Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Κινητές και Δορυφορικές Επικοινωνίες

Μηχανική των Τροχιών

Δημοσθένης Βουγιούκας (dvouyiou@aegean.gr)

Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών & Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Νόμοι του Kepler

- Πρώτος Νόμος : Οι πλανήτες κινούνται σε ένα επίπεδο και οι τροχιές που διαγράφουν είναι ελλείψεις, με τον Ήλιο σε μια εστία. (1602)
- Δεύτερος Νόμος : Το ακτινικό διάνυσμα από τον Ήλιο στον πλανήτη καλύπτει (σαρώνει) ίσες επιφάνειες σε ίσους χρόνους. (1605)
- Τρίτος Νόμος : Ο λόγος του τετραγώνου της περιόδου (T) της περιστροφής ενός πλανήτη γύρω από τον Ήλιο, προς τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα (a) της έλλειψης, είναι ο ίδιος για όλους τους πλανήτες. (Ο λόγος (T^2/a^3) είναι σταθερός). (1618)

Περιγραφή και ΟΧΙ Εξήγηση

- Οι νόμοι του Kepler αποτελούν περιγραφή της πλανητικής κίνησης και ΟΧΙ εξήγηση.
- Ο Isaac Newton διαλεύκανε το μυστήριο του “ΓΙΑΤΙ;”.
- Το 1665 ο Newton ήταν φοιτητής στο University of Cambridge, όταν μια επιδημία της πανώλης έκλεισε το Πανεπιστήμιο για 2 χρόνια. Τα δύο αυτά χρόνια ο Newton συνέλαβε το Νόμο της Βαρύτητας, τους Νόμους της Κίνησης, και ανέπτυξε τις βασικές αρχές της Διαφορικής Ανάλυσης.
- Λόγω κάποιων μικρών ασυμφωνιών της θεωρίας του με την κίνηση της Σελήνης παραμέρισε την εργασία του. Οι ανακαλύψεις του έγιναν γνωστές 20 χρόνια αργότερα.

Νόμοι του Νεύτωνα

- 1687 : “The Mathematical Principles of Natural Philosophy”, ή πιο απλά “Principia” (Αρχές).
- Στο πρώτο βιβλίο της “Principia” ο Newton εισάγει τους 3 Νόμους της Κίνησης:
- Πρώτος Νόμος (Αδράνειας) : Κάθε σώμα παραμένει σε αδράνεια ή συνεχίζει την ομοιόμορφη κίνησή του σε ευθεία γραμμή, εκτός αν εξαναγκασθεί σε αλλαγή της κατάστασης από εξωτερικές δυνάμεις.
- Δεύτερος Νόμος : Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ανάλογος της δύναμης που ασκείται και είναι στην ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη ($F=m\gamma$).
- Τρίτος Νόμος : Σε κάθε “Δράση” αντιστοιχεί και μια ίση και αντίθετη “Αντίδραση”.

Νόμος Παγκόσμιας Έλξης

- Ο Νεύτωνας έδειξε ότι ο 2ος Νόμος του Kepler ισχύει αν στους πλανήτες ασκείται ελκτική δύναμη με κατεύθυνση ένα κεντρικό σημείο, τον Ήλιο.
- Για να ικανοποιείται ο 1ος Νόμος του Kepler η δύναμη έπρεπε να είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης πλανήτη-Ήλιου.
- Για να ισχύει ο 3ος Νόμος του Kepler έπρεπε η δύναμη να είναι ανάλογη της μάζας του πλανήτη.

Νόμος Παγκόσμιας Έλξης

- Δύο σώματα με μάζες m και M, έλκουν το ένα το άλλο με μια δύναμη η οποία είναι ανάλογη με τις μάζες τους και αντίστροφα ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ τους:

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

- Όπου G είναι μια σταθερά που ονομάζεται Παγκόσμια Σταθερά της Βαρύτητας και είναι:
- $G=6.672 \times 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$
- Μάζα Γης $M=5{,}974 \times 10^{24}$kg
- Άρα $\mu=GM=3{,}986 \times 10^{14}\ m^3/s^2$

Δορυφόροι της Γης

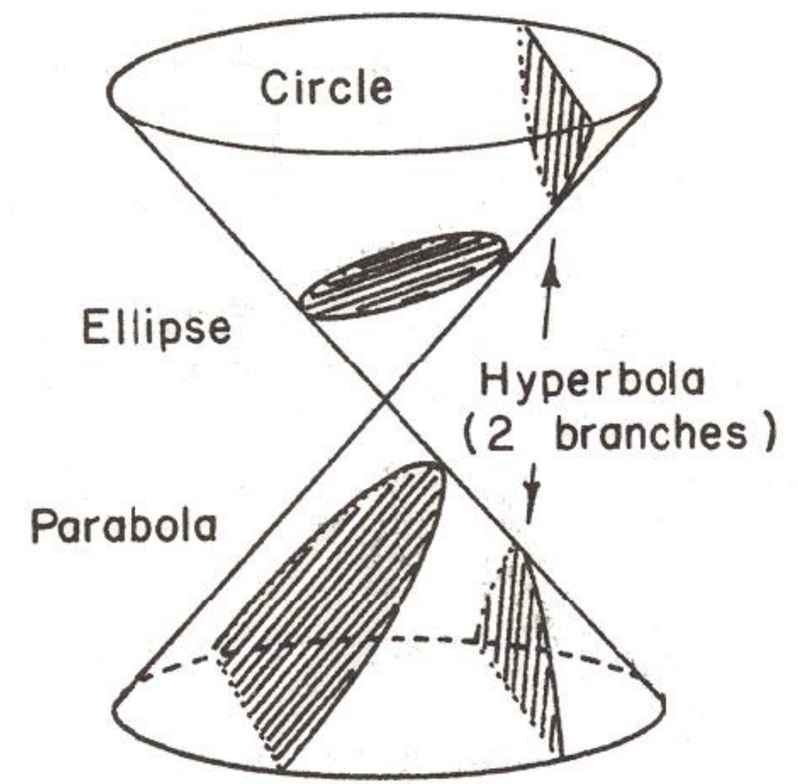
- Η κίνηση των δορυφόρων γύρω από τη Γη ακολουθεί κατά προσέγγιση τους νόμους τους Kepler, με τις ακόλουθες Υποθέσεις :
  - Η μάζα m του δορυφόρου είναι μικρή σε σχέση με τη μάζα M της Γης (m<<M), που υποτίθεται είναι ΣΦΑΙΡΙΚΗ και ΟΜΟΓΕΝΗΣ.
  - Η κίνηση συμβαίνει στον ελεύθερο χώρο. Τα μόνα σώματα που υπάρχουν είναι ο δορυφόρος και η Γη.
- Η πραγματική κίνηση πρέπει να λάβει υπόψη το γεγονός ότι η Γη δεν είναι ούτε σφαιρική ούτε ομογενής, όπως επίσης την έλξη του Ήλιου, της Σελήνης και άλλων ουράνιων σωμάτων, καθώς και άλλες δυνάμεις που τη διαταράσσουν.

Βαρυτικό & Ηλεκτροστατικό Πεδίο

Βαρυτικό Πεδίο	Ηλεκτροστατικό Πεδίο
ΔΥΝΑΜΕΙΣ	
Νόμος του Νεύτωνα $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ (Newton)	Νόμος του Coulomb $\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$ (Newton)
Κεντρική Δύναμη	Κεντρική Δύναμη
$\mu = GM = 3{,}986 * 10^{14} m^3 / \sec^2$	$k = 4\pi\varepsilon$
ΠΕΔΙΑ	
$\vec{B} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}$ (Newton/Kg)	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{kr^2}\hat{r}$ (Newton/Coulomb)
ΕΡΓΟ	
$W = -\frac{GMm}{R}$ (Joule)	$W = \frac{Qq}{kR}$ (Joule)
ΔΥΝΑΜΙΚΟ	
$U = -\frac{GM}{R} = -\frac{\mu}{R}$ (Joule/Kg)	$V = \frac{Q}{kR}$ (Joule/Coulomb)=(Volt)
ΣΧΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ & ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ	
$\vec{B} = \vec{\nabla} U$	$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

Γεωμετρικές Ιδιότητες Κωνικών Τομών

- Κωνική Τομή : η καμπύλη της τομής ενός επιπέδου και ενός ορθού κυκλικού κώνου.



Πολική Εξίσωση Κωνικής Τομής

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

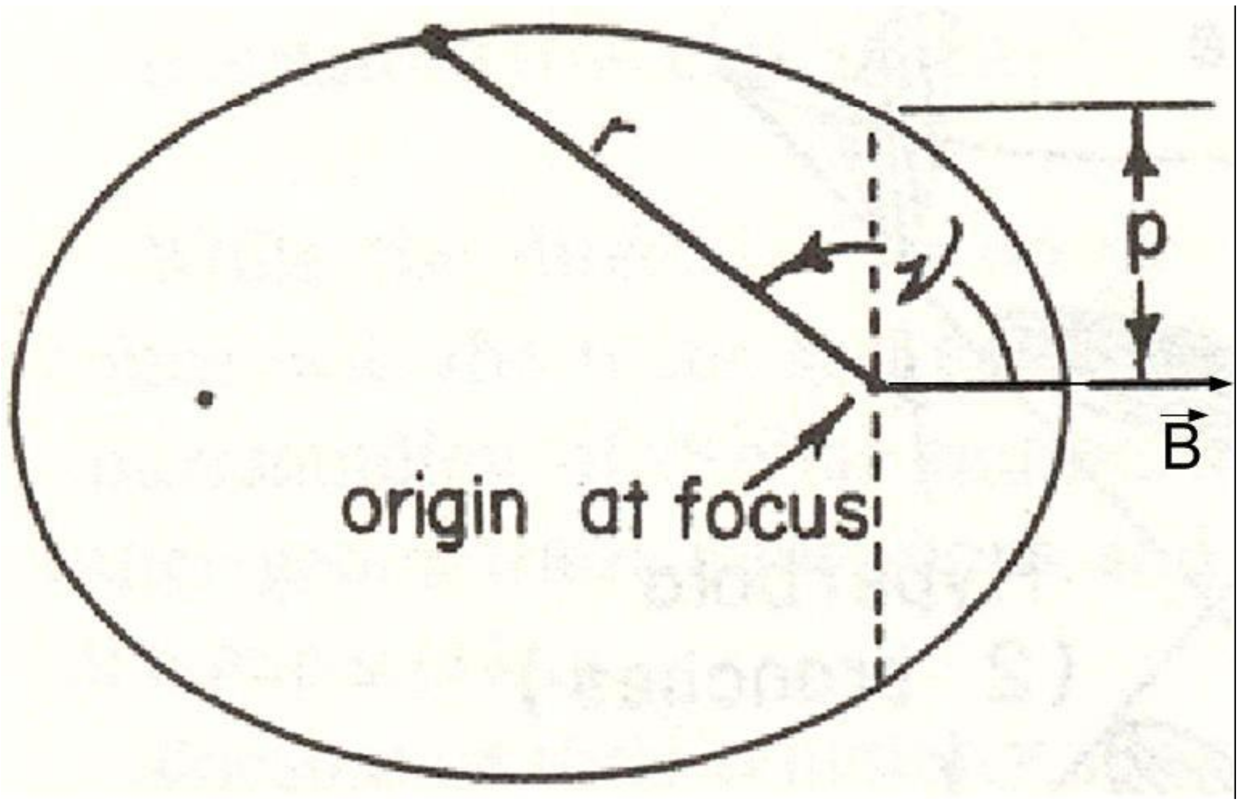
p είναι μια γεωμετρική σταθερά της κωνικής τομής που καλείται «παράμετρος» ή “semi-latus rectum”.

Η σταθερά *e* καλείται «εκκεντρότητα» και καθορίζει τον τύπο της κωνικής τομής.

- Αν e=0 τότε Κύκλος
- Αν 0<e<1 τότε Έλλειψη
- Αν e=1 τότε Παραβολή
- Αν e>1 τότε Υπερβολή

και *v* είναι η πολική γωνία.

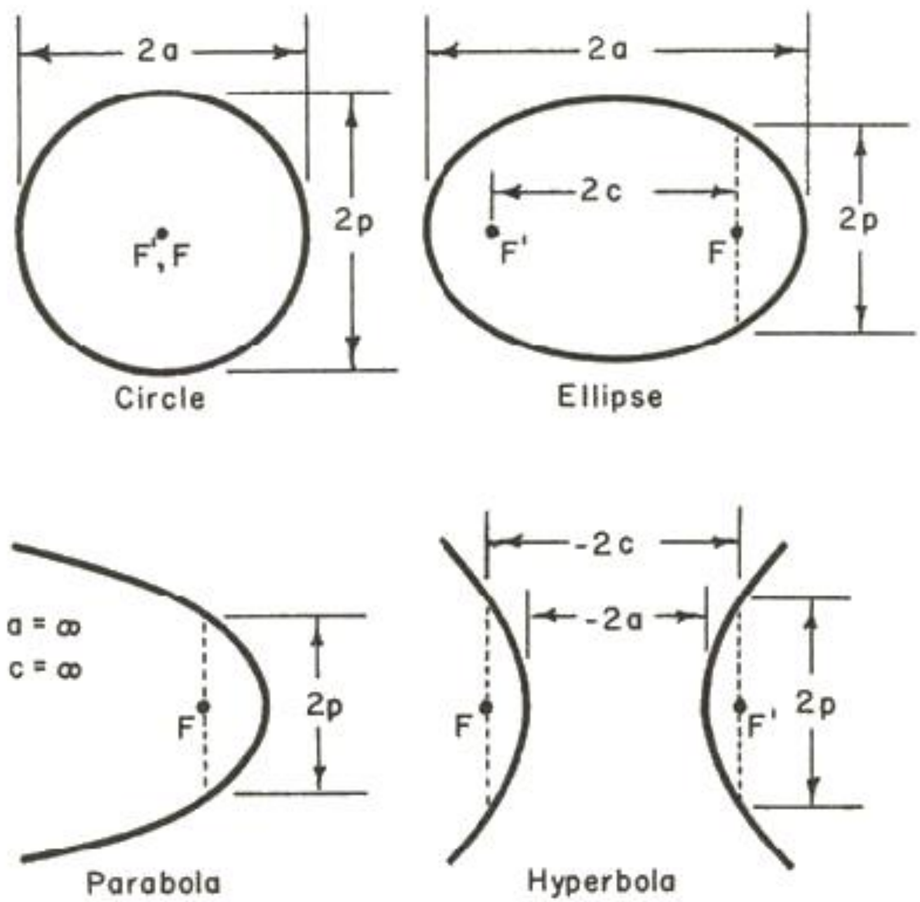
Πολική Γωνία *ν* και Διάνυσμα **B**



Αρχικά Συμπεράσματα

- Οι κωνικές τομές αναπαριστούν τα μοναδικά πιθανά μονοπάτια για ένα αντικείμενο που βρίσκεται σε τροχιά στο πρόβλημα των 2 σωμάτων.
- Η εστία της τροχιάς πρέπει να είναι τοποθετημένη στο κέντρο του σώματος με τη μεγαλύτερη μάζα.
- Η μηχανική ενέργεια του δορυφόρου δεν μεταβάλλεται κατά την κίνησή του στη τροχιά.
- Η τροχιακή κίνηση λαμβάνει χώρα σε επίπεδο το οποίο είναι σταθερό στο αδρανειακό σύστημα.
- Η ειδική στροφορμή του δορυφόρου γύρω από το κεντρικό σώμα έλξης, παραμένει σταθερή.

Γεωμετρικές Ιδιότητες Κωνικών Τομών

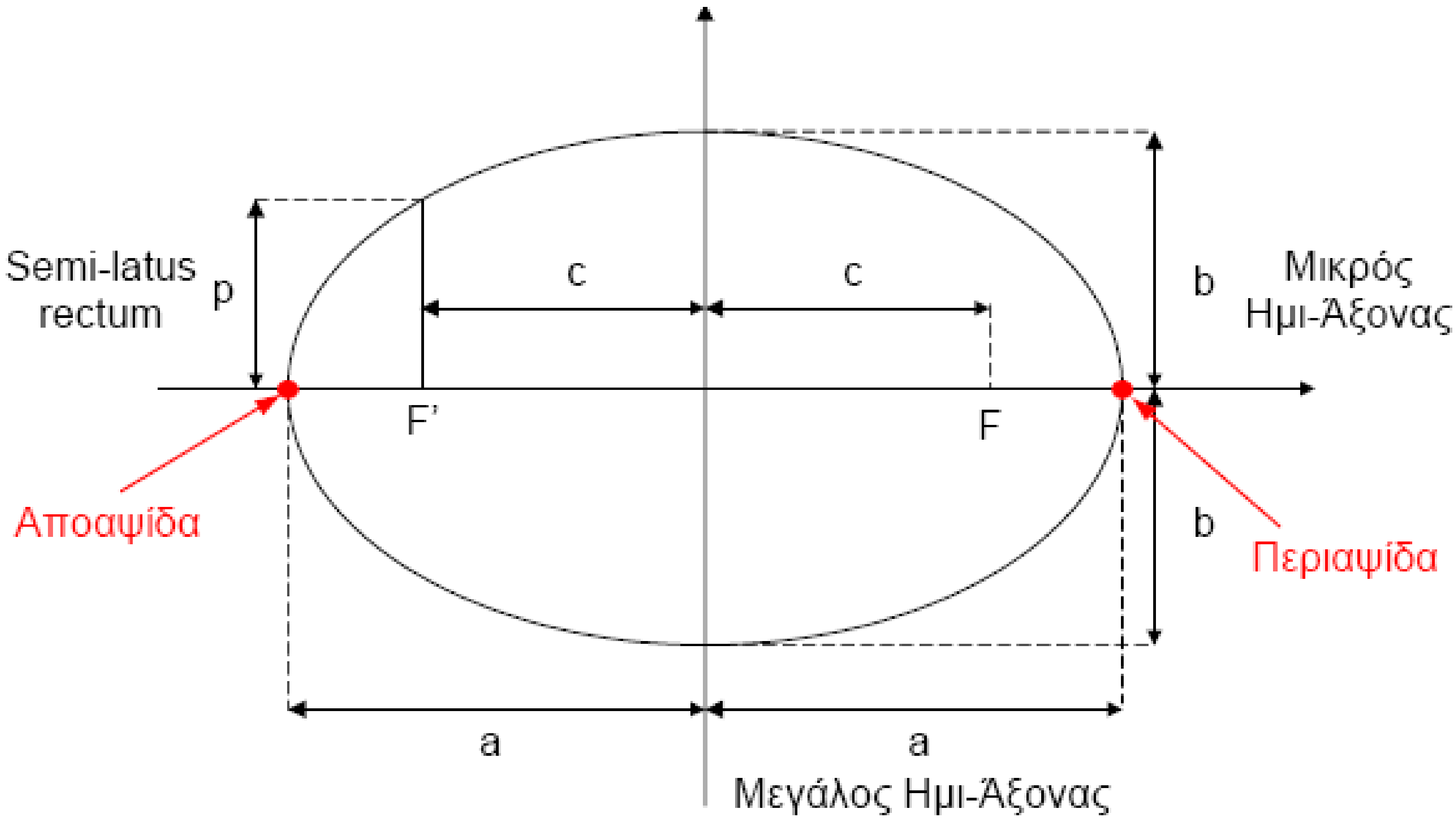


$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

Ισχύουν εκτός από την παραβολή

$$\boxed{p = a\left(1 - e^2\right)}$$

Αψίδες και Τροχιές



Περιαψίδα και Αποαψίδα

$$r_{\min} = r_{periapsis} = \frac{p}{1+e} = \frac{p}{1+e\cos\left(0^\circ\right)}$$

$$= a\left(1-e\right) = a\left(1-\frac{c}{a}\right) = a-c$$

$$r_{\max} = r_{apoapsis} = \frac{p}{1+e\cos\left(180^\circ\right)} = \frac{p}{1-e}$$

$$= a\left(1+e\right) = a\left(1+\frac{c}{a}\right) = a+c$$

Σύγκριση Εξισώσεων

Εξίσωση τροχιάς

$$\boxed{r = \frac{h^2/\mu}{1+(B/\mu)\cos\nu}}$$

Εξίσωση Κωνικής Τομής

$$\boxed{r = \frac{p}{1+e\cos\nu}}$$

$$\boxed{B = \mu e} \qquad \boxed{p = \frac{h^2}{\mu}}$$

h: στροφορμή
B: βαρυτικό πεδίο

Τροχιές και Μεγέθη

Μέγεθος	Κλειστές Τροχιές		Ανοικτές Τροχιές	
	Κύκλος	Έλλειψη	Υπερβολή	Παραβολή
e	e=0	0<e<1	e>1	e=1
a	a>0	a>0	a<0	a=∞
$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}<0$	$\mathcal{E}<0$	$\mathcal{E}>0$	$\mathcal{E}=0$

Εκκεντρότητα

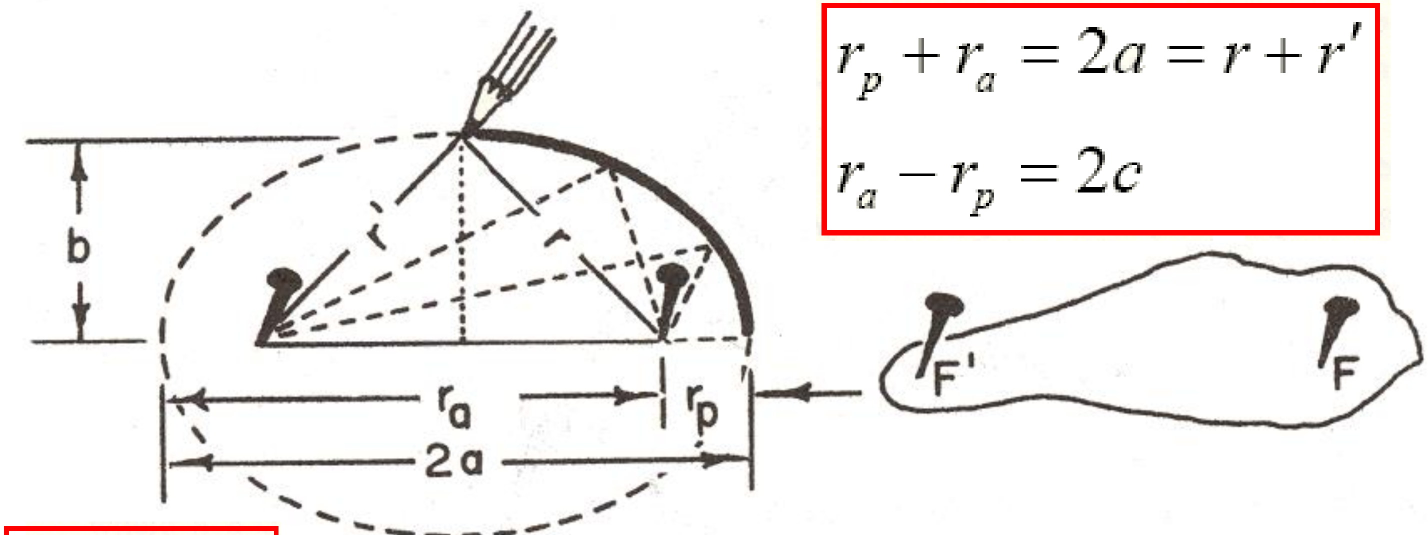
Η ειδική στροφορμή καθορίζει την παράμετρο p.
Η ειδική μηχανική ενέργεια τον μεγάλο ημι-άξονα a.
Και οι δύο μαζί καθορίζουν την εκκεντρότητα.

ειδική μηχανική ενέργεια

Για κάθε κωνική τροχιά

$$\boxed{e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{\mu^2}}}$$

Η Ελλειπτική Τροχιά – Γεωμετρία Έλλειψης



$$r_p + r_a = 2a = r + r'$$

$$r_a - r_p = 2c$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_p + r_a}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Περίοδος Ελλειπτικής Τροχιάς

$$\boxed{T = \frac{2}{h}\pi ab}$$

Εμβαδόν Έλλειψης = πab

Θέτοντας $\boxed{h = \sqrt{\mu p} \quad \kappa\alpha\iota \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2\left(1 - e^2\right)} = \sqrt{ap}}$

$$\boxed{T = \frac{2}{h}\pi ab = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}a^3}$$

Επαλήθευση 3ου Νόμου Kepler :
«Το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο του κύβου του μεγάλου ημι-άξονα»

Ταχύτητα Δορυφόρου

Ενέργεια Δορυφόρου σε οποιαδήποτε κωνική τροχιά

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \Rightarrow V^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}}$$

Η Κυκλική Τροχιά

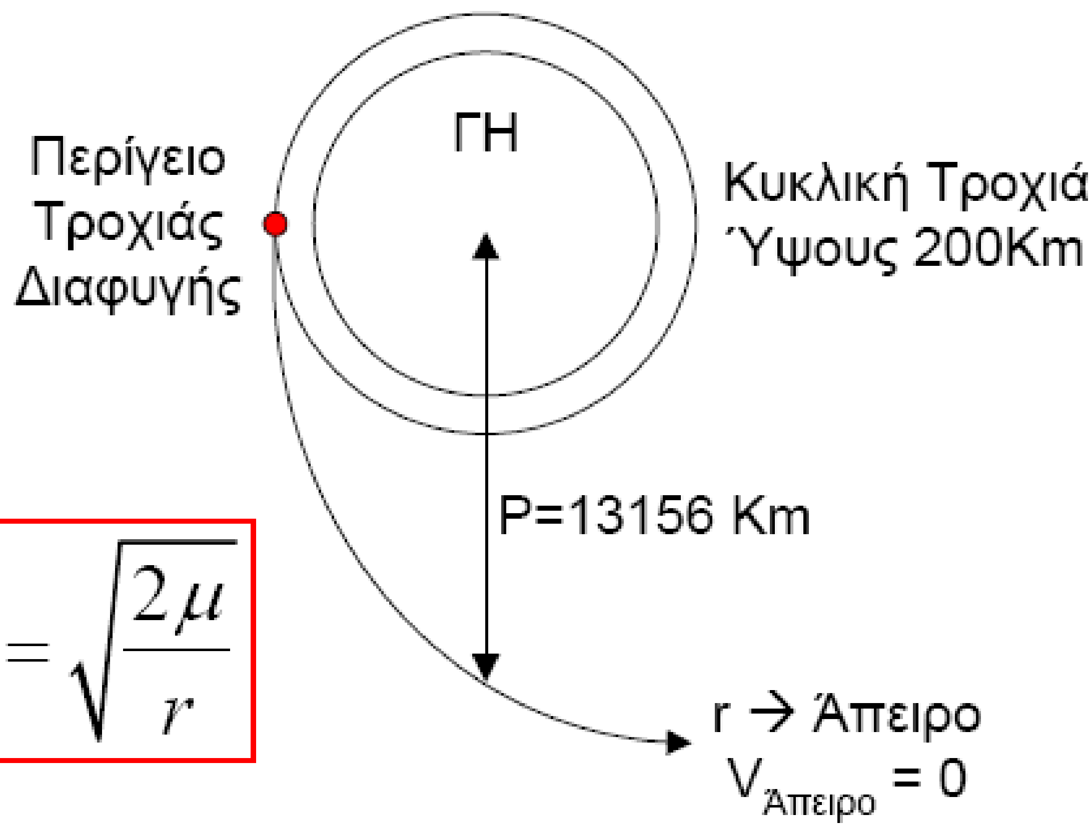
$$a = b = r \Rightarrow c = e = 0$$

Κυκλική Ταχύτητα Δορυφόρου

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

Ύψος (Km)	Ακτίνα (Km)	Περίοδος (sec)	Ταχύτητα (m/sec)
200	6578	5309	7784
290	6668	5419	7732
800	7178	6052	7450
20000	26378	42636	3887
35786	42164	86154	3075

Ταχύτητα Διαφυγής

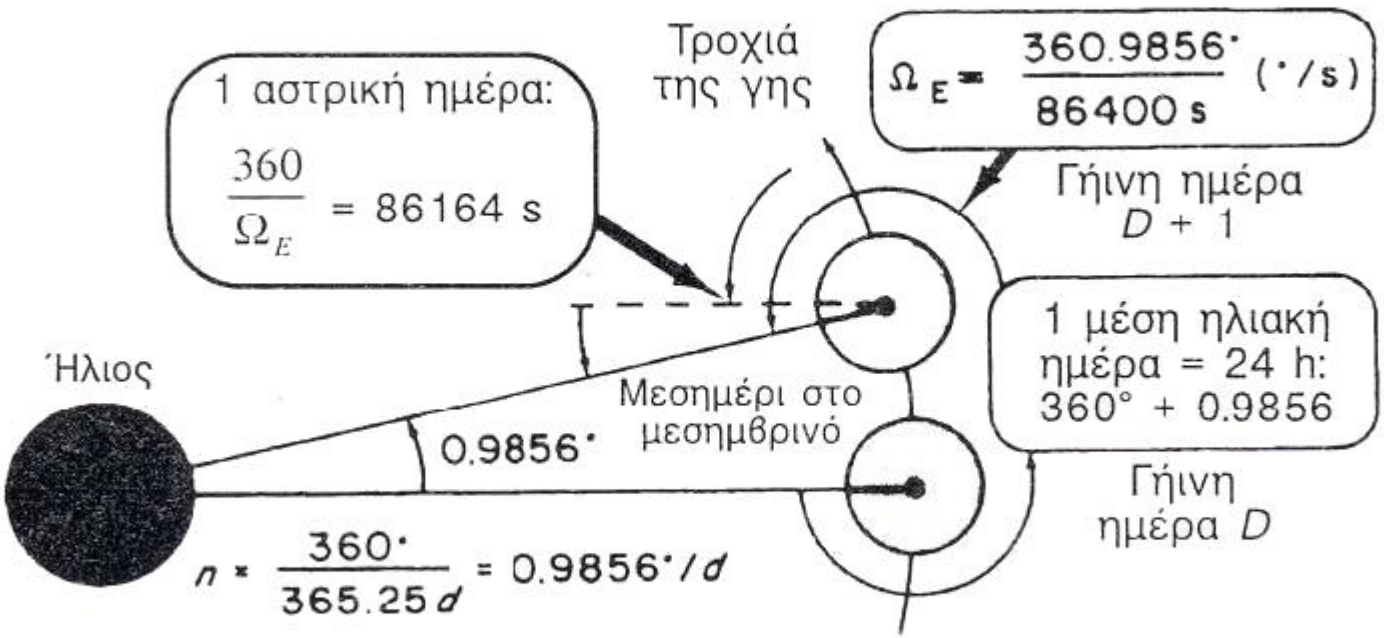


$$\boxed{V_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}}$$

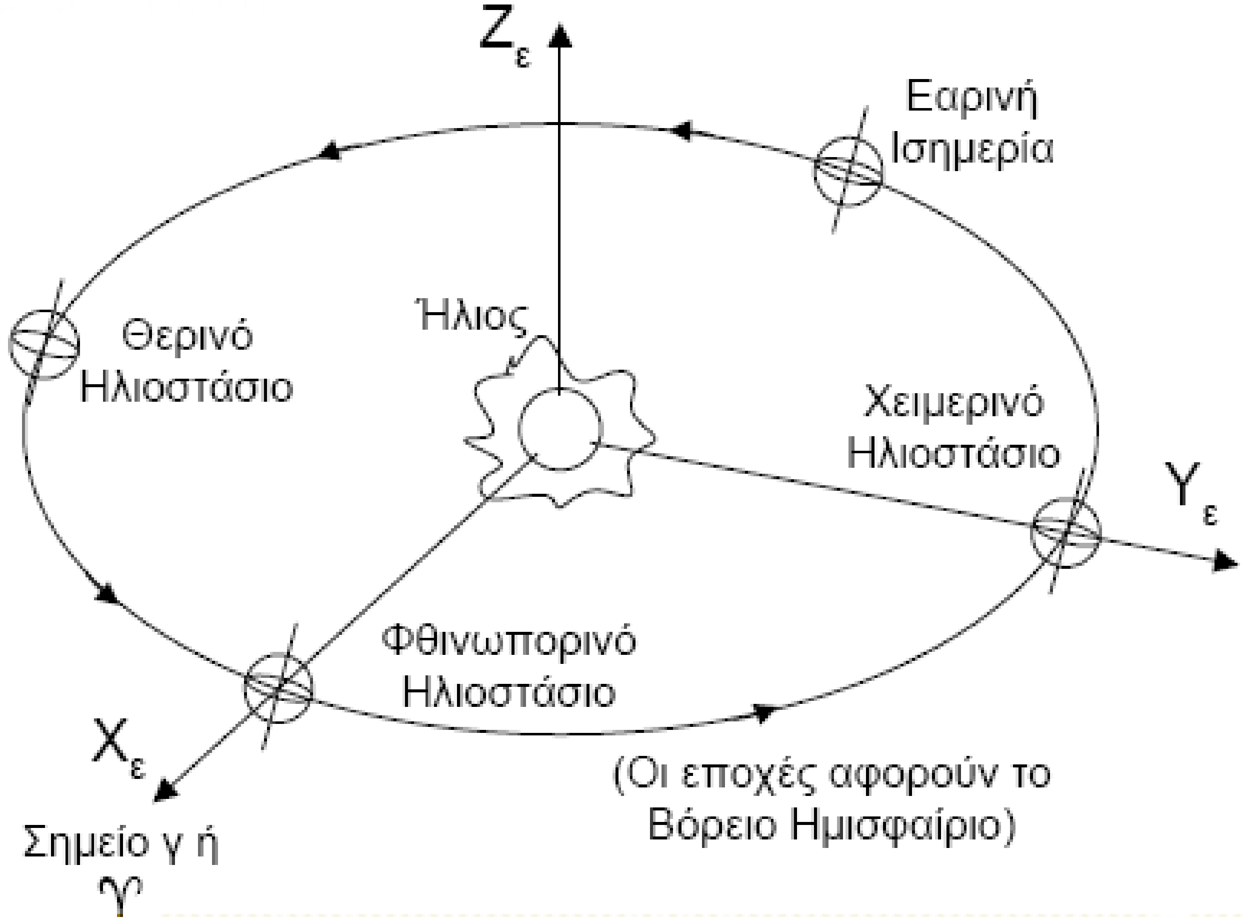
Μέση Αστρική & Μέση Ηλιακή Ημέρα

- Μέση Ηλιακή Ημέρα : το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του ήλιου από το μεσημβρινό μιας τοποθεσίας, διάρκειας 24h=86400sec
- Μέση Αστρική Μέρα : το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων ενός σταθερού άστρου ή του εαρινού σημείου γ, από το μεσημβρινό μιας τοποθεσίας. Ισούται με την περίοδο περιστροφής της Γης, 23h 56min 4,1sec ή 86164,1sec.

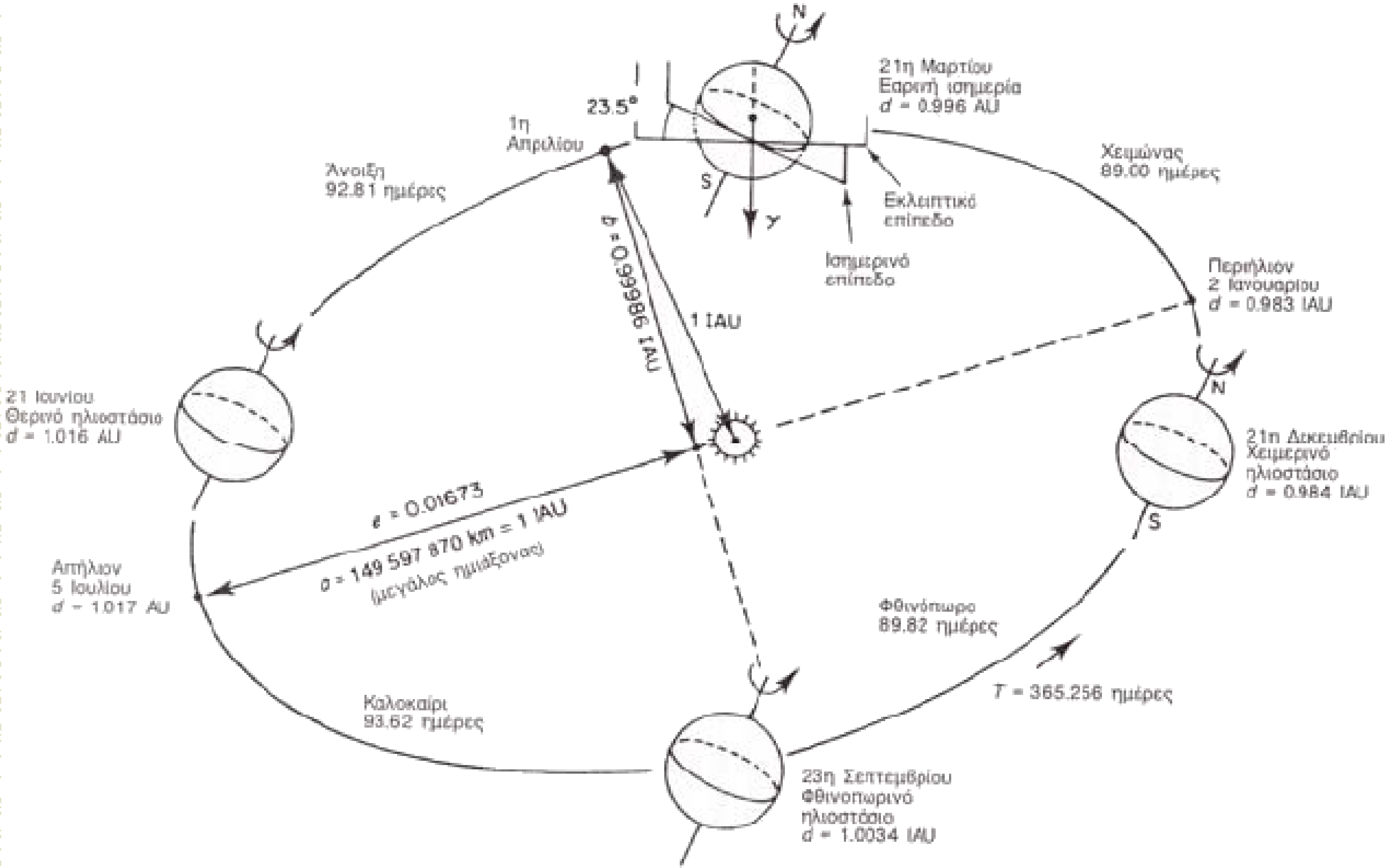
Διαφορά Μέσης Αστρικής & Μέσης Ηλιακής Ημέρας



Το Ηλιοκεντρικό - Εκλειπτικό Σύστημα Συντεταγμένων



Η Κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο



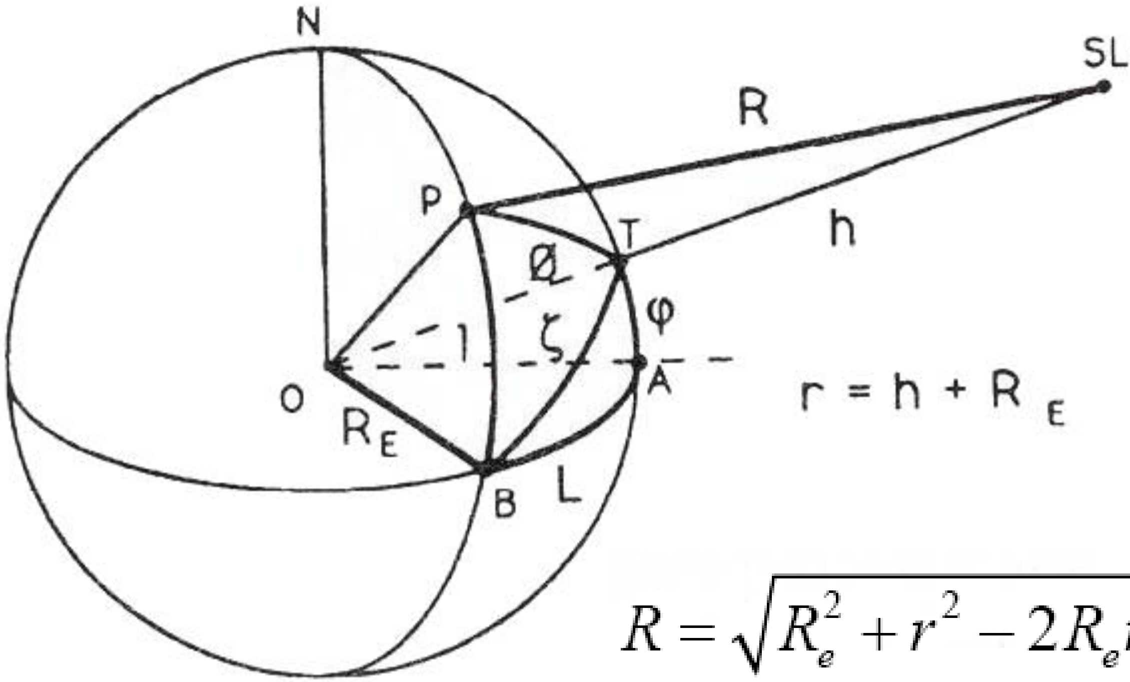
Στοιχεία της Κίνησης της Γης

- Διαρκεί περίπου 365.25 Ημέρες
- Εκκεντρότητα e=0.01673 (Περίπου Κύκλος)
- Μεγάλος Ημι-άξονας : α = 149.597.870 Km =
  = 1 Αστρονομική Μονάδα Απόστασης = 1 AU
- Μικρός Ημι-άξονας : b=0,99986 AU
- Απήλιο = 1,017 AU
- Περιήλιο = 0,983 AU
- Γωνία Εκλειπτικού και Ισημερινού Επιπέδου = $23{,}44^{o}$
- Η λοξότητα της εκλειπτικής μειώνεται κατά 47’’ ανά αιώνα.

Γεωμετρία Γης-Δορυφόρου

- Ίχνος Δορυφόρου (στην επιφάνεια της Γης) : είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της τομής του διανύσματος από το κέντρο της Γης στο δορυφόρο, με την επιφάνεια της Γης.
- Εκτός από την κίνηση του δορυφόρου υπάρχει και η περιστροφή της Γης που επηρεάζει το ίχνος ενός δορυφόρου.
- Για τον προσδιορισμό του ίχνους του δορυφόρου απαιτούνται
  - Το γεωγραφικό πλάτος
  - Το γεωγραφικό μήκος

Απόσταση Δορυφόρου από Σημείο στη Γη



$$R = \sqrt{R_e^2 + r^2 - 2R_e r\cos\phi}$$

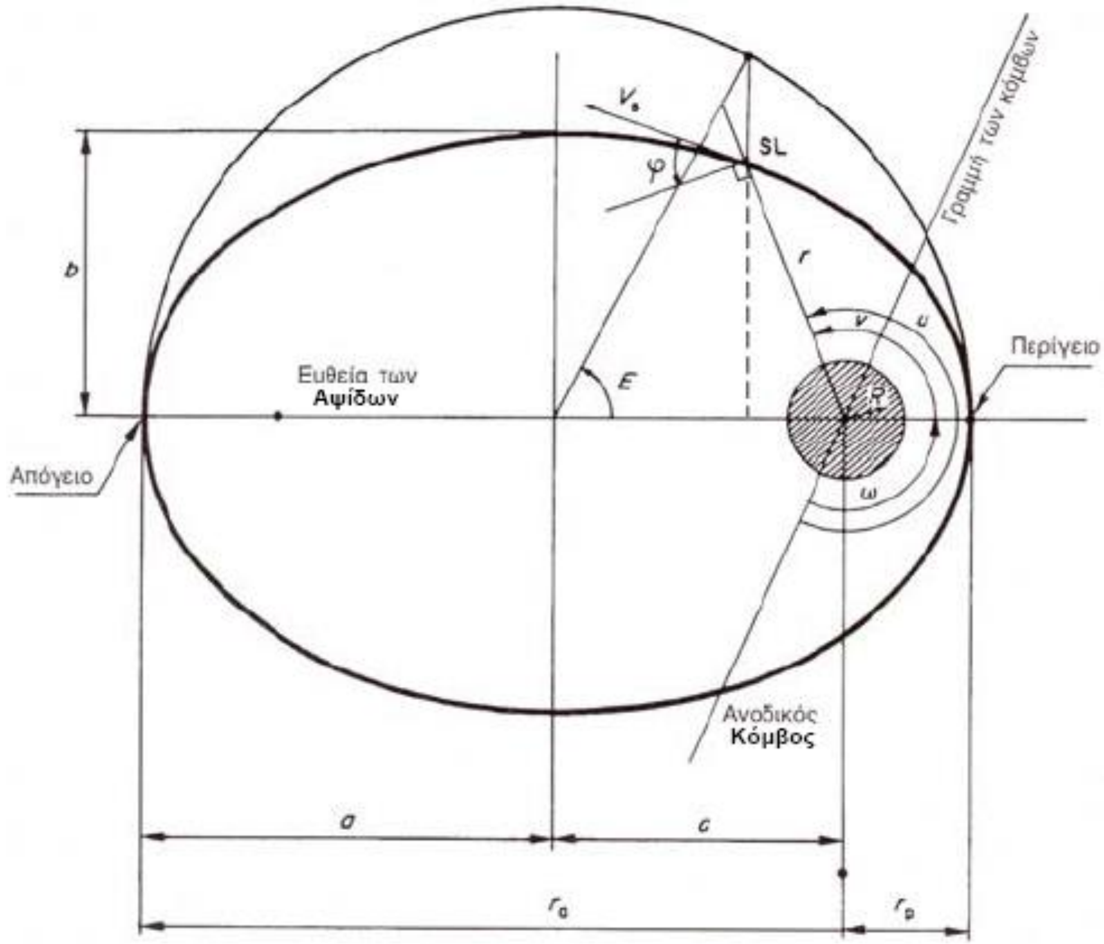
$$\cos\phi = \cos L\cos\varphi\cos l + \sin\varphi\sin l$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: $\varphi \neq \phi$

Τροχιές Γήινων Δορυφόρων - Ορισμοί

- Για τον πλήρη προσδιορισμό της θέσης ενός δορυφόρου απαιτείται η εξής πληροφορία
  - Γνώση του τύπου της Τροχιάς (2 από τις παραμέτρους a,b,c,e,r_p,r_a,)
  - Θέση του Δορυφόρου στην Τροχιά (Μία από τις Ανωμαλίες-Γωνίες)
  - Θέση της Τροχιάς στο Τροχιακό Επίπεδο (Όρισμα του Περιγείου)
  - Θέση Τροχιακού Επιπέδου στο Χώρο (Έγκλιση και Ορθή Άνοδος του Ανοδικού Κόμβου)

Θέση του Δορυφόρου στην Τροχιά



Θέση του Δορυφόρου στην Τροχιά

$$\boxed{r = \frac{p}{1+e\cos v} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos v}}$$

- Αληθής Ανωμαλία, v (True Anomaly) : Η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης του περιγείου και της διεύθυνσης του δορυφόρου.
- Είναι θετική στην κατεύθυνση κίνησης του δορυφόρου (0^o-360^o)

Εκκεντρική Ανωμαλία (Eccentric Anomaly)

- Εκκεντρική Ανωμαλία, E : Η γωνία που σχηματίζεται από τη διεύθυνση του περιγείου και την ακτίνα του κύριου κύκλου που διέρχεται από το σημείο του κύριου κύκλου που τέμνει η ευθεία που διέρχεται από το δορυφόρο και είναι κάθετη στον μεγάλο ημι-άξονα.

$$\boxed{\cos E = \frac{e + \cos\nu}{1 + e\cos\nu}}$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

Εκκεντρική Ανωμαλία (Eccentric Anomaly)

- ΠΡΟΣΟΧΗ : Στον υπολογισμό του arctan πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τη συμπεριφορά των calculators ή των PCs. Δίνουν μόνο βασικές τιμές γωνιών, δηλαδή arctan(1.732)=60^o, ενώ επίσης tan(240^o)=1.732. Το ίδιο ισχύει για cos και sin.
- Λύση για την προηγούμενη εξίσωση:

$$E = 2\arctan\left[\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left[\frac{v}{2}\right]\right] + 360^o n$$

$$n = \begin{cases} 0 & \textbf{για} \quad -180^o \le v \le 180^o \\ 1 & \textbf{για} \quad 180^o < v \le 540^o \end{cases}$$

Σχέση Αληθούς και Εκκεντρικής Ανωμαλίας

$$\boxed{\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}}$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right)}$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{v-E}{2}\right) = \frac{A\sin E}{1 - A\cos E} = \frac{A\sin v}{1 + A\cos v}}$$

όπου

$$\boxed{A = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}}$$

Εισάγοντας στην εξίσωση της τροχιάς την Ε, προκύπτει

$$\boxed{r = a\left(1 - e\cos E\right)}$$

Μέση Κίνηση και Μέση Ανωμαλία

- Μέση Κίνηση (Mean Movement), n : Είναι η μέση γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου με περίοδο T_α στην τροχιά του.

$$\boxed{n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}} \qquad \textbf{(rad/sec)}$$

- Μέση Ανωμαλία (Mean Anomaly), M : Είναι η αληθής ανωμαλία του δορυφόρου σε μια κυκλική τροχιά της ίδιας περιόδου T.

$$\boxed{M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)\left(t - t_p\right) = nt - nt_p \qquad \textbf{(rad)}}$$

Εξίσωση του Kepler

$$\boxed{M = E - e\sin E}$$ (rad)

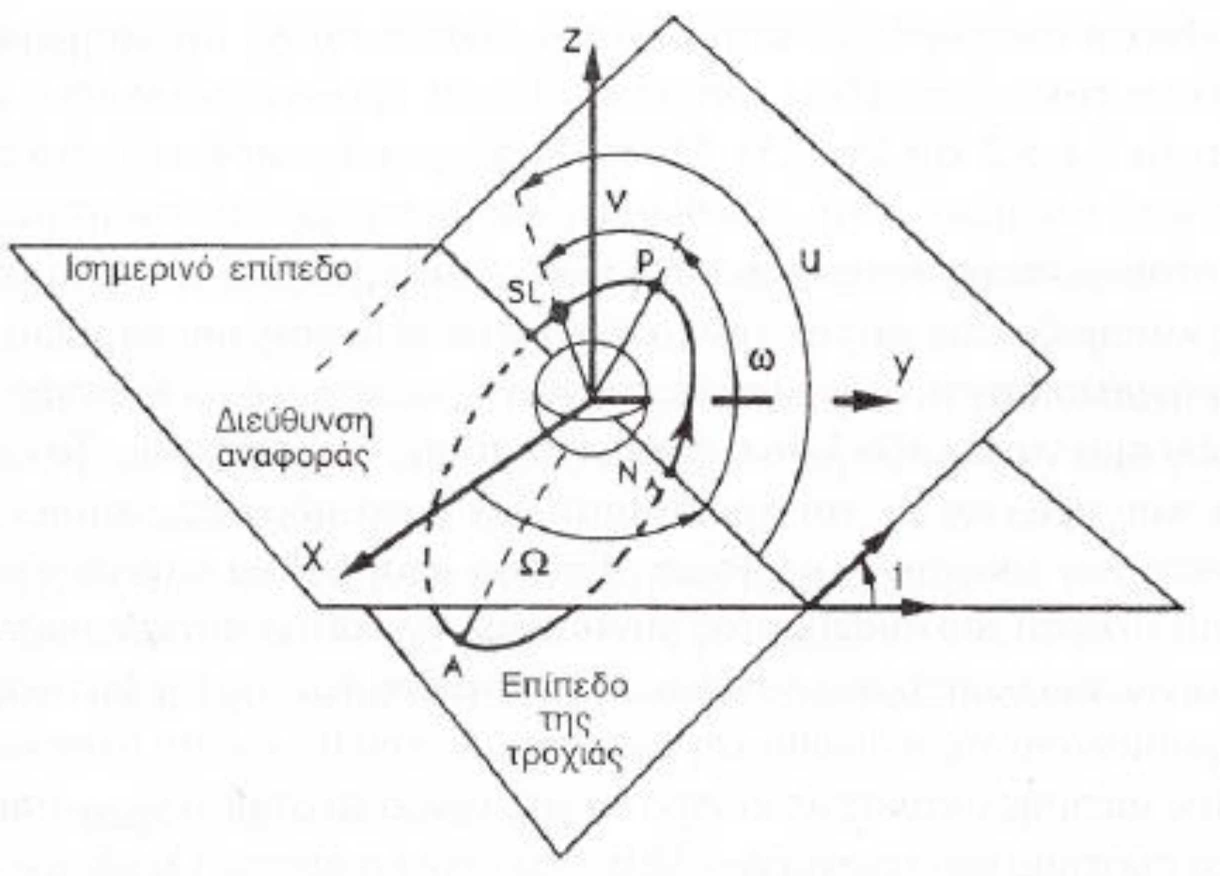
- Αν ορίσουμε ως Δt το χρονικό διάστημα από τη στιγμή διέλευσης από το περίγειο, δηλαδή $\Delta t = t - t_p$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta t &= \frac{T}{2\pi}M = \frac{T}{2\pi}\left[E - e\sin E\right] \\ &= \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}M = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left[E - e\sin E\right]\end{aligned}}$$

Θέση του Τροχιακού Επιπέδου στο Χώρο

- Γραμμή των Κόμβων (Line of Nodes) : Είναι η τομή του τροχιακού επιπέδου με το ισημερινό επίπεδο. Η γραμμή που ενώνει δύο σημεία της τροχιάς που ονομάζονται κόμβοι.
- Ανοδικός Κόμβος (Ascending Node) : Το σημείο της τροχιάς που ανήκει στη γραμμή των κόμβων στην κατεύθυνση που ο δορυφόρος περνά από το επίπεδο του ισημερινού με κατεύθυνση από Νότο προς Βορρά.
- Καθοδικός Κόμβος (Descending Node) : Αντίστοιχα στην κατεύθυνση από Βορρά προς Νότο.

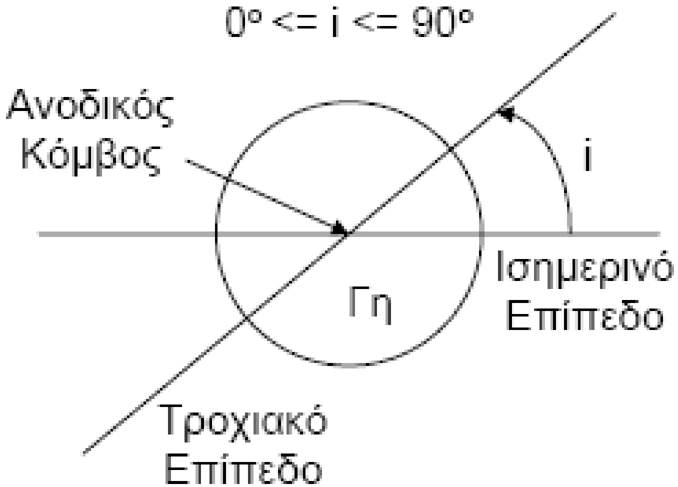
Θέση του Τροχιακού Επιπέδου στο Χώρο

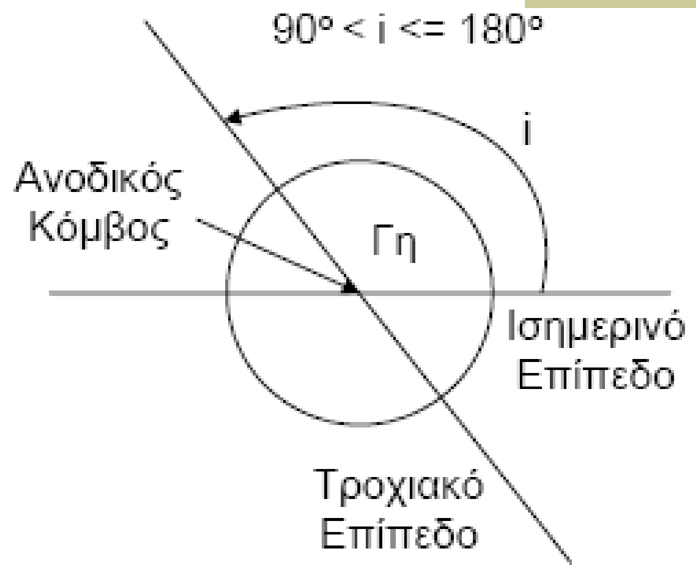


Έγκλιση ή Κλίση του Τροχιακού Επιπέδου

- Έγκλιση (inclination), i, είναι η γωνία που ορίζεται στον ανοδικό κόμβο μεταξύ της καθέτου στη γραμμή των κόμβων στο ισημερινό επίπεδο (με κατεύθυνση προς τα ανατολικά) και της καθέτου στη γραμμή των κόμβων στο τροχιακό επίπεδο (στην κατεύθυνση κίνησης του δορυφόρου).
- Εκτιμάται θετικά στην ορθή φορά μεταξύ 0^o και 180^o.

Έγκλιση



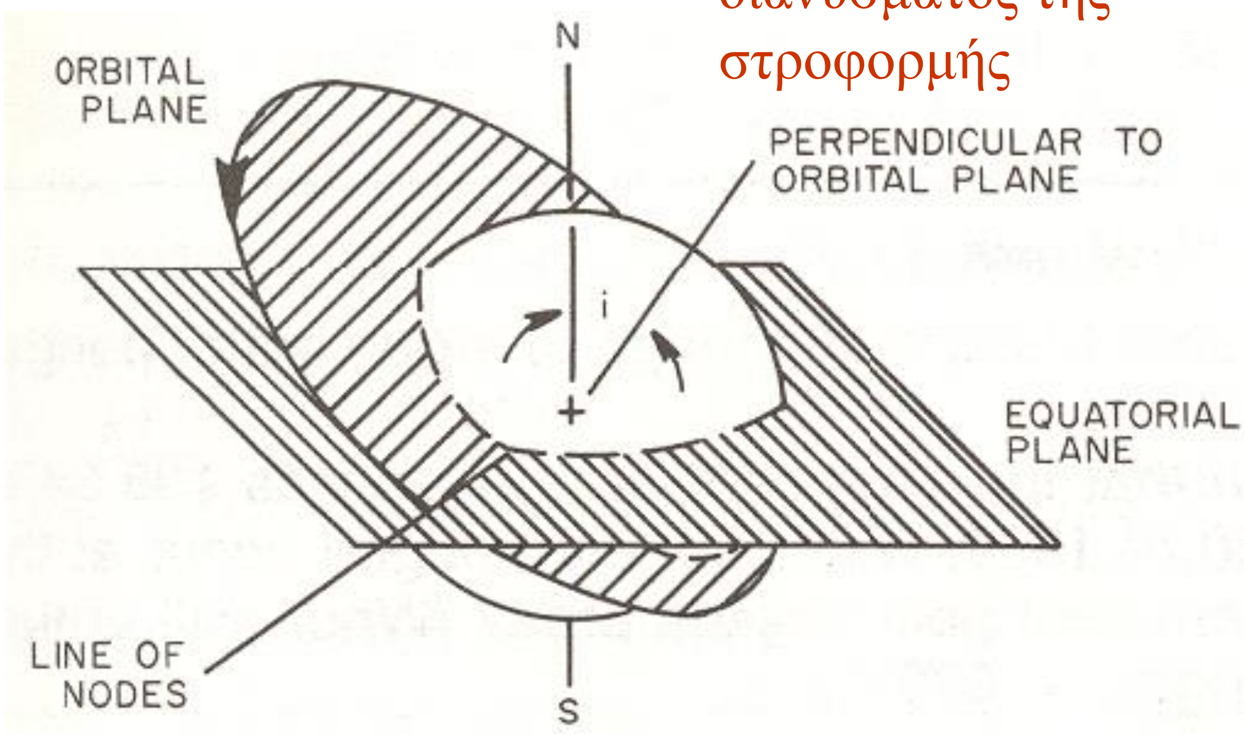


Ο δορυφόρος περιστρέφεται προς την ίδια διεύθυνση, όπως και η γη, δηλαδή ανατολικά. Τέτοιες τροχιές καλούνται Ορθές ή Μη-Ανάδρομες

Ο δορυφόρος περιστρέφεται αντίθετα προς τη διεύθυνση περιστροφής της γης, δηλαδή δυτικά. Τέτοιες τροχιές καλούνται Ανάδρομες

Εναλλακτικά η Έγκλιση

Το κάθετο διάνυσμα έχει τη διεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής



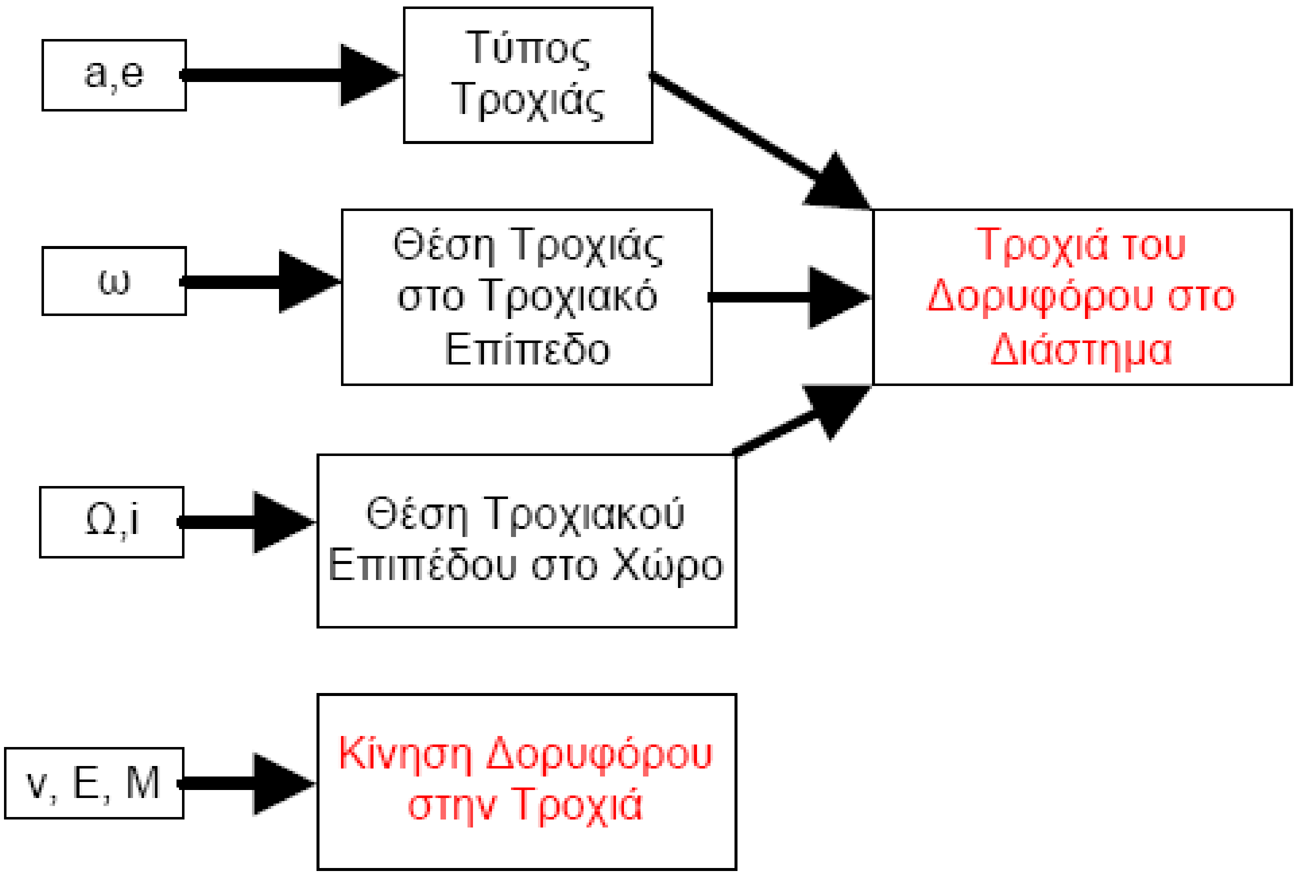
Ορθή Άνοδος του Ανοδικού Κόμβου

- Ορθή Άνοδος του Ανοδικού Κόμβου (Right Ascension of Ascending Node, RAAN), Ω : είναι η γωνία που σχηματίζεται από τον άξονα Ox, δηλαδή την κατεύθυνση της εαρινής ισημερίας και του διανύσματος που ενώνει το κέντρο της γης με τον Ανοδικό Κόμβο.
- Είναι γωνία που εκτιμάται θετική με εύρος από 0^o ως 360^o.
- Ουσιαστικά μας δίνει την περιστροφή του τροχιακού επιπέδου ως προς τον άξονα Oz, μετρούμενη από τον Ox.

Θέση της Τροχιάς στο Τροχιακό Επίπεδο

- Ο προσανατολισμός της τροχιάς στο τροχιακό επίπεδο ορίζεται από το Όρισμα του Περιγείου (Argument of Perigee), ω, που είναι η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης του Ανοδικού Κόμβου και της διεύθυνσης του Περιγείου.
- Είναι μια γωνία που εκτιμάται θετικά από 0^o ως 360^o, στην κατεύθυνση κίνησης του δορυφόρου.

Συμπέρασμα



a,e
Τύπος Τροχιάς
ω
Θέση Τροχιάς στο Τροχιακό Επίπεδο
Τροχιά του Δορυφόρου στο Διάστημα
Ω,i
Θέση Τροχιακού Επιπέδου στο Χώρο
ν, Ε, Μ
Κίνηση Δορυφόρου στην Τροχιά

Αλγόριθμος Προσδιορισμού του Ίχνους

- Υπολογισμός ίχνους (Sub Satellite Point, SSP) για χρόνο t από το περίγειο.
- Γνωστά : *ω, i, e, T* ή *a*, ή *n*, και λ_{per} (αρχικό γεωγρ. μήκος περιγείου).

$$\varphi_{per} = \arcsin\left[\sin(\omega)\sin(i)\right]$$

$$\varphi_{SSP} = \arcsin\left[\sin(\omega + v(t))\sin(i)\right]$$

$$v(t) = \arccos\left[\frac{\cos E(t) - e}{1 - e\cos E(t)}\right]$$

Αλγόριθμος Προσδιορισμού του Ίχνους

- Η εκκεντρική ανωμαλία υπολογίζεται από τη Μέση Ανωμαλία Μ, και την εκκεντρότητα (Εφαρμογή Newton-Raphson στον τύπο του Kepler).

$$\lambda_{SSP}(t) = \lambda_{per} + S_1(D_1 + D_2) - D_3$$

$$D_1 = \arccos\left[\frac{\cos\omega}{\cos\varphi_{per}}\right]$$

$$If \quad \omega \le \pi \quad then \quad D_1 = -D_1$$

Αλγόριθμος Προσδιορισμού του Ίχνους

$$D_2 = \arccos\left[\frac{\cos\left(\omega + v(t)\right)}{\cos\varphi_{SSP}}\right]$$

$$D_3 = t * 0,250684$$

$$If \quad \varphi_{SSP} < 0 \quad then \quad D_2 = -D_2$$

$$If \quad i > 90^o \quad then \quad S_1 = -1 \quad otherwise \quad S_1 = 1$$

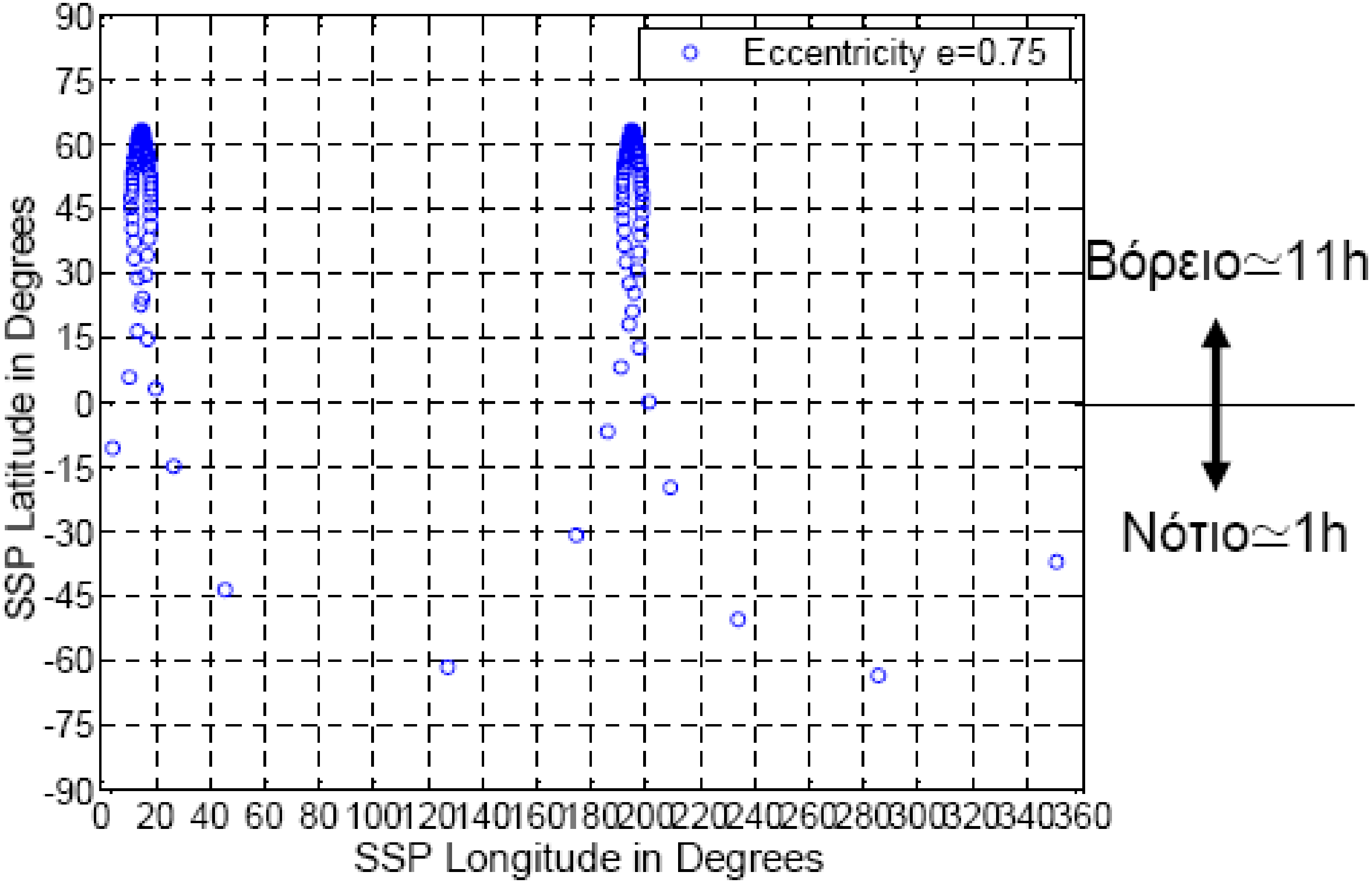
Τροχιές MOLNYA

Περίοδος (T)	12h
Μισή Αστρική Μέρα	11h 58min 2sec
Μεγάλος Ημιάξονας (a)	26556Km
Κλίση (i)	63,44°
Εκκεντρότητα (e)	0.6 ως 0.75
Ύψος Περιγείου (h_p)	$a(1-e)-R_e$
(π.χ. e=0.71)	1250Km
Ύψος Απογείου (h_a)	$a(1+e)-R_e$
(π.χ. e=0.71)	39105Km

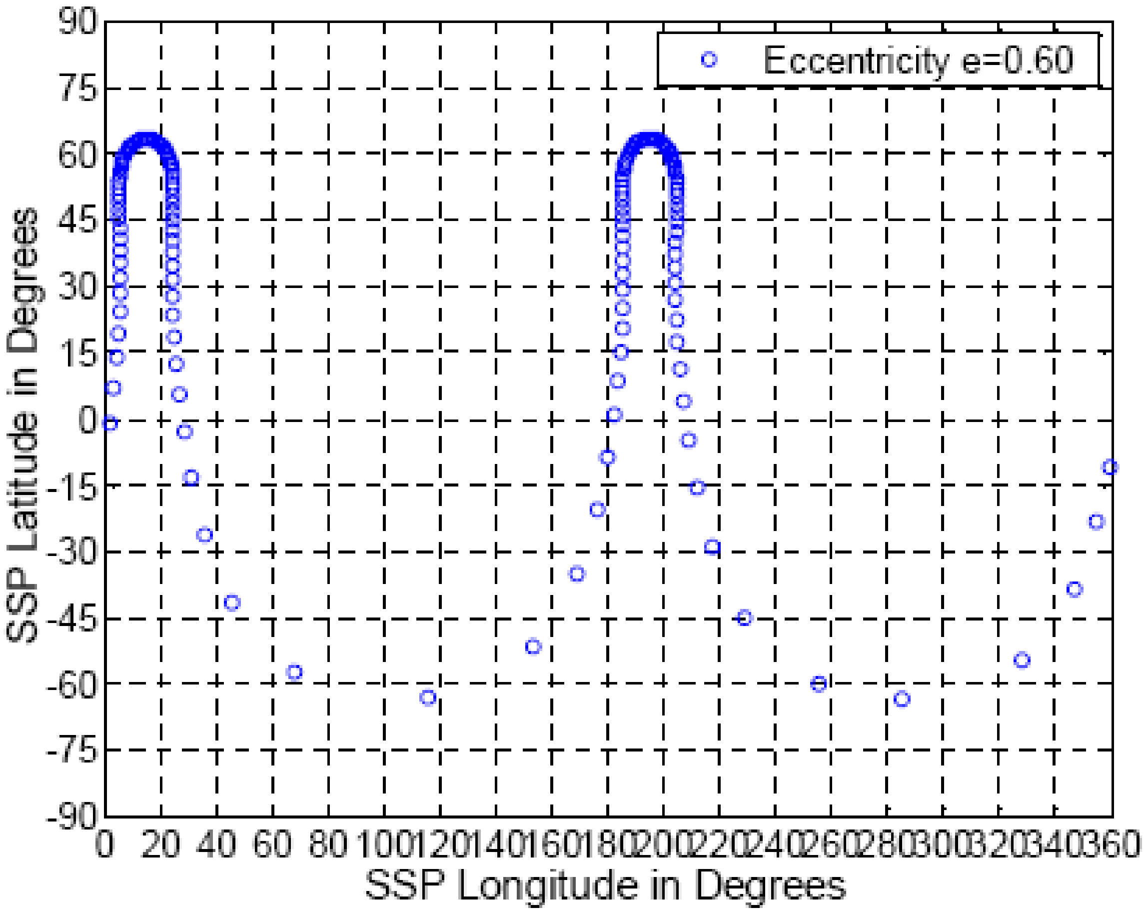
Τροχιές MOLNYA

- Αν θεωρήσουμε $\omega=270^o$, τότε στο απόγειο θα έχουμε $v=180^o$. Άρα $(\omega+v)=270^o+180^o=360^o+90^o$, άρα $\sin(\omega+v)=1$
- Άρα το γεωγραφικό πλάτος του ίχνους στο απόγειο $\varphi=\arcsin[\sin(\omega+v)*\sin(i)]=i=63,45^o$
- Αφού $\omega=270^o$, η διέλευση από τον ισημερινό γίνεται για $v=90^o$, άρα η εκκεντρική ανωμαλία του ανοδικού κόμβου για $e=0.745$ είναι $E_N\approx42^o$. Άρα $M_N \approx 13,43^o$.
- Άρα μπορώ να υπολογίσω το χρόνο t_N από το περίγειο στον ανοδικό κόμβο, $t_N \approx 27min \approx 0,5h$. Άρα ο δορυφόρος παραμένει στο νότιο ημισφαίριο για χρόνο $2\ t_N \approx 1h$ και 12-1=11h στο βόρειο.

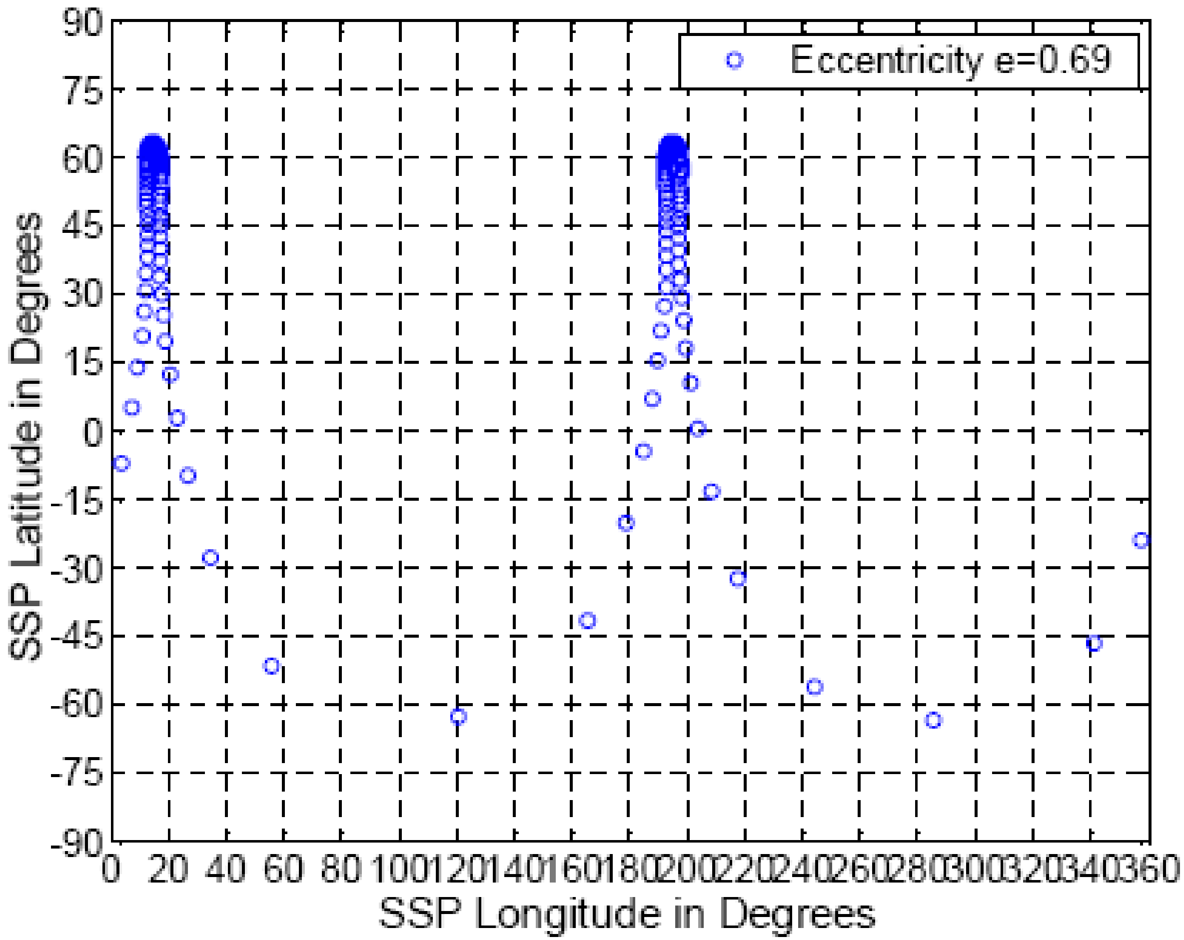
Παράδειγμα Ίχνους για MOLNYA



Ίχνος και Εκκεντρότητα στις MOLNYA



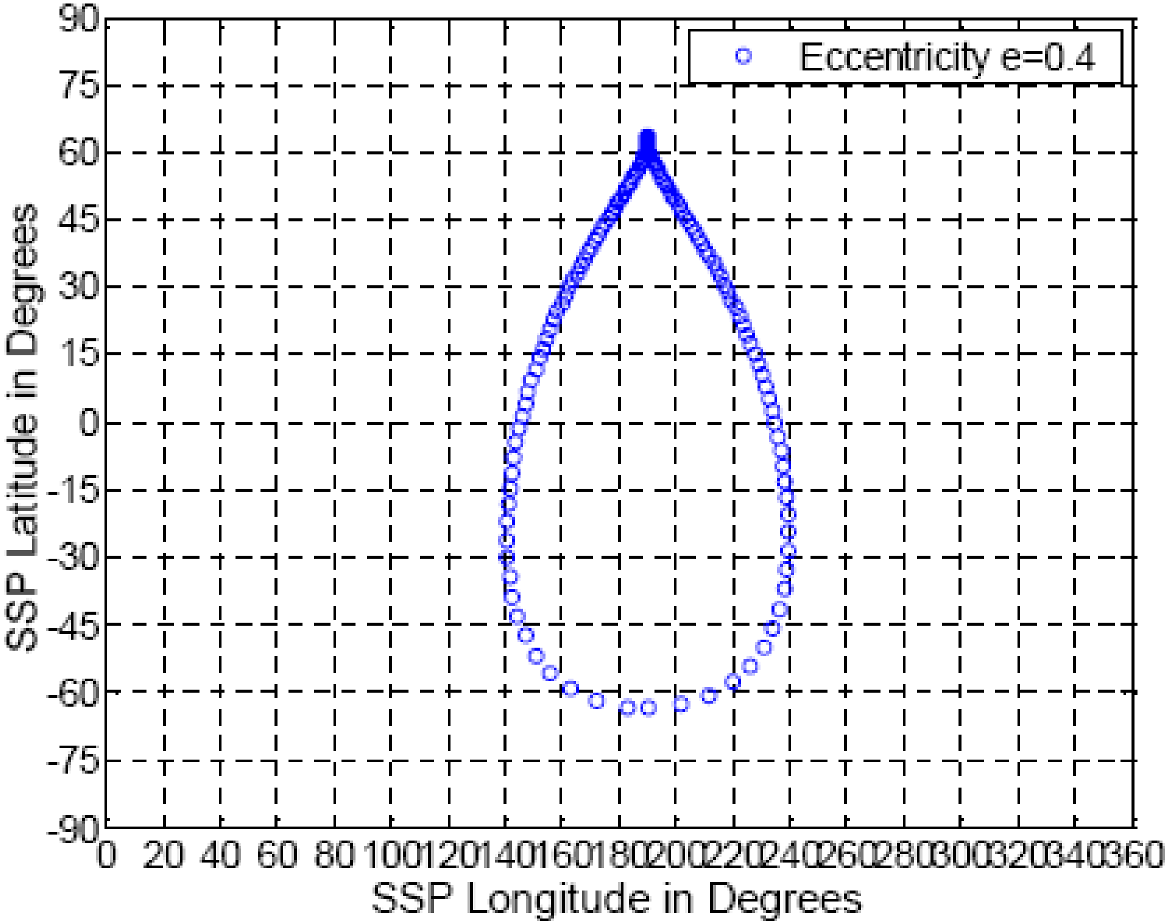
Ίχνος και Εκκεντρότητα στις MOLNYA



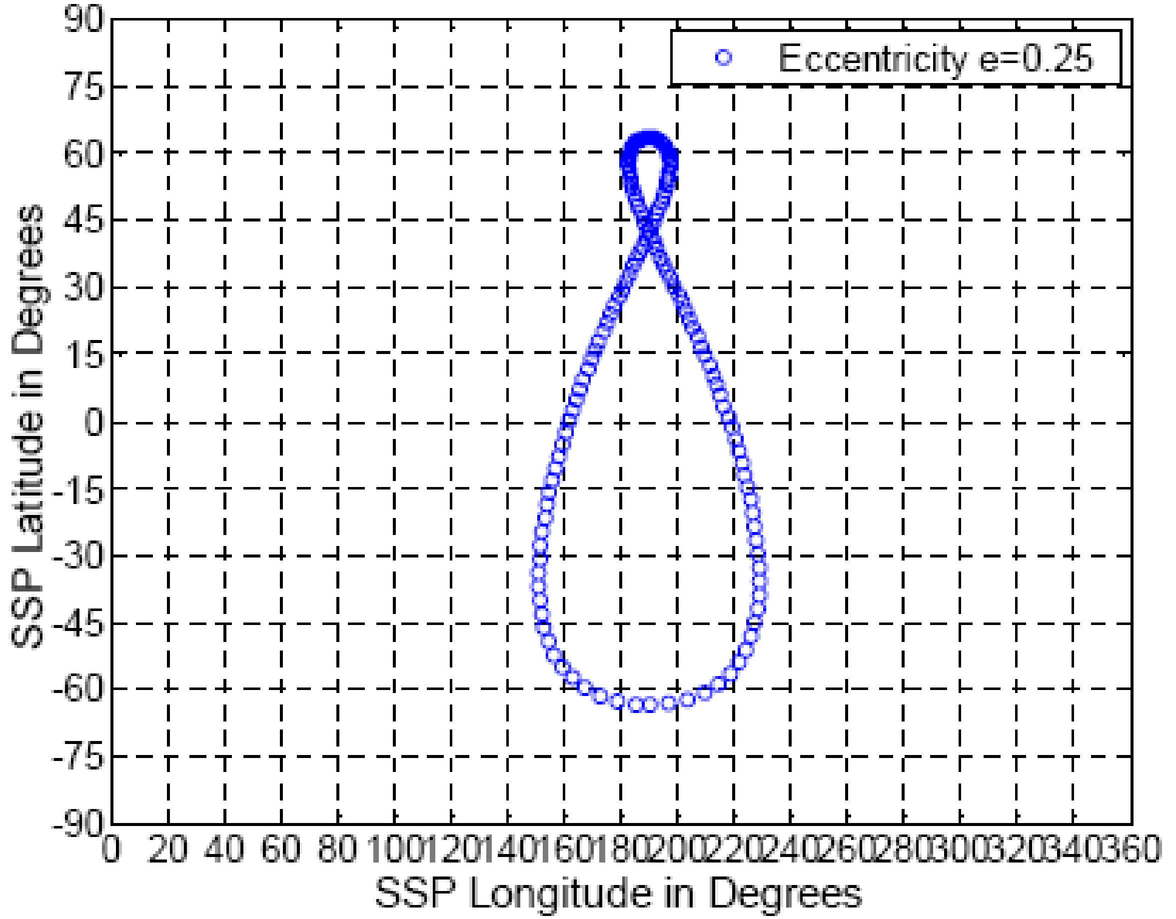
Τροχιές TUNDRA

Περίοδος (T)	24h
Αστρική Μέρα	23h 56min 4sec
Μεγάλος Ημιάξονας (a)	42164Km
Κλίση (i)	63,44°
Εκκεντρότητα (e)	0.25 ως 0.40
Ύψος Περιγείου (h_p)	$a(1-e)-R_e$
(π.χ. e=0.25)	25231Km
Ύψος Απογείου (h_a)	$a(1+e)-R_e$
(π.χ. e=0.25)	46340Km

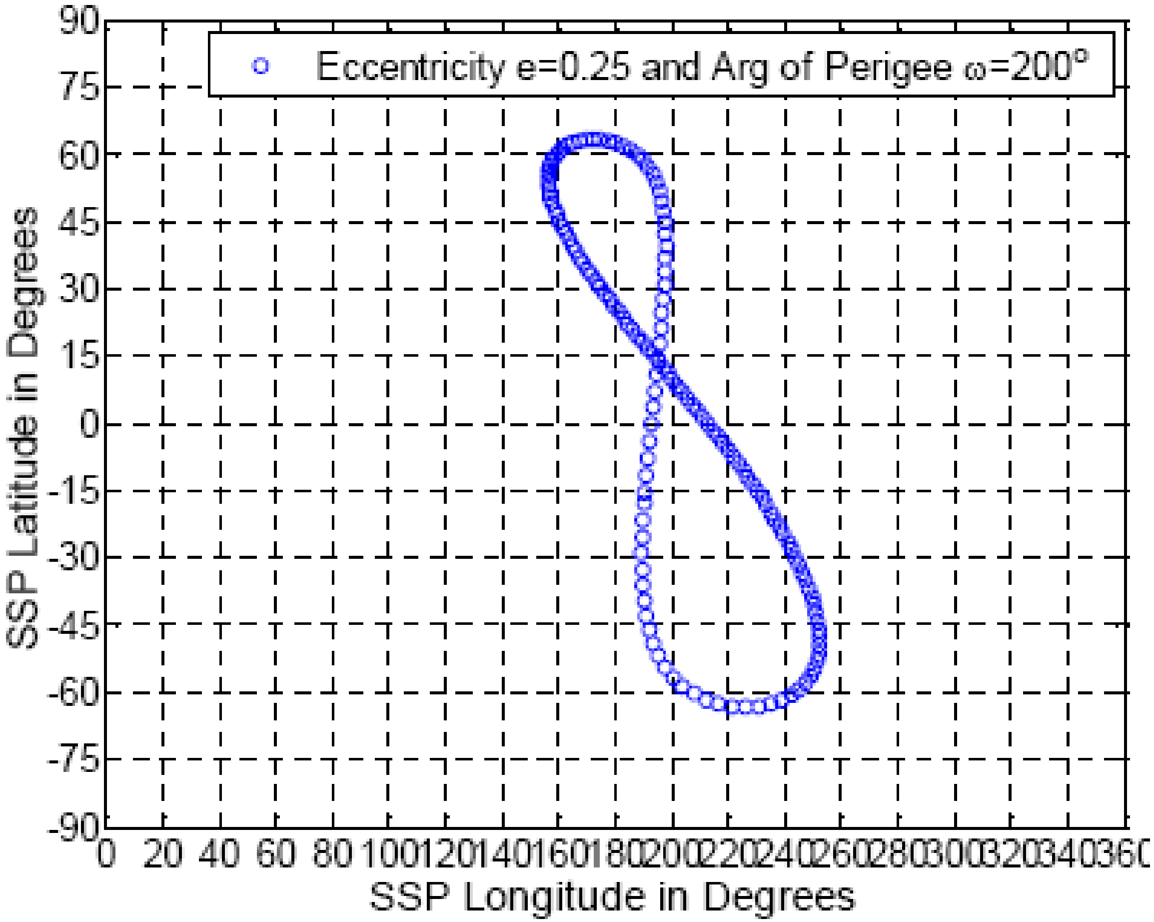
Ίχνος και Εκκεντρότητα στις TUNDRA



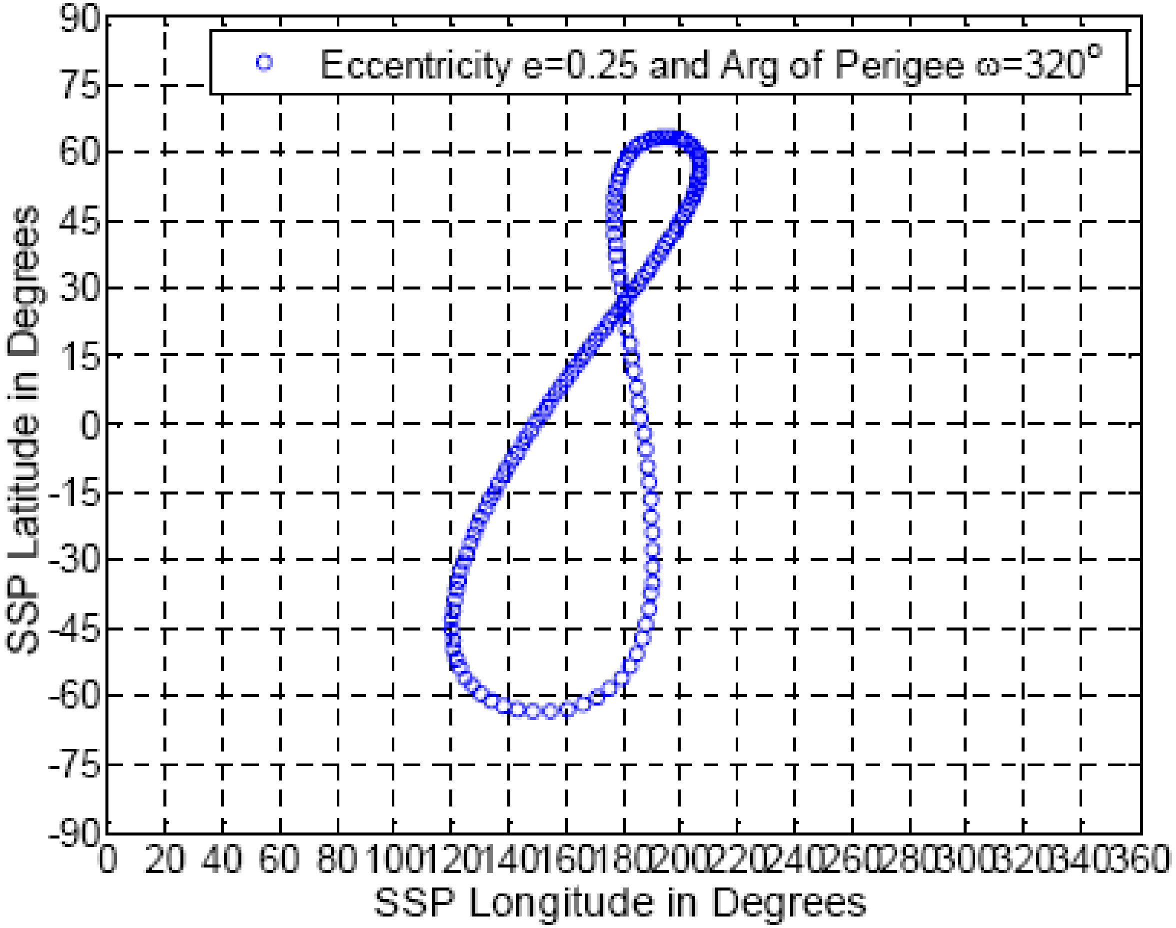
Ίχνος και Εκκεντρότητα στις TUNDRA



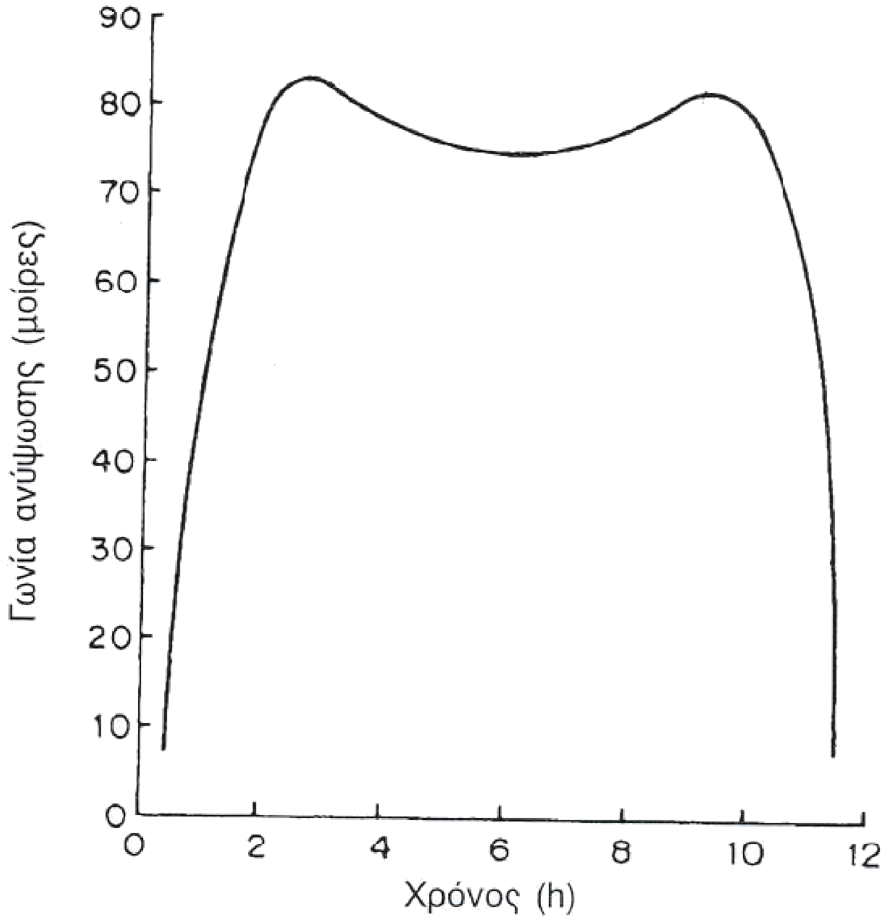
Ίχνος και Όρισμα του Περιγείου για TUNDRA



Ίχνος και Όρισμα του Περιγείου για TUNDRA



Ορατότητα στο Απόγειο για MOLNYA



Πλεονεκτήματα Ελλειπτικών Τροχιών με Μη-Μηδενική Κλίση

- Μεγάλη Γωνία Ανύψωσης
  - Αποφυγή παρεμποδίσεων
  - Ελαχιστοποίηση θορύβου από έδαφος και παρεμβολές
  - Αποφυγή ανίχνευσης δορυφόρου

Μειονεκτήματα Ελλειπτικών Τροχιών με Μη-Μηδενική Κλίση

- Μεταγωγή μεταξύ δορυφόρων
- Μεταβολή της απόστασης
  - Μεταβολή χρόνου μετάδοσης (μέχρι 52msec για MOLNYA).
  - Εμφάνιση Doppler (14KHz για MOLNYA και 6KHz για TUNDRA στα 1,6 GHz).
  - Μεταβολή επιπέδου ισχύος του λαμβανόμενου σήματος
  - Τροποποίηση κάλυψης των δορυφορικών κεραιών (επιφάνεια Γης και κέρδος κεραίας)

Μειονεκτήματα Ελλειπτικών Τροχιών με Μη-Μηδενική Κλίση (συνέχεια)

- Ακτινοβολία (Ζώνες Van-Allen) και μείωση χρόνου ζωής
- Διαταράξεις της τροχιάς σε περιπτώσεις που το περίγειο έχει μικρό ύψος (ο δορυφόρος υπόκειται έντονα στην ασυμμετρία του γήινου βαρυτικού δυναμικού)

Κυκλικές Γεωσύγχρονες Τροχιές με Μη-Μηδενική Κλίση

- Χαρακτηριστικά
  - e=0
  - T=Te≈24h
  - Η κίνηση του δορυφόρου στην τροχιά γίνεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.
  - Αντίθετα η προβολή στο ισημερινό επίπεδο δεν έχει σταθερή ταχύτητα.
  - Το μέγιστο γεωγραφικό πλάτος που μπορεί να επιτευχθεί είναι ίσο με την τιμή της έγκλισης i.

Κυκλικές Γεωσύγχρονες Τροχιές με Μη-Μηδενική Κλίση

- Χαρακτηριστικά (συνέχεια)
  - Το μέγιστο γεωγραφικό μήκος δίνεται από την

$$\lambda_{\max} = \arcsin\left(\frac{1-\cos i}{1+\cos i}\right)$$

  - Το αντίστοιχο γεωγραφικό πλάτος για λ_{max}

$$\varphi = \sqrt{2}\sin\left(\frac{i}{2}\right)$$

Υπο-Σύγχρονες Κυκλικές Με Μηδενική Κλίση

Περίοδος (Ώρες)	Ύψος (Km)	Αρ. Διαβάσεων	Διάρκεια Ορατότητας σε κάθε διάβαση (h)	
			Στον Ισημερινό	Σε γεωγρ. Πλάτος ±45°
24	35786	Σταθερός	Συνεχής	Συνεχής
12	20240	1	10.1	9.3
8	13940	2	4.8	4.2
6	10390	3	3.0	2.5
3	4190	7	1.0	0.6

Γεωστατικές Τροχιές (GEO)

Εκκεντρότητα	e	0
Έγκλιση	i	0
Περίοδος	$T=T_e$	23h 56min 4sec
Μεγάλος Ημιάξονας	a=r	42164,2 Km
Ταχύτητα	$V_s=sqrt(a^3/\mu)$	3075 m/sec
Ύψος Δορυφόρου	h	35786,1 Km
Μέση Ισημερινή Ακτίνα	R_e	6378,1 Km
Λόγος	h/R_e	6,614

Απόσταση Δορυφόρου από Επίγειο Σταθμό

$$R^2 = R_e^2 + r^2 - 2rR_e \cos\phi$$

$$r = R_e + h = 42164,2Km$$

$$\cos\phi = \cos L \cos l$$

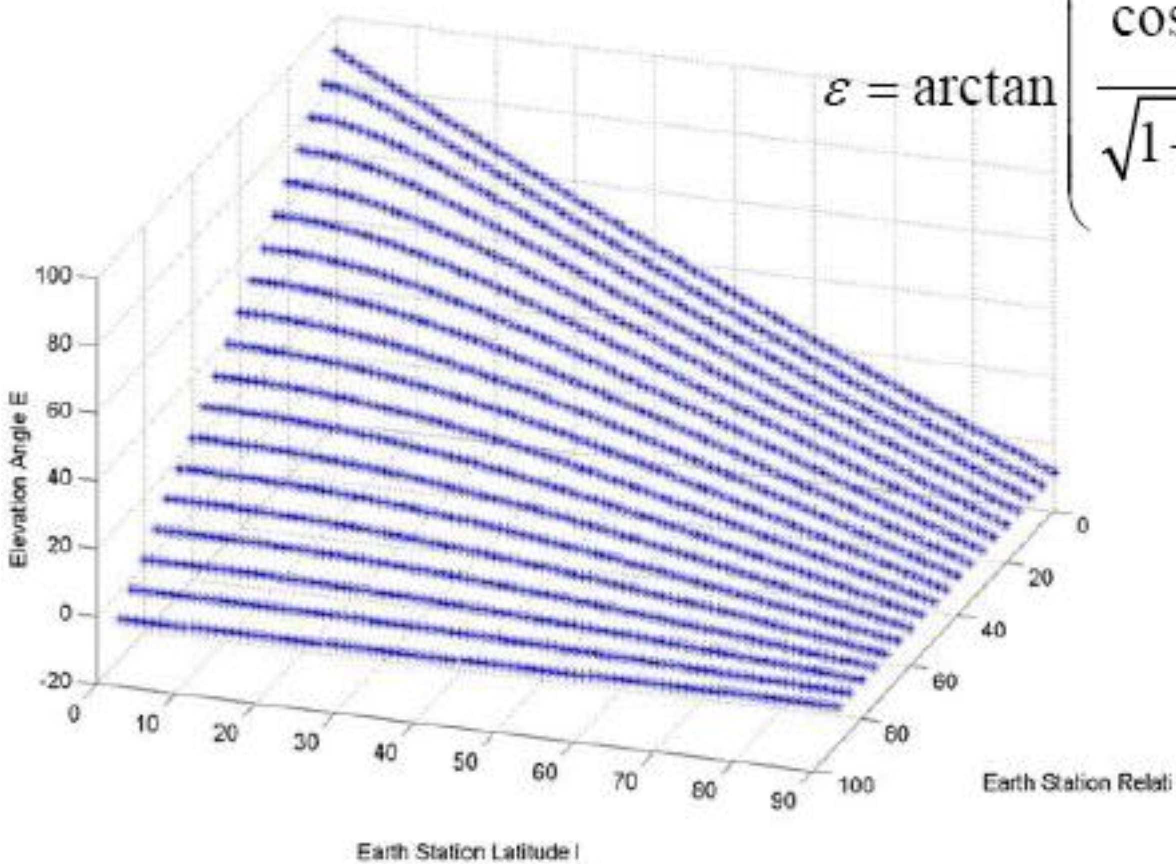
Όπου

L : το σχετικό γεωγραφικό μήκος του δορυφόρου ως προς το σταθμό

l : το γεωγραφικό πλάτος του σταθμού

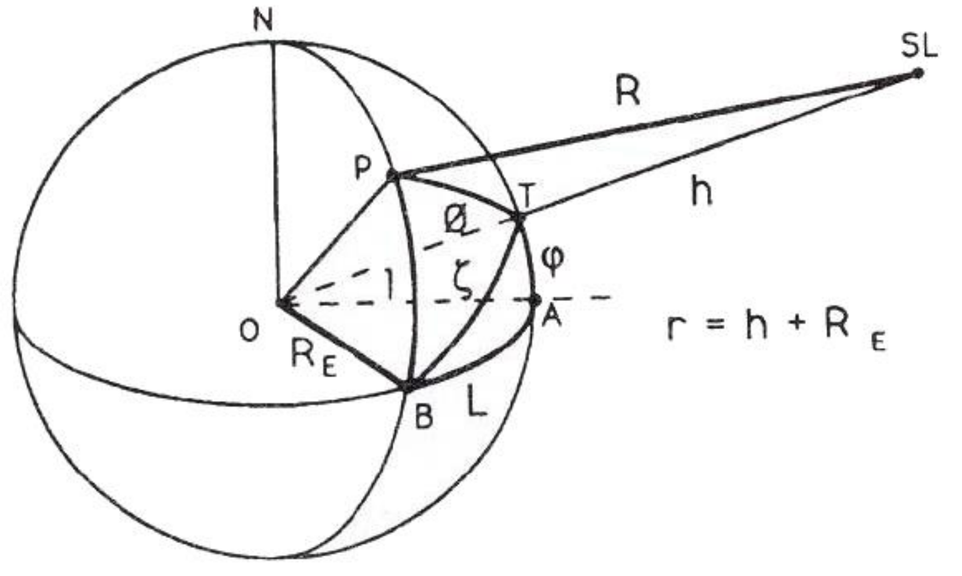
Γωνία Ανύψωσης

$$\varepsilon = \arctan\left(\frac{\cos\phi - \frac{R_e}{r}}{\sqrt{1-\cos^2\phi}}\right)$$



Γωνία Αζιμουθίου

- Γωνία Αζιμουθίου, Α : η γωνία που μετράμε επί του οριζοντίου επιπέδου της τοποθεσίας, μεταξύ της διεύθυνσης του γεωγραφικού Βορρά και της τομής του επιπέδου OPS. Είναι η γωνία NPT στο ομώνυμο σφαιρικό τρίγωνο.



Γωνία Αζιμουθίου

$$a = \arcsin\left(\frac{\sin L}{\sin \phi}\right) \qquad \phi > 0, L > 0$$

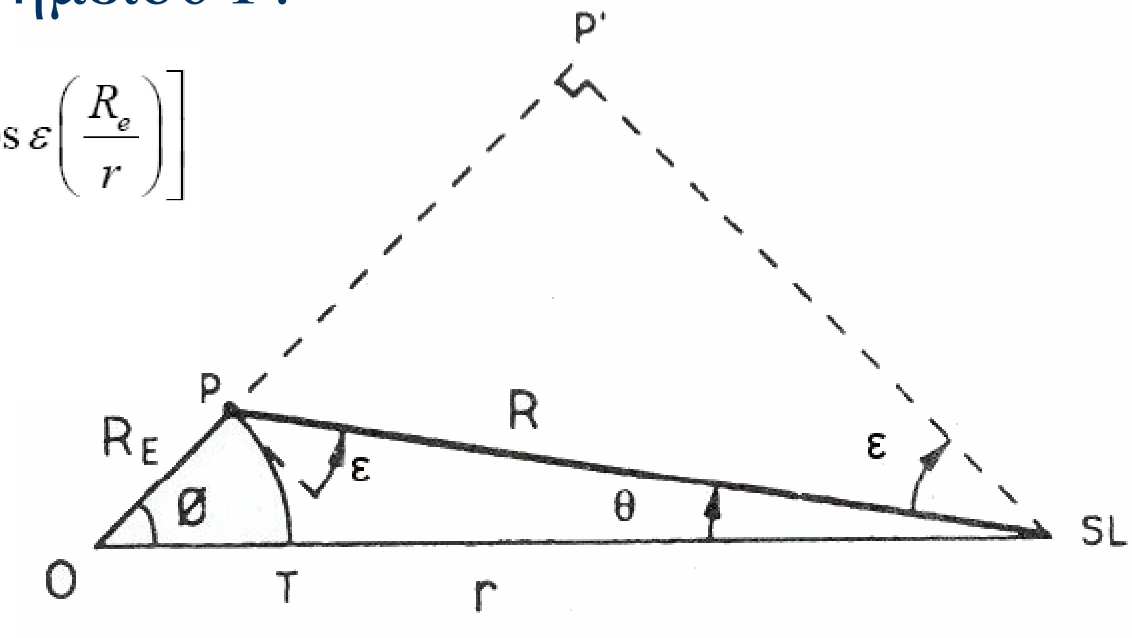
Ημισφαίριο Επίγειου Σταθμού	Θέση Δορυφόρου ως προς ΕΣ	Σχέση μεταξύ Α και α
Βόρειο	Ανατολικά	$A=180^{o}-\alpha$
Βόρειο	Δυτικά	$A=180^{o}+\alpha$
Νότιο	Ανατολικά	$A=\alpha$
Νότιο	Δυτικά	$A=360^{o}-\alpha$

Γωνία Ναδίρ

- Γωνία Ναδίρ, ϑ: Η γωνία στο δορυφόρο μεταξύ της διεύθυνσης του κέντρου της Γης και της διεύθυνσης του σημείου P.

$$\vartheta = \arcsin\left[\sin\phi\left(\frac{R_e}{R}\right)\right] = \arcsin\left[\cos\varepsilon\left(\frac{R_e}{r}\right)\right]$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sin(\pi - \vartheta - \phi)}{r}$$

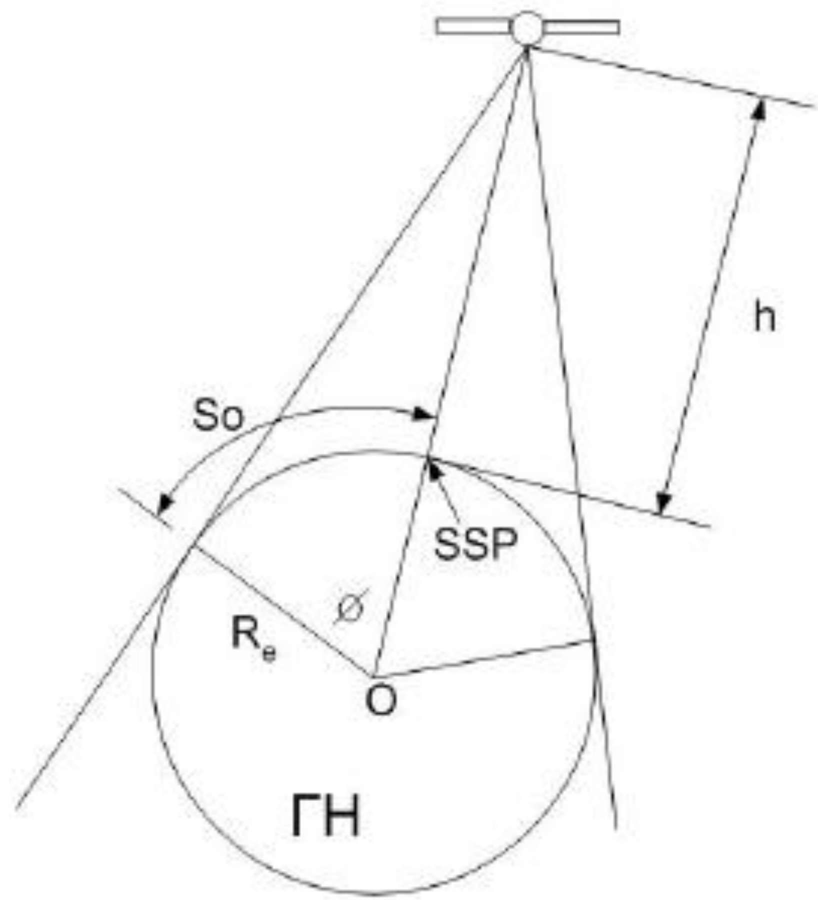


Κάλυψη της Γης από το Δορυφόρο

- Μεγάλοι Κύκλοι σε Σφαίρα : η τομή οποιουδήποτε επιπέδου περιέχει το κέντρο της σφαίρας με την επιφάνεια της σφαίρας.
- S_o είναι τόξο μεγάλου κύκλου.

$$S_o = R_e \phi$$

$$2S_o = 2R_e \arccos\left[\frac{R_e}{R_e + h}\right]$$



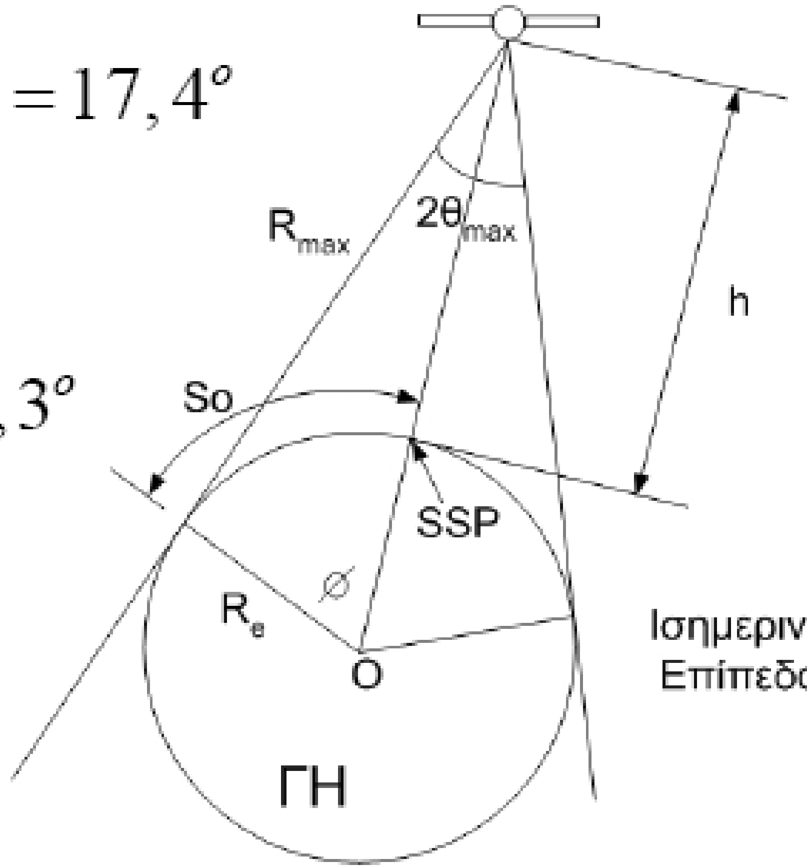
Μέγιστη Κάλυψη

$$2\theta_{\max} = 2\arcsin\left(\frac{R_e}{r}\right) = 17,4^o$$

$$\theta_{\max} = 8,7^o$$

$$\phi_{\max} = 90^o - \theta_{\max} = 81,3^o$$

$$\phi_{\max} = l_{\max} = L_{\max}$$



Απόσταση και Χρόνος Μετάδοσης

- Μέγιστη Απόσταση και χρόνος μετάδοσης από σταθμό σε σταθμό

$$2R_{\max}(L = 0^o, l = 81,3^o) = 83357,6Km$$

$$t_{\max} = 2R_{\max} / (3 * 10^8) \approx 278m\sec$$

- Ελάχιστη Απόσταση και χρόνος μετάδοσης από σταθμό σε σταθμό

$$2h = 71572,2Km$$

$$t_{\min} = 2h / (3 * 10^8) \approx 238m\sec$$