ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Μηχανική Γνώσης και Συστήματα Γνώσης

Δίκτυα Bayes

Μανώλης Μαραγκουδάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Δίκτυα Bayes

Μανώλης Μαραγκουδάκης

Εισαγωγή- Bayesian Inference

- Πρόβλημα:
  - Σε μια ειδική κλινική το 0.15 των ασθενών έχει τον ιό HIV. Αν κάποιος ασθενής κάνει ένα αιματολογικό τεστ και έχει τον ιό, θα βρεθεί θετικό με πιθανότητα 0.95, ενώ αν δεν έχει τον ιό το τεστ θα είναι θετικό με πιθανότητα 0.02.
  - Αν ένας ασθενής βρεθεί θετικός στο τεστ, ποια είναι η πιθανότητα ο ασθενής να:
    - a) έχει τον ιό
    - b) μην έχει τον ιό
  - Αν ένας ασθενής βρεθεί αρνητικός στο τεστ, ποια είναι η πιθανότητα ο ασθενής να:
    - a) έχει τον ιό
    - b) μην έχει τον ιό

Εισαγωγή

- Λύση:

Ας δώσουμε στα γεγονότα τα εξής ονόματα:
H = ο ασθενής έχει τον ιό
P = το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό

Από το δεδομένα έχουμε:
$P(H) = 0.15$

$$P(P \mid H) = 0.95$$

$$P(P \mid \overline{H}) = 0.02$$

Και μας ζητούν τα ακόλουθα:
a) $P(H \mid P)$

b) $P(\overline{H} \mid P)$
c) $P(H \mid \overline{P})$
d) $P(\overline{H} \mid \overline{P})$

Εισαγωγή

- Α) $P(H \mid P) = \frac{P(P \mid H)P(H)}{P(P)}$

$$P(P) = P(H \wedge P) + P(\overline{H} \wedge P)$$

- Από το δεύτερο αξίωμα των πιθανοτήτων έχουμε:
- $P(H \wedge P) = P(P \mid H)P(H)$
  - και
- $P(\overline{H} \wedge P) = P(P \mid \overline{H})P(\overline{H})$
- Άρα $P(P) = P(P \mid H)P(H) + P(P \mid \overline{H})P(\overline{H})$
- και επομένως: $P(H \mid P) = \frac{(P \mid H)P(H)}{(P \mid H)P(H) + P(P \mid \overline{H})P(\overline{H})}$
- =0.8934

Εισαγωγή

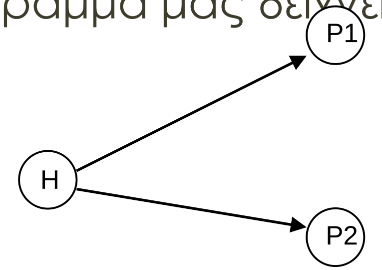
- B) $P(\overline{H}\mid P)=1-P(H\mid P)$ = 0.1066
- C) $P(H\mid \overline{P})=\dfrac{P(\overline{P}\mid H)P(H)}{P(\overline{P})}$ = 0.008923
- D) $P(\overline{H}\mid \overline{P})=1-P(H\mid \overline{P})$ = 0.99107

Δίκτυα Bayes

- Μέχρι στιγμής είδαμε πως η Bayesian θεωρία πιθανοτήτων μπορεί να συσχετίσει δυο γεγονότα. Π.χ. την πιθανότητα ένας που οδηγάει μια Ferrari είναι πλούσιος. Όμως η θεωρία Bayes μπορεί να συσχετίσει πολλά γεγονότα, δένοντας τα σε ένα δίκτυο.

- Ας ξαναδούμε το προηγούμενο παράδειγμα πάλι:
  - Ας υποθέσουμε ότι ο ασθενής ξανακάνει ένα ακόμη τεστ, ***ανεξάρτητο*** από το άλλο (δηλ. αν έχει γίνει κάποιο σφάλμα στο πρώτο τεστ δεν σημαίνει ότι αυτό θα επηρεάσει την πιθανότητα σφάλματος του δεύτερου)

- Το ακόλουθο διάγραμμα μας δείχνει την παραπάνω σχέση:



Δίκτυα Bayes

- Έστω ότι ο ασθενής κάνει 2 τεστ και βγαίνουν και τα 2 θετικά. Ποια η πιθανότητα να έχει τον ιό;
- $P(H \mid P1 \wedge P2) = \dfrac{P(P1 \wedge P2 \mid H)P(H)}{P(P1 \wedge P2)}$
  - $P(P1 \wedge P2) = P(P1 \wedge P2 \mid H)P(H) + P(P1 \wedge P2 \mid \overline{H})P(\overline{H})$
  - *P(P1^P2|H) = (P1|H)P(P2|H)*
  - $P(H \mid P1 \wedge P2) = \dfrac{0.95 \times 0.95 \times 0.15}{0.135715}$ = 0.99749
- Στο προηγούμενο παράδειγμα με το ένα τεστ θετικό, η πιθανότητα ήταν 0.8934, τώρα είναι πολύ μεγαλύτερη.
- Τα δυο τεστ έδωσαν μεγαλύτερη πεποίθηση (belief) στη γνώση μας. (σσ. Λέγονται και ***Bayesian Belief Networks***)

Η ασάφεια στην καθημερινότητα

- Εμπειρικές αλήθειες
  - Αν εμφανίζονται συμπτώματα πυρετού, δύσπνοιας και βήχα και ο ασθενής έχει πρόσφατα επιστρέψει από ταξίδι στην Κίνα τότε **πιθανόν** έχει SARS
- Υποκειμενική κρίση
  - Η Κυβέρνηση Α είναι **μάλλον απίθανο** να αποκτήσει ισχυρή αυτοδυναμία στις εκλογές
- Χρονικός Ορίζοντας
  - Υπάρχει λιγότερο από **10% πιθανότητα** να ανακάμψει η Ελληνική οικονομία στην επόμενη 2ετία

Αρχικές μέθοδοι Διαχείρισης Αβεβαιότηας

- Συστήματα βασισμένα σε κανόνες

$$(\mathit{fever} \ \wedge \ \mathit{dyspnoea}) \ \Rightarrow \mathsf{SARS}_{\mathrm{CF}=0.4}$$

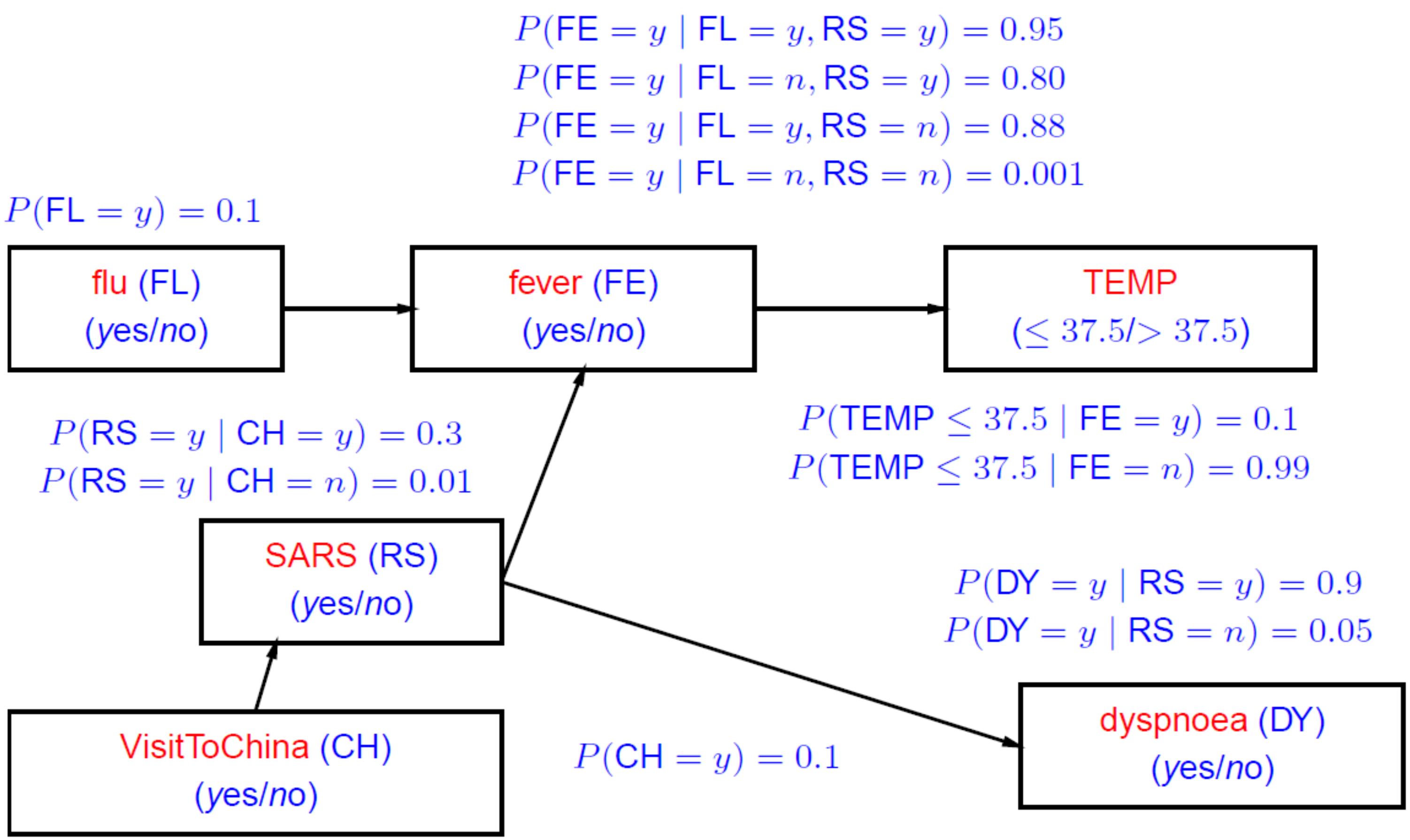
- Uncertainty Calculus
  - CF=certainty factor
  - CF(SARS,{fever, dyspnoea})=….

Ωστόσο υπάρχουν αναπάντητα ερωτήματα με τις παλιές μεθόδους

- Πόσο πιθανή είναι η ύπαρξη πυρετού ή δύσπνοιας δεδομένου ότι ο ασθενής έχει SARS?
- Πόσο πιθανή είναι η ύπαρξη πυρετού ή δύσπνοιας δεδομένου ότι ο ασθενής ΔΕΝ έχει SARS?
- Πόσο πιθανό είναι ο ασθενής να έχει SARS δεδομένου ότι δεν εμφανίζει πυρετό;
- Και πολλά άλλα….

Μια πιθανή λύση…

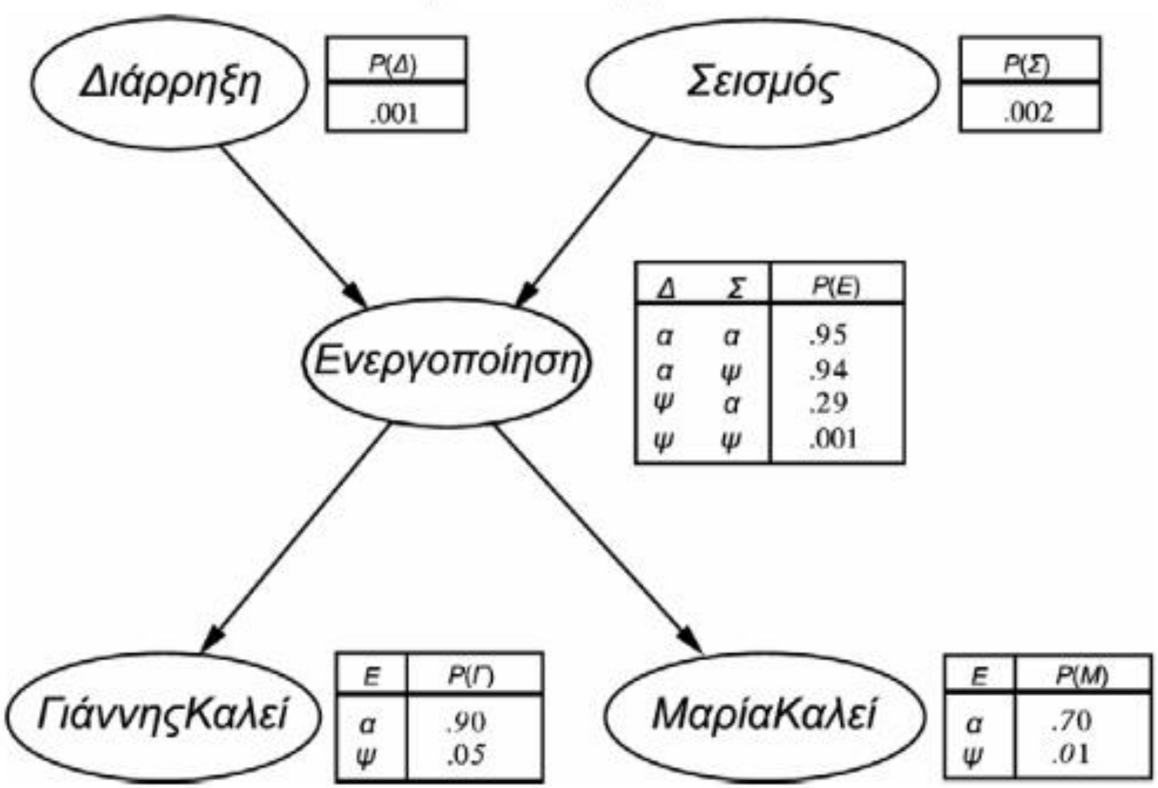
$$P(\text{CH}, \text{FL}, \text{RS}, \text{DY}, \text{FE}, \text{TEMP})$$



Δίκτυα Bayes

1. Ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών (διακριτών ή συνεχών) σχηματίζει τους κόμβους του γραφήματος.
2. Ένα σύνολο κατευθυνόμενων συνδέσμων ή βελών συνδέει ζευγάρια κόμβων. Αν υπάρχει βέλος από τον κόμβο *X* στον κόμβο *Y*, τότε λέμε ότι ο *X* είναι *γονέας* του *Y*.
3. Ο κάθε κόμβος X_i έχει μια υπό συνθήκη κατανομή πιθανότητας $P(X_i|Γονείς(X_i))$.
4. Το γράφημα δεν έχει καθόλου κατευθυνόμενους κύκλους.

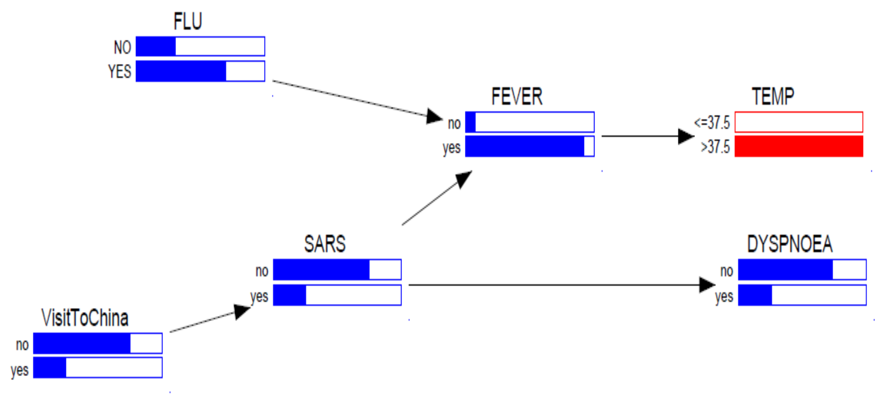
Παράδειγμα



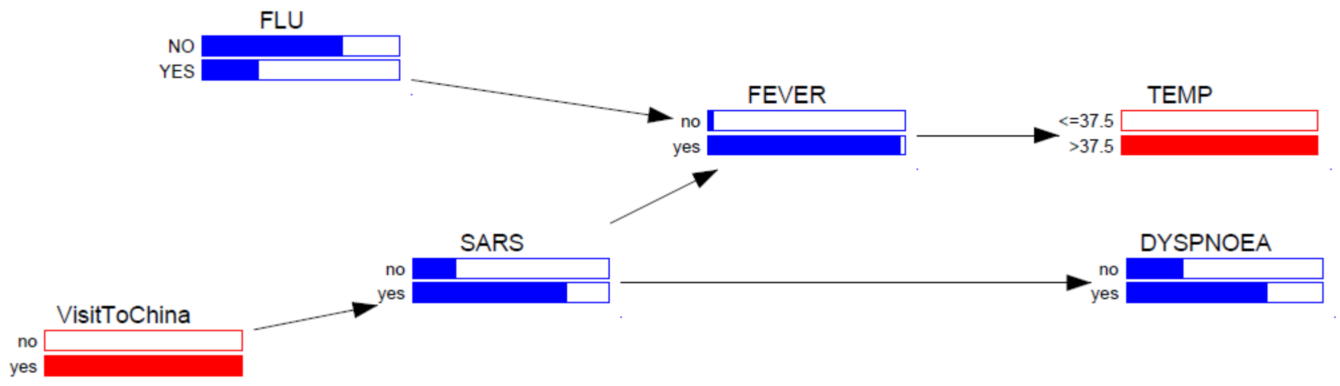
Διάρρηξη
P(Δ)
.001
Σεισμός
P(Σ)
.002
Ενεργοποίηση
Δ Σ P(E)
α α .95
α ψ .94
ψ α .29
ψ ψ .001
ΓιάννηςΚαλεί
E P(Γ)
α .90
ψ .05
ΜαρίαΚαλεί
E P(M)
α .70
ψ .01

Συλλογισμός με Δίκτυα Bayes

- Καμία γνώση

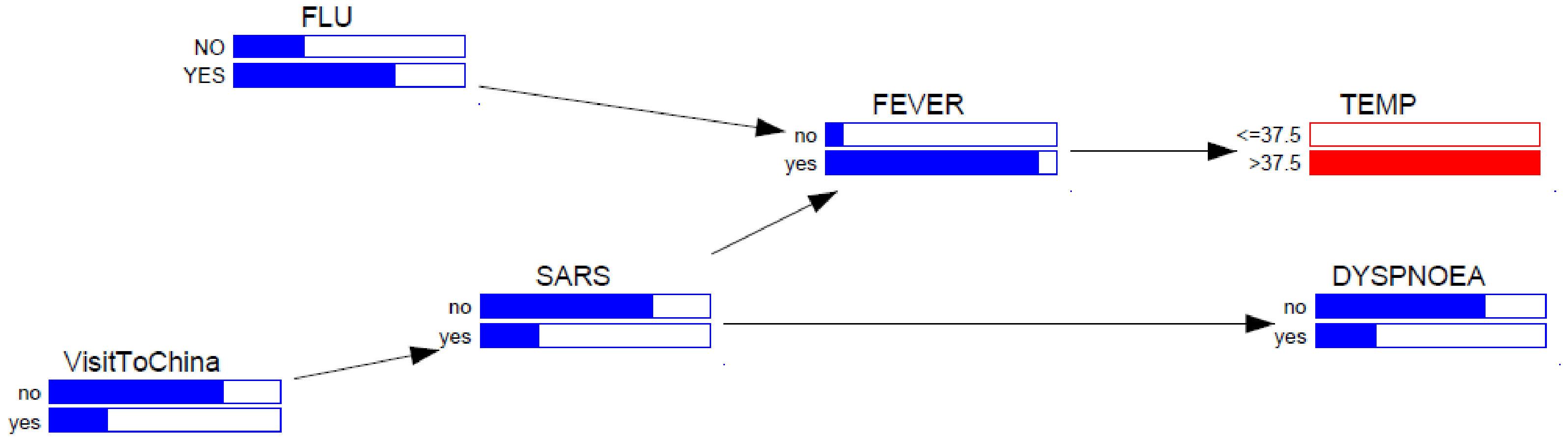


- Μόλις γύρισα από την Κίνα

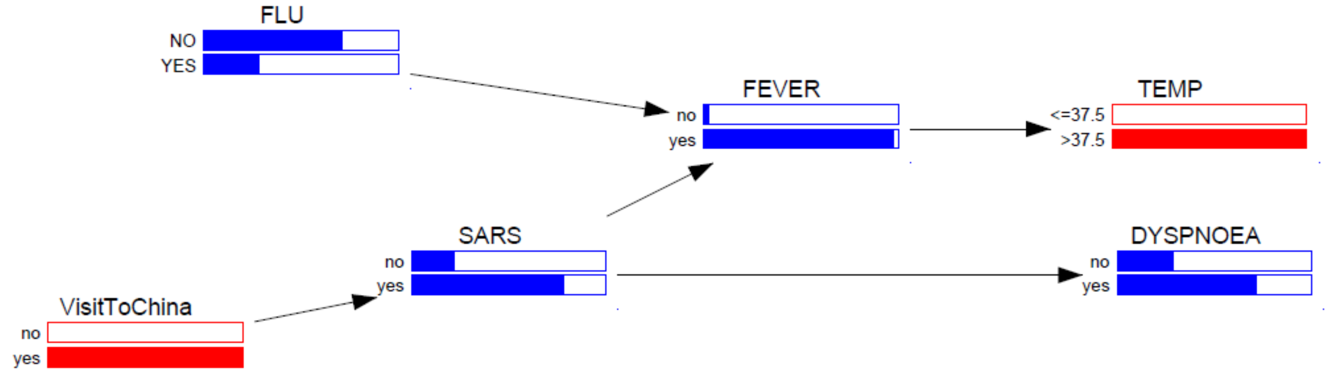


Συλλογισμός με Δίκτυα Bayes (συν)

- Πυρετός >37,5ο C



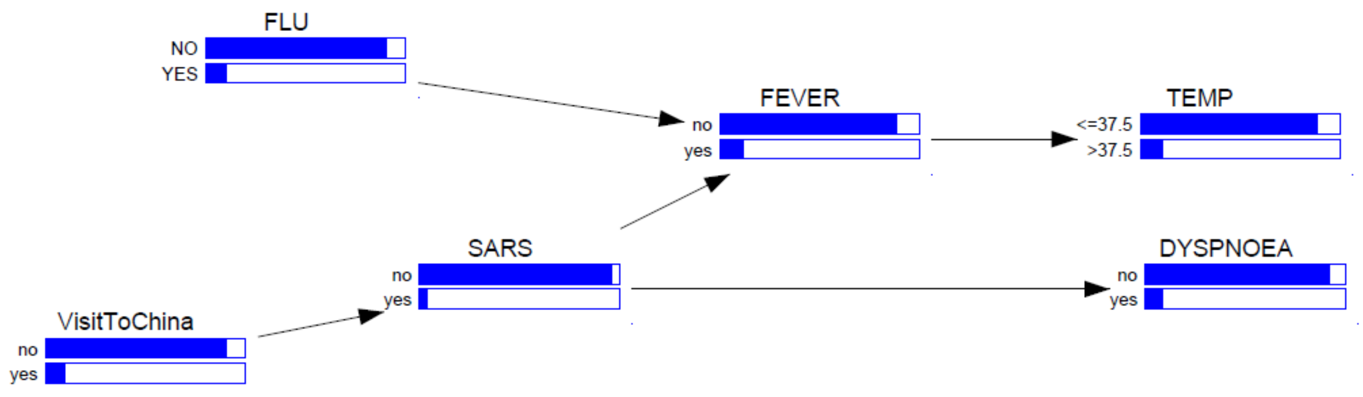
- Πυρετός >37,5ο C ^ Επίσκεψη στην Κίνα



Αναπαράσταση Ανεξαρτησίας σε Γράφους

- Το σύνολο μεταβλητών X λέμε ότι είναι **υπό συνθήκες ανεξάρτητο** από το σύνολο μεταβλητών Z δεδομένου ενός συνόλου μεταβλητών Y
  - σημειογραφία: $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$
  - Αν και μόνον αν: $P(X \mid Y, Z) = P(X \mid Y)$
- Νόημα: Αν ξέρουμε το Y, τότε το Z δεν μας δίνει καμία επίδραση στη γνώση που έχουμε για το X
- Παράδειγμα: αν ξέρουμε ότι ο Γιάννης έχει πυρετό, τότε το να μάθουμε ότι έχει και υψηλή θερμοκρασία δεν μας αλλάζει τη γνώση μας για τη γρίπη.

Βρείτε τις ανεξαρτησίες



Examples:

- FLU $\perp\!\!\!\perp$ VisitToChina | $\emptyset$
- FLU $\perp\!\!\!\perp$ SARS | $\emptyset$
- FLU $\not\perp\!\!\!\perp$ SARS | FEVER, also FLU $\not\perp\!\!\!\perp$ SARS | TEMP
- SARS $\perp\!\!\!\perp$ TEMP | FEVER
- VisitToChina $\perp\!\!\!\perp$ DYSPNOEA | SARS

Joint Probability Distribution

- X,Y τυχαίες μεταβλητές με πεδία ορισμού:

$$dom(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$dom(Y) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

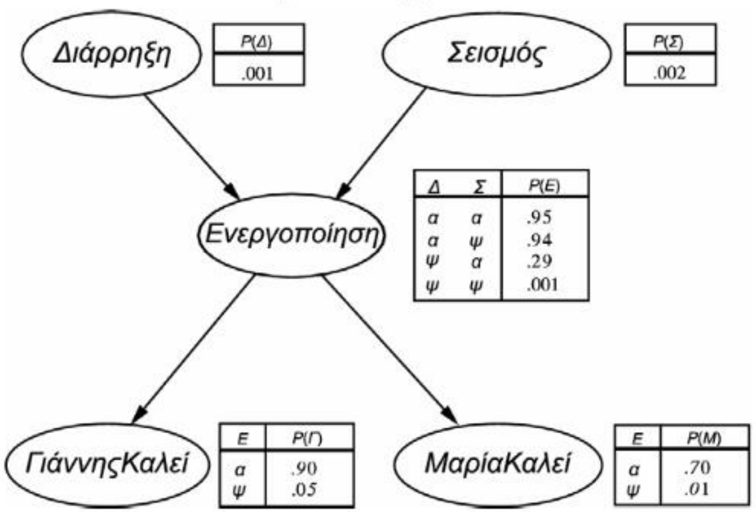
- Το γινόμενο

$$dom(X) \times dom(Y) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \times \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

- Μετατρέπεται σε πιθανότητες ορίζοντας μια συνάρτηση f πάνω στα x και y

$$P(X = x_i \wedge Y = y_j) = f(x_i, y_j)$$

Joint Probability Distribution



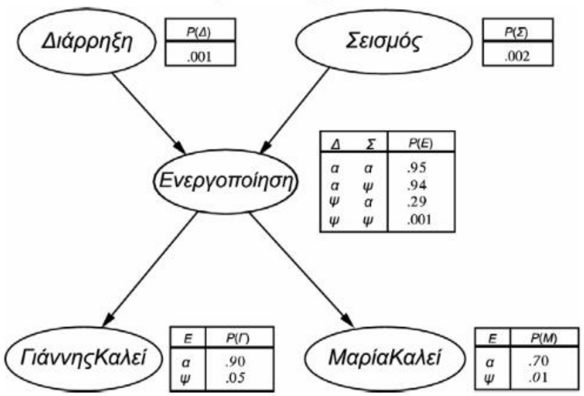
$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid \gamma o \nu \varepsilon \acute{\iota} \varsigma(x_i))$$

- Για παράδειγμα:
  - $P(\gamma \wedge \mu \wedge \varepsilon \wedge \neg\delta \wedge \neg\sigma)$
  - $= P(\gamma \mid \varepsilon)\, P(\mu \mid \varepsilon)\, P(\varepsilon \mid \neg\delta \wedge \neg\sigma)\, P(\neg\delta)\, P(\neg\sigma)$
  - $= 0{,}90 \times 0{,}70 \times 0{,}001 \times 0{,}999 \times 0{,}998 = 0{,}00062$

Από πού προκύπτει;

- Κανόνας αλυσίδας:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_n \mid x_{n-1}, \ldots, x_1) \cdot P(x_{n-1} \mid x_{n-2}, \ldots, x_1)$$
$$\cdot \ldots \cdot P(x_2 \mid x_1) \cdot P(x_1) =$$
$$\prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid x_{i-1}, \ldots, x_1)$$



- Εάν *Γονείς*(X_i) $\subseteq \{X_{i-1}, \ldots, X_1\}$ τότε:
  - **P**($X_i \mid X_{i-1}, \ldots, X_1$) = **P** ($X_i$ | *Γονείς*(X_i))
- Για παράδειγμα:
  - **P**(*ΜαρίαΚαλεί* | *ΓιάννηςΚαλεί*, *Ενεργοποίηση*, *Σεισμός*, *Διάρρηξη*) = **P**(*ΜαρίαΚαλεί* | *Ενεργοποίηση*)

Marginalization

- Έστω οι μεταβλητές X1,X2,X3,X4 (δυαδικές) και μας δίνεται η P(X1,X2,X3,X4)

$$
\begin{aligned}
P(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0.1 & P(x_1, \neg x_2, \neg x_3, x_4) &= 0.015 \\
P(x_1, \neg x_2, x_3, x_4) &= 0.04 & P(x_1, \neg x_2, x_3, \neg x_4) &= 0.1 \\
P(x_1, x_2, \neg x_3, x_4) &= 0.03 & P(x_1, x_2, \neg x_3, \neg x_4) &= 0.004 \\
P(x_1, x_2, x_3, \neg x_4) &= 0.1 & P(\neg x_1, \neg x_2, \neg x_3, x_4) &= 0.005 \\
P(\neg x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0.0 & P(\neg x_1, \neg x_2, x_3, \neg x_4) &= 0.01 \\
P(\neg x_1, \neg x_2, x_3, x_4) &= 0.2 & P(\neg x_1, x_2, \neg x_3, \neg x_4) &= 0.01 \\
P(\neg x_1, x_2, \neg x_3, x_4) &= 0.08 & P(x_1, \neg x_2, \neg x_3, \neg x_4) &= 0.006 \\
P(\neg x_1, x_2, x_3, \neg x_4) &= 0.1 & P(\neg x_1, \neg x_2, \neg x_3, \neg x_4) &= 0.2
\end{aligned}
$$

$$\sum_{X1,X2,X3,X4} P(X_1, X_2, X_3, X_4) = 1$$

Πόσο είναι η P(X4)?

Marginalization

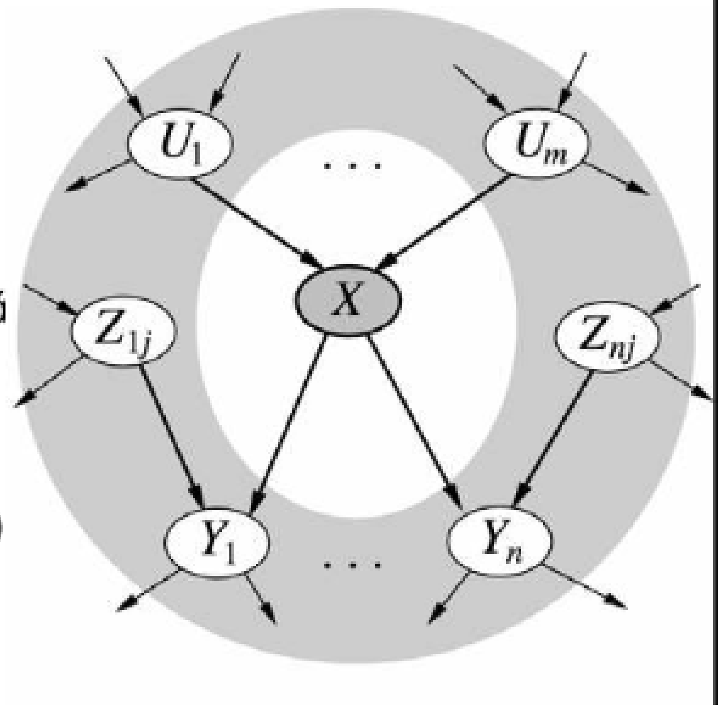
- Έστω οι μεταβλητές X1,X2,X3,X4 (δυαδικές) και μας δίνεται η P(X1,X2,X3,X4)

$$
\begin{aligned}
P(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \mathbf{0.1} & P(x_1, \neg x_2, \neg x_3, x_4) &= \mathbf{0.015} \\
P(x_1, \neg x_2, x_3, x_4) &= \mathbf{0.04} & P(x_1, \neg x_2, x_3, \neg x_4) &= 0.1 \\
P(x_1, x_2, \neg x_3, x_4) &= \mathbf{0.03} & P(x_1, x_2, \neg x_3, \neg x_4) &= 0.004 \\
P(x_1, x_2, x_3, \neg x_4) &= 0.1 & P(\neg x_1, \neg x_2, \neg x_3, x_4) &= \mathbf{0.005} \\
P(\neg x_1, x_2, x_3, x_4) &= \mathbf{0.0} & P(\neg x_1, \neg x_2, x_3, \neg x_4) &= 0.01 \\
P(\neg x_1, \neg x_2, x_3, x_4) &= \mathbf{0.2} & P(\neg x_1, x_2, \neg x_3, \neg x_4) &= 0.01 \\
P(\neg x_1, x_2, \neg x_3, x_4) &= \mathbf{0.08} & P(x_1, \neg x_2, \neg x_3, \neg x_4) &= 0.006 \\
P(\neg x_1, x_2, x_3, \neg x_4) &= 0.1 & P(\neg x_1, \neg x_2, \neg x_3, \neg x_4) &= 0.2
\end{aligned}
$$

$$P(x_4) = \sum_{X1,X2,X3} P(X_1, X_2, X_3, x_4) = 0.47$$

Conditional Independence Assumption

- Ένας κόμβος είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητος από όλους τους υπόλοιπους κόμβους του δικτύου, με δεδομένους τους γονείς του, τα παιδιά του, και τους γονείς των παιδιών του — δηλαδή, με δεδομένο το **κάλυμμα Markov** (Markov blanket) για τον κόμβο αυτόν.



Συμπαγής Αναπαράσταση

- Για *n* Boolean μεταβλητές, κάθε μία από τις οποίες έχει *k* το πολύ γονείς:
  - Η πλήρης συνδυασμένη κατανομή απαιτεί 2^n αριθμούς.
    - Για n=10 είναι 1024.
  - Το δίκτυο Bayes απαιτεί $n \cdot 2^k$ αριθμούς.
    - Για n=10 και k=3 είναι 80.

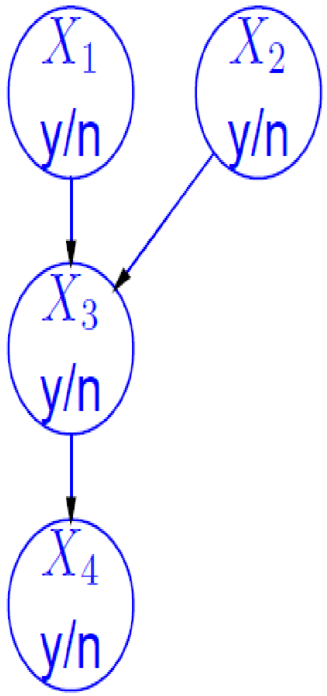
- *Τοπικά δομημένα συστήματα* ή *αραιά συστήματα*: Κάθε υποστοιχείο αλληλεπιδρά μόνο με ένα φραγμένο πλήθος άλλων στοιχείων, ανεξάρτητα από το συνολικό πλήθος των στοιχείων

Ακριβής συμπερασμός
Probabilistic Inference

- Έστω το παρακάτω δίκτυο, τότε: $P(x_4) = P(x_4, x_3) + P(x_4, \neg x_3)$

$$= P(x_4 \mid x_3)P(x_3) + P(x_4 \mid \neg x_3)P(\neg x_3)$$

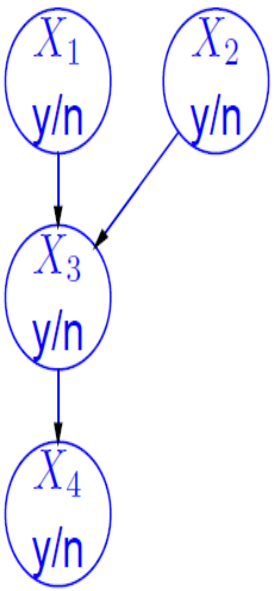
$$= \sum_{X_3} P(x_4 \mid X_3)P(X_3)$$



$$P(x_4 \mid x_3) = 0.4$$
$$P(x_4 \mid \neg x_3) = 0.1$$
$$P(x_3 \mid x_1, x_2) = 0.3$$
$$P(x_3 \mid \neg x_1, x_2) = 0.5$$
$$P(x_3 \mid x_1, \neg x_2) = 0.7$$
$$P(x_3 \mid \neg x_1, \neg x_2) = 0.9$$
$$P(x_1) = 0.6$$
$$P(x_2) = 0.2$$

Ακριβής συμπερασμός Probabilistic Inference

- Ναι αλλά P(X3)? → Βρες τα P(x3) και P(¬x3)



$P(x_4 \mid x_3) = 0.4$

$P(x_4 \mid \neg x_3) = 0.1$

$P(x_3 \mid x_1, x_2) = 0.3$

$P(x_3 \mid \neg x_1, x_2) = 0.5$

$P(x_3 \mid x_1, \neg x_2) = 0.7$

$P(x_3 \mid \neg x_1, \neg x_2) = 0.9$

$P(x_1) = 0.6$

$P(x_2) = 0.2$

$$\begin{aligned} P(x_3) &= \sum_{X_1,X_2} P(x_3, X_1, X_2) \\ &= \sum_{X_1,X_2} P(x_3 \mid X_1, X_2) P(X_1, X_2) \\ &= \sum_{X_1,X_2} P(x_3 \mid X_1, X_2) P(X_1) P(X_2) = 0.7 \end{aligned}$$

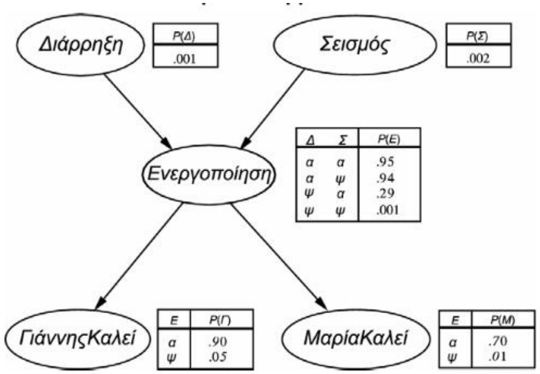
$$\Rightarrow P(x_4) = \sum_{X_3} P(x_4 \mid X_3) P(X_3) = 0.4 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.3 = 0.31$$

Approximate Inference- Προσεγγιστικός Συμπερασμός

Η πιθανότητα του ερωτήματος ***X*** δοθέντος του συμβάντος ***e*** είναι:

$$\mathbf{P}(X|\mathbf{e}) = \alpha \cdot \mathbf{P}(X,\mathbf{e}) = \alpha \cdot \sum_{y} \mathbf{P}(X,\mathbf{e},\mathbf{y})$$

όπου *α* παράγοντας κανονικοποίησης της πιθανότητας (κανονικά α=1/P(e))



- Για *Διάρρηξη* = *αληθές* έχουμε:

$$\mathbf{P}(\delta|\gamma,\mu) = \alpha \cdot \sum_{\sigma} \sum_{\varepsilon} P(\delta)P(\sigma)P(\varepsilon|\delta,\sigma)P(\gamma|\varepsilon)P(\mu|\varepsilon)$$

- Πολυπλοκότητα υπολογισμού: $O(n2^n)$ στη χειρότερη περίπτωση.
- Βγάζοντας κάποιους όρους έξω από τα αθροίσματα έχουμε:

$$\mathbf{P}(\delta|\gamma,\mu) = \alpha \cdot P(\delta) \cdot \sum_{\sigma} P(\sigma) \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\delta,\sigma)P(\gamma|\varepsilon)P(\mu|\varepsilon)$$

- Η πολυπλοκότητα μπορεί σαν βελτιωθεί μέχρι και $O(2^n)$.

Συμπερασμός

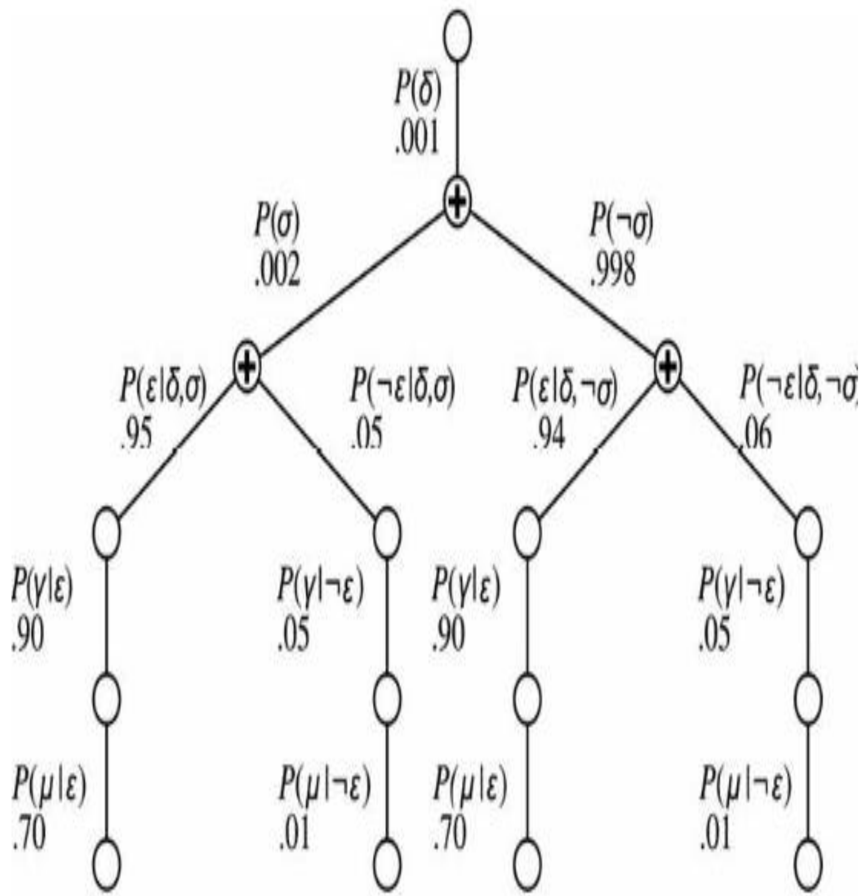
- Για *Διάρρηξη* = *αληθές* έχουμε:

$$\mathbf{P}(\delta|\gamma,\mu) = \alpha \cdot \sum_{\sigma}\sum_{\varepsilon} P(\delta)P(\sigma)P(\varepsilon|\delta,\sigma)P(\gamma|\varepsilon)P(\mu|\varepsilon)$$

- Πολυπλοκότητα υπολογισμού: $O(n2^n)$ στη χειρότερη περίπτωση.
- Βγάζοντας κάποιους όρους έξω από τα αθροίσματα έχουμε:

$$\mathbf{P}(\delta|\gamma,\mu) = \alpha \cdot P(\delta) \cdot \sum_{\sigma} P(\sigma) \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\delta,\sigma)P(\gamma|\varepsilon)P(\mu|\varepsilon)$$

- Η πολυπλοκότητα μπορεί σαν βελτιωθεί μέχρι και $O(2^n)$.

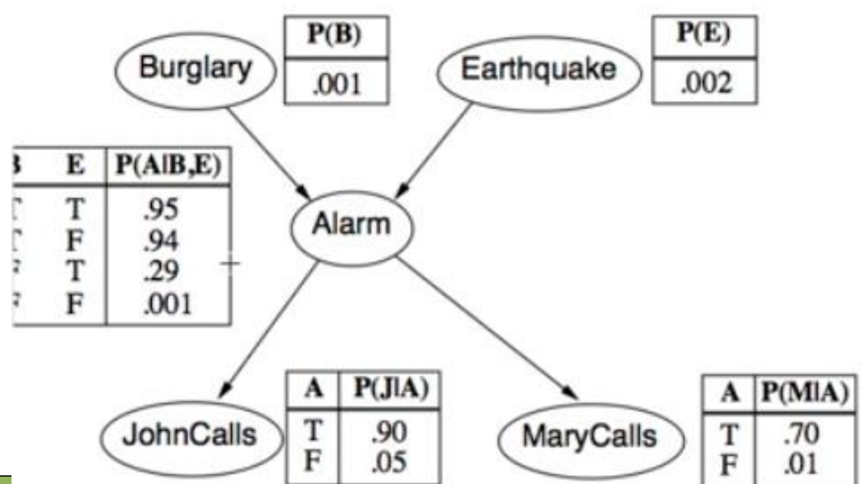


Συμπερασμός

Κάνει πάντα 1

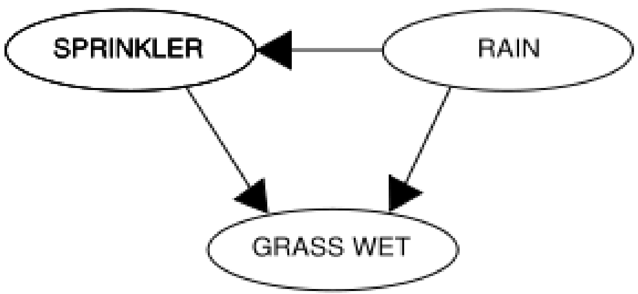
$$P(J|b) = \alpha P(b) \sum_e P(e) \sum_a P(a|b,e) P(J|a) \sum_m P(m|a)$$

Γενικά:
Ένας κόμβος Y είναι μη σχετικός προς ένα ερώτημα της μορφής P(X | e) αν ΔΕΝ ανήκει στους προγόνους του συνόλου {X U e}



Παράδειγμα

	SPRINKLER	
RAIN	T	F
F	0.4	0.6
T	0.01	0.99



RAIN	
T	F
0.2	0.8

		GRASS WET	
SPRINKLER	RAIN	T	F
F	F	0.0	1.0
F	T	0.8	0.2
T	F	0.9	0.1
T	T	0.99	0.01

Να βρείτε

$$\mathrm{P}(R = T \mid G = T)$$

Bayesian Software

- Εμπορικά:
  - Hugin (Denmark): www.hugin.dk
  - Norsys (USA): www.norsys.com
  - Knowledge Industries (USA): www.kic.com
  - Bayesia (France): www.bayesia.com
- Δωρεάν:
  - JavaBayes: www.cs.cmu.edu/~javabayes
  - BayesBuilder: www.snn.ru.nl/nijmegen
  - bnlearn package in R: www.bnlearn.com
  - SamIam: reasoning.cs.ucla.edu/samiam
  - Matlab BNT Toolbox: code.google.com/p/bnt
  - and more at www.cs.ubc.ca/~murphyk/Software/bnsoft.html