ερώτημα 4

Δείξτε ότι $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$

Εσωτερικό Γινόμενο

Γωνία διανυσμάτων

Ερώτημα 5

Δείξτε ότι $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$

Εσωτερικό Γινόμενο

Γωνία διανυσμάτων

Ερώτημα 6

Ποιά γωνία σχηματίζουν τα διανύσματα i + j + k και i + j − k;

Εσωτερικό Γινόμενο

Θεώρημα Πυθαγόρα

Θεώρημα 1.2 (Θεώρημα του Πυθαγόρα). *Αν* **u** *και* **v** *είναι κάθετα, τότε*

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 .$$

Απόδειξη

Απόδειξη. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$, διότι $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. □

Θεώρημα Cauchy-Schwarz

Θεώρημα 1.3 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Για όλα τα διανύσματα* **u** *και* **v** *του* $\mathbb{R}^3$ *ισχύει*

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

με ισότητα μόνο αν ένα από αυτά είναι μηδέν, ή αν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Θεώρημα Cauchy-Schwarz $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| < \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.1 έχουμε

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,|\cos\theta|\,.$$

- Αν ένα από τα διανύσματα είναι μηδέν $\longrightarrow$ **ισχύει η ισότητα 0 = 0**

- Αν $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$, τότε τα δύο διανύσματα είναι συνγραμμικά. Υποκαθιστούμε στη σχέση του εσωτερικού γινομένου:

1. Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(k\mathbf{u}) = k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = k\|\mathbf{u}\|^2.$$

2. Το μέτρο του $\mathbf{v}$ είναι:

$$\|\mathbf{v}\| = \|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|.$$

3. Υποκαθιστούμε στη σχέση $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$:

$$\cos\theta = \frac{k\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|(|k|\|\mathbf{u}\|)}.$$

4. Απλοποιούμε:

$$\cos\theta = \frac{k}{|k|}. \longrightarrow$$ **Αρα cosθ=1, ισχύει η ισότητα**

- Αν το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου, τότε $|\cos\theta| < 1$. $\longrightarrow$ **ισχύει η ανισότητα**

Θεώρημα Cauchy-Schwarz

Παράδειγμα 4

Θεώρημα Τριγωνικής Ανισότητας

Για όλα τα διανύσματα u και v του R^3 ισχύει

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

Απόδειξη. Ισχύει

Υψώνουμε στο τετράγωνο το αριστερό μέλος και επεκτείνουμε το τετράγωνο του μέτρου

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} ;$$

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\,|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2$$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz *Ανάπτυγμα τετραγώνου*

$$\Downarrow$$

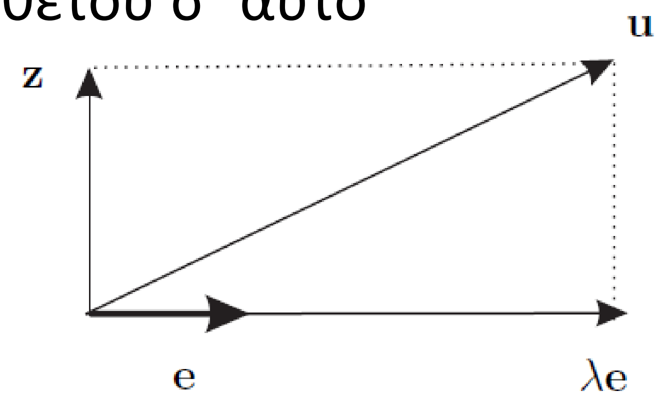
$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 \leq (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2$$

$$\Downarrow$$

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

Προβολή μεταξύ διανυσμάτων

Κάθε διάνυσμα **u** γράφεται ως άθροισμα ενός διανύσματος κατά τη διεύθυνση του **e** και ενός κάθετου σ΄ αυτό



u = λe + z, όπου z κάθετο στο e

Απόδειξη

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με e προκύπτει

$$u \cdot e = \lambda\,|e|^2 + \cancel{z \cdot e} = \lambda\,|e|^2 \longrightarrow \lambda = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{e}|^2}$$

Το **λ** είναι η συνιστώσα του **u** πάνω στο **e** και το **λe** είναι η προβολή του **u** πάνω στο **e**.

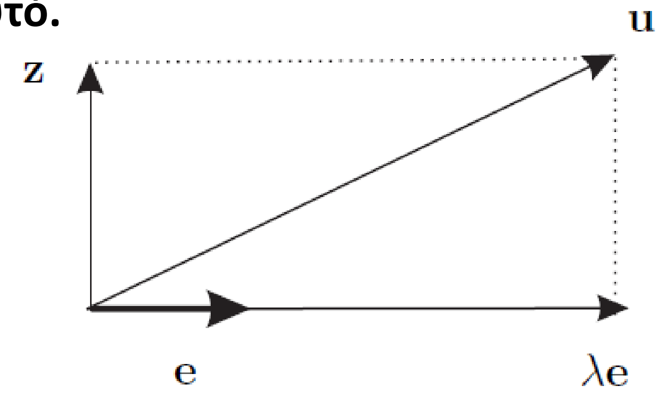
$\Downarrow$

Ο αριθμός λ είναι **πόσο "μέρος " του u** βρίσκεται στη διεύθυνση του e

Προβολή μεταξύ διανυσμάτων

Παράδειγμα 5

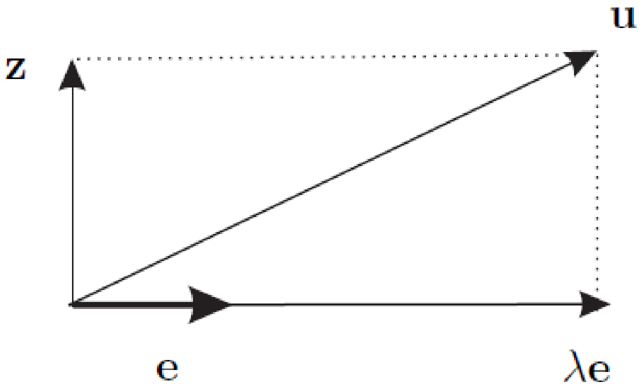
Βρείτε την προβολή του u = (2, 1, 2) πάνω στο e = (1, 0, 0). Αναλύστε το u σε ένα διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του e, και ένα διάνυσμα z κάθετο σ'αυτό.



Προβολή μεταξύ διανυσμάτων

Παράδειγμα 6

Γιατι το μήκος της προβολής του u πάνω στο e είναι |u · e| / |e|?



Εσωτερικό Γινόμενο

Ασκήσεις

1. Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a} = (2 - 1, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, -2, 3)$, $\mathbf{c} = (1, -1, 1)$. Βρείτε τις γωνίες που σχηματίζουν ανά δύο. Βρείτε τη norm των διανυσμάτων $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Εσωτερικό Γινόμενο

Ασκήσεις

2. Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 0, 3)$ και $\mathbf{c} = (3, -2, 4)$. Στις παρακάτω παραστάσεις μπορούν να τοποθετηθούν παρενθέσεις κατά ένα μόνο τρόπο ούτως ώστε αυτές να αποκτήσουν νόημα. Τοποθετείστε παρενθέσεις και υπολογίστε τις παραστάσεις.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\mathbf{c}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{a}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

Εσωτερικό Γινόμενο

Ασκήσεις

4. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς.

   (α) Αν για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$, τότε $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

   (β) Αν $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ συνεπάγεται $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Εσωτερικό Γινόμενο

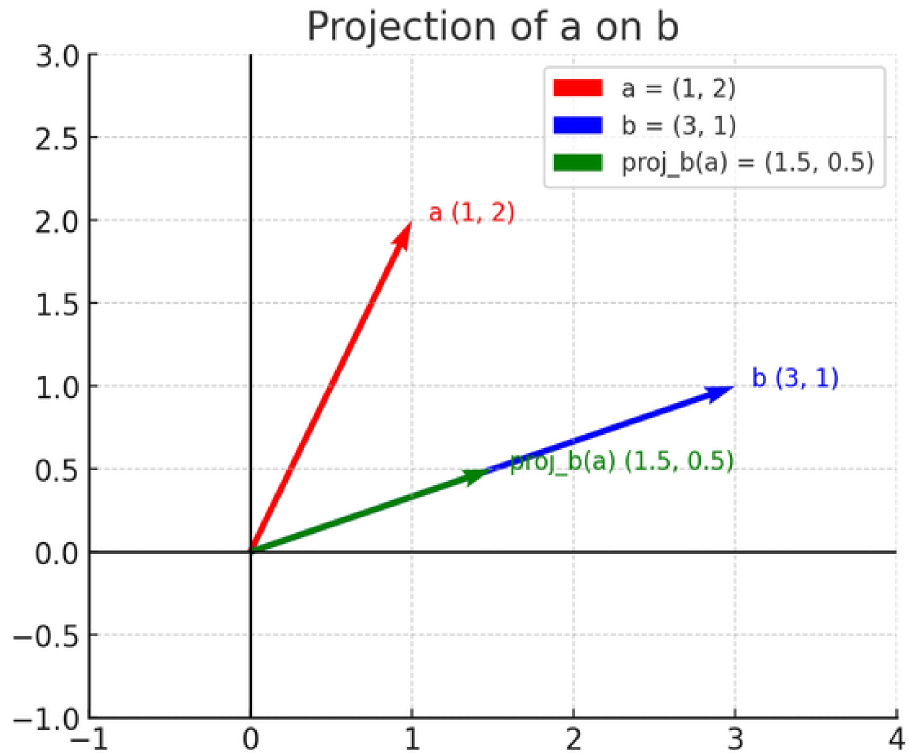
Ασκήσεις

4. Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα, ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ και $\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

Εσωτερικό Γινόμενο

Ασκήσεις

5. Βρείτε και σχεδιάστε την προβολή του $\mathbf{a} = (1, 2)$, πάνω στο $\mathbf{b} = (3, 1)$. Βρείτε τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το $\mathbf{a}$ με τους άξονες.



Εσωτερικό Γινόμενο

Ασκήσεις

6. Το $\mathbf{u} = (6, 3, -2)$ σχηματίζει με τους άξονες x, y, z γωνίες α, β, γ αντίστοιχα. Βρείτε τα συνημίτονα των α, β, γ (*κατευθύνοντα συνημίτονα*).

Εσωτερικό Γινόμενο

Ασκήσεις

7. Για δύο πραγματικούς αριθμούς $a, b \in [0, 2\pi]$, ποιά γωνία σχηματίζουν τα διανύσματα του επιπέδου $(\cos a, \sin a)$ και $(\cos b, \sin b)$; Από την απάντηση σας προκύπτει η ταυτότητα $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Εσωτερικό Γινόμενο

Ασκήσεις

8. Δείξτε ότι για δύο μή μηδενικά διανύσματα του Ευκλείδιου χώρου ισχύει

$$-1 \leq \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \leq 1.$$

Εσωτερικό Γινόμενο

Ασκήσεις

9. Δείξτε ότι η norm έχει τις εξής ιδιότητες:

- N1 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ $|\mathbf{x}| \geq 0$ και $|\mathbf{x}| = 0$ ανν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

- N2 $\quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R} \qquad |\lambda \mathbf{x}| = |\lambda|\,|\mathbf{x}|$

- N3 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$