



Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Ασύρματες Επικοινωνίες

Ενότητα 3 : Η/Μ Κύματα στο Χώρο

Δημοσθένης Βουγιούκας (dnougiou@aegean.gr)

Μόνιμος Επίκουρος Καθηγητής

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών & Επικοινωνιακών Συστημάτων



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Περιεχόμενα Κεφαλαίου

4

- Ορισμός Πεδίων και Συντακτικές Σχέσεις
- Νόμος του Faraday
- Θεώρημα Helmholtz
- Νόμος του Gauss για Ηλεκτρική Ροή
- Υπόθεση Maxwell για Ρεύμα Μετατόπισης
- Νόμος του Gauss για Μαγνητική Ροή
- Εξισώσεις Maxwell
- Ημιτονοειδής Χρονική Μεταβολή και Φασιθέτες
- Κυματική Εξίσωση & Επίπεδα Κύματα
- Εγκάρσια Η/Μ Κύματα (TEM)
- Στάσιμα Κύματα
- Ισχύς και Ενέργεια Η/Μ Κυμάτων
- Πόλωση Η/Μ Κυμάτων

Εξισώσεις του Maxwell

5

- Τα χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία ακολουθούν κάποιους φυσικούς νόμους, που περιγράφονται από ένα σύνολο εξισώσεων γνωστές ως **εξισώσεις Maxwell**.
- Το ηλεκτρικό πεδίο E και το μαγνητικό πεδίο H είναι **διανυσματικά πεδία** και γενικά έχουν πλάτος και κατεύθυνση που μεταβάλλονται με τις τρεις χωρικές συντεταγμένες x, y, z καθώς και με τη χρονική μεταβλητή t .

Δύναμη Lorentz

6

- Αν ένα φορτίο q κινείται σε χώρο με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, η δύναμη που ασκείται στο φορτίο q είναι

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= q\vec{E} \\ \vec{F}_m &= q(\vec{v} \times \vec{B})\end{aligned}\quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- όπου F η δύναμη σε Newton, q το φορτίο σε coulomb, v η ταχύτητα σε μέτρα το δευτερόλεπτο, E το ηλεκτρικό πεδίο, και B η μαγνητική επαγωγή (πυκνότητα μαγνητικής ροής).

Ηλεκτρική Μετατόπιση & Ένταση Μαγνητικού Πεδίου

7

- Επιπλέον των E , B , απαιτούνται δύο ακόμη διανύσματα για την περιγραφή των Η/Μ φαινομένων.
- Αυτά είναι η **ηλεκτρική μετατόπιση D** και η **ένταση του μαγνητικού πεδίου H** , που σχετίζονται με την ποσότητα του ηλεκτρικού φορτίου που περικλείεται από μια κλειστή επιφάνεια και το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από ένα κλειστό βρόχο, αντίστοιχα.
- Είναι μεγέθη ανεξάρτητα των χαρακτηριστικών του ομογενούς μέσου στο οποίο βρίσκεται το φορτίο ή το μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα.

ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

8

- Ισχύουν οι σχέσεις $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ και $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$
- όπου $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7}$ (Henry/m) η **μαγνητική διαπερατότητα** του κενού και $\epsilon_0 \approx 10^{-9}/36\pi$ (Farad/m) η **διηλεκτρική επιτρεπτότητα** του κενού.
- Γενικά ισχύει $\vec{B} = \mu \vec{H}$ και $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
- Όταν οι μ, ϵ είναι βαθμωτές ποσότητες τότε το μέσο καλείται **ισοτροπικό** και τα διανύσματα $B(D)$ και $H(E)$ είναι παράλληλα.
- **Ταχύτητα του φωτός**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.9979 \times 10^8 \left(\frac{m}{sec} \right) \approx 3 \times 10^8 \left(\frac{m}{sec} \right)$$

- **Χαρακτηριστική αντίσταση του κενού**

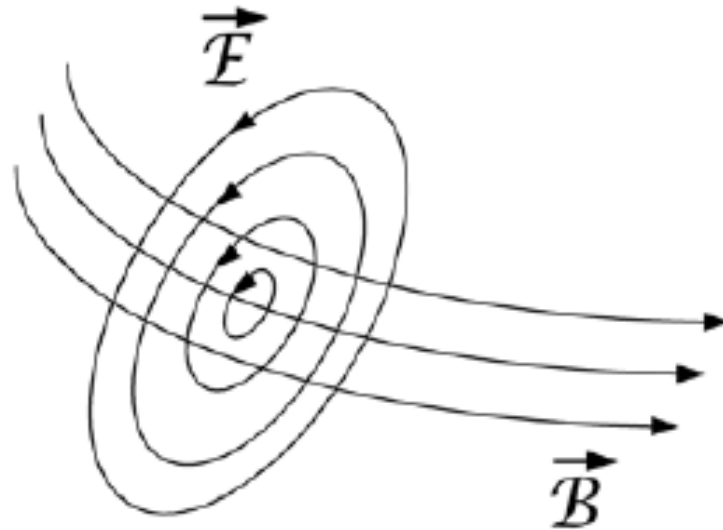
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 (Ohm) \approx 120\pi (Ohm)$$

Νόμος του Faraday

9

- Ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο γεννά ένα ηλεκτρικό πεδίο. Αποτελεί δηλαδή πηγή στροβιλισμού που παράγει ηλεκτρικό πεδίο που παρουσιάζει περιστροφή.

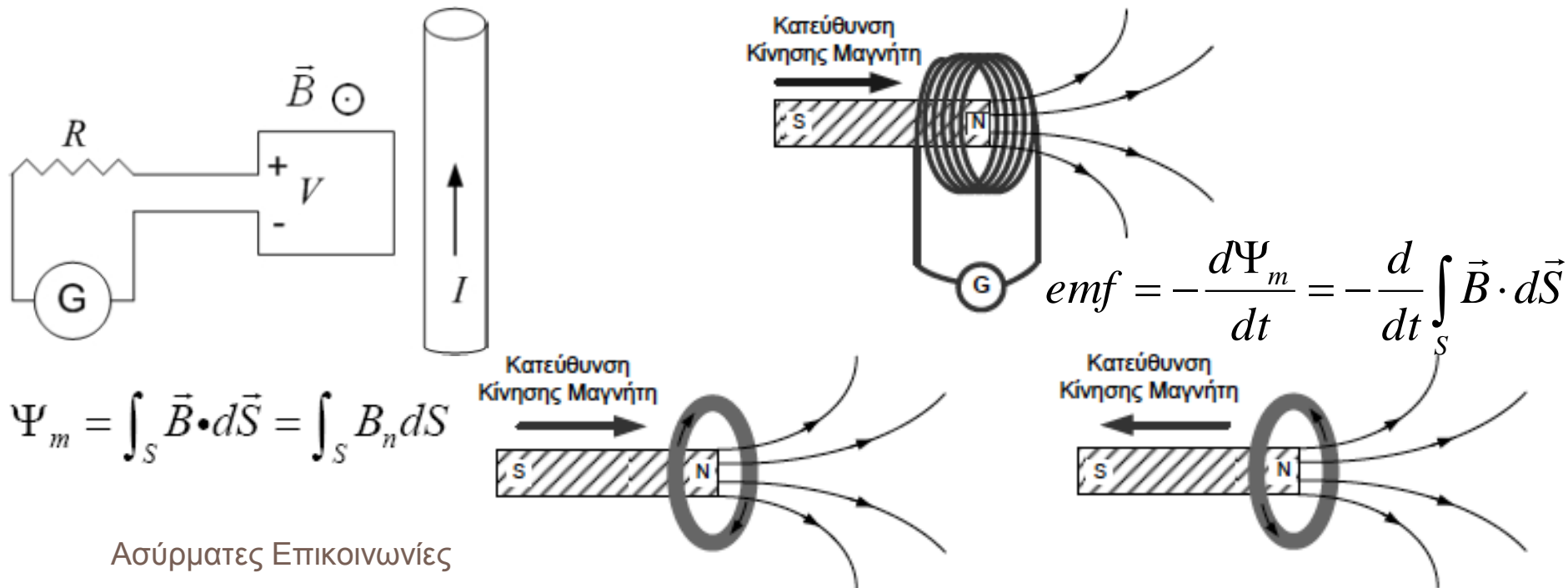
$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$



Μαγνητική Επαγωγή & Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

10

- Ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο προκαλεί την επαγωγή μιας τάσης στο αγώγιμο πηνίο.
- Αυτή η τάση είναι ανάλογη της μεταβολής του αριθμού των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου που διέρχονται από το πηνίο και καλείται **ηλεκτρεγερτική δύναμη (electromotive force, emf)**.



Νόμος Επαγωγής Faraday

11

- **Μαγνητική ροή Ψ_m** διαμέσου ενός βρόχου το ολοκλήρωμα της επαγόμενης τάσης στο χρονικό διάστημα για το οποίο το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται, δηλαδή το διάστημα που απαιτείται για να μηδενιστεί ή να αναπτυχθεί το ρεύμα στον αγωγό

$$\Psi_m = \pm \int_0^t \mathcal{V} dt$$

- Νόμος της επαγωγής του Faraday. $\mathcal{V} = -\frac{d\Psi_m}{dt}$

- Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι αυξανόμενη η μαγνητική ροή αντιστοιχεί σε αρνητική τάση και συγκεκριμένη φορά ροής του ηλεκτρικού ρεύματος στο πηνίο.

Νόμος Επαγωγής Faraday

12

- Από τη σχέση $\mathcal{V} = \oint \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{S}$
- και το Νόμο του Stokes $\oint \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S}$
- προκύπτει $\mathcal{V} = \oint \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \Delta s$
- Ο νόμος του Faraday μας λέει ότι η μαγνητική ροή διαμέσου της επιφάνειας σχετίζεται με το ηλεκτρικό πεδίο γύρω από την κλειστή καμπύλη. Βέβαια δεν μας ενδιαφέρει η ακριβής τιμή του μαγνητικού πεδίου, αλλά το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται αυτό. Έτσι εξηγείται και η μερική παράγωγος ως προς το χρόνο.
- Διαφορική εξίσωση του Νόμου Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

Θεώρημα Helmholtz

13

- Από τη διανυσματική ανάλυση, ένα διανυσματικό πεδίο είναι πλήρως ορισμένο μόνον όταν σε κάθε σημείο του χώρου, εκτός της **περιστροφής** του πεδίου δίνεται και η **απόκλιση** του πεδίου.
- Η απόκλιση των πεδιακών (δυναμικών) γραμμών εμφανίζεται μόνον αν υπάρχει διαθέσιμη κατάλληλη πηγή.
- Το ηλεκτρικό πεδίο παρουσιάζει απόκλιση η οποία οφείλεται σε ηλεκτρικά φορτία.

Νόμος του Gauss

14

- Η απόκλιση του ηλεκτρικού πεδίου, δηλαδή η ηλεκτρική ροή που εξέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια με όγκο V , είναι ίση με το ηλεκτρικό φορτίο που περικλείεται από την κλειστή αυτή επιφάνεια.
- Αν ρ αναπαριστά την πυκνότητα φορτίου εκφρασμένη σε Coulomb/m³, τότε η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το Νόμο του Gauss για την ηλεκτρική ροή είναι

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

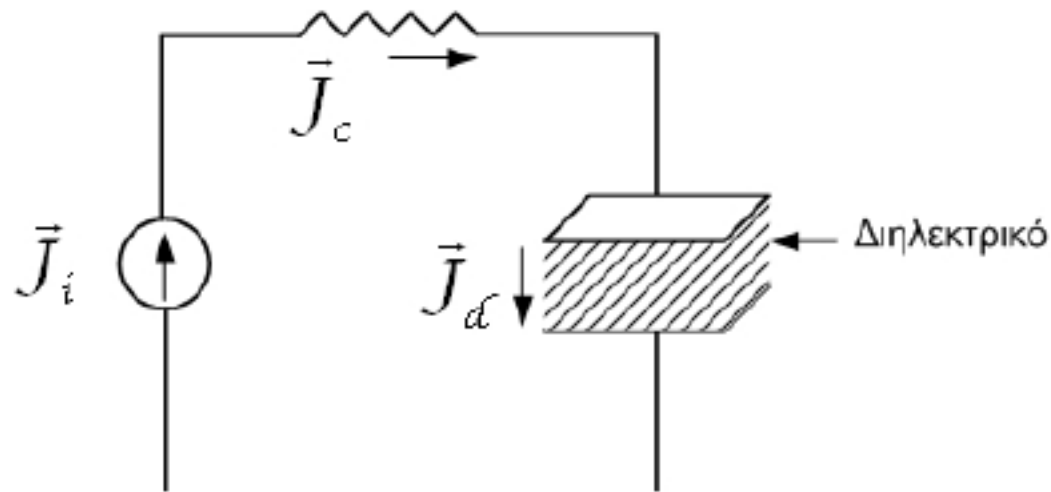
Μαγνητικό Πεδίο

15

- Για να ολοκληρωθεί η αναπαράσταση των H/M φαινομένων πρέπει να συσχετίσουμε την περιστροφή και την απόκλιση του μαγνητικού πεδίου με τις πηγές του.
- Η πηγή στροβιλισμού που προκαλεί την περιστροφή του μαγνητικού πεδίου H είναι το **ρεύμα**.
- Λέγοντας ρεύμα εννοούμε τη συνολική πυκνότητα ρεύματος στο χώρο που περιλαμβάνει την πυκνότητα από τα εξής ρεύματα
 - ▣ Πηγών J_i
 - ▣ Αγωγιμότητας J_c
 - ▣ Ηλεκτρικής Μετατόπισης J_d
 - ▣ Λόγω κίνησης κάποιων ελεύθερων φορτίων

Μαγνητικό Πεδίο

16



- Η πυκνότητα του ρεύματος της πηγής παράγει ουσιαστικά την πυκνότητα του ρεύματος αγωγιμότητας κατά τη διέλευσή του από την αντίσταση και την πυκνότητα του ρεύματος μετατόπισης μέσω του διηλεκτρικού του πυκνωτή. Στη συνέχεια θεωρούμε μηδενισμό της πηγής, δηλ. δεν υπάρχουν ρευματικές πηγές.

Υπόθεση Maxwell για Ρεύμα Μετατόπισης

17

- Η πυκνότητα του ρεύματος μετατόπισης προτάθηκε από τον Maxwell ως η χρονική μεταβολή της ηλεκτρικής μετατόπισης, δηλαδή

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- Η υπόθεση ότι ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο είναι ισοδύναμο με μια πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος και ως τέτοια παράγει μαγνητικό πεδίο, οδήγησε, σε συνδυασμό με το νόμο του Faraday, στις κυματικές εξισώσεις.

Πηγές και Μαγνητικό Πεδίο

18

- Για την περιστροφή του μαγνητικού πεδίου συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{J}_c$$

- Επειδή τα δυαδικά των ηλεκτρικών φορτίων, δηλαδή τα μαγνητικά φορτία, δεν υφίστανται ως απομονωμένα μαγνητικά μονόπολα στη φύση, συμπεραίνουμε ότι η απόκλιση της μαγνητικής επαγωγής B είναι πάντοτε μηδενική.

Νόμος του Gauss για τη Μαγνητική Ροή

19

- Η μαγνητική ροή που εξέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια είναι πάντοτε μηδενική

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- Άρα οι γραμμές μαγνητικής ροής είναι πάντα κλειστές αφού δεν υπάρχουν φορτία στα οποία θα μπορούσαν να καταλήγουν. Ο αριθμός δηλαδή των γραμμών της μαγνητικής ροής που εισέρχονται σε μια περιοχή ισούται με τον αριθμό των γραμμών που εξέρχονται.

Εξισώσεις Maxwell

20

- Συνολικά για ένα χώρο ελεύθερο από ρεύματα πηγών και κινούμενων φορτίων μπορούμε να γράψουμε (διαφορική μορφή)

Ampere

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{J}}$$

Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

Gauss για Ηλεκτρική Ροή

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho$$

Gauss για Μαγνητική Ροή

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

Εξισώσεις Maxwell

21

- Η σε ολοκληρωτική μορφή

Ampere	$\oint \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = I_{total}$
Faraday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = V$
Gauss για ηλεκτρική ροή	$\oint_S \vec{\mathcal{D}} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV = Q$
Gauss για μαγνητική ροή	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

Νόμος Διατήρησης Φορτίου

22

- Οι πυκνότητες ρεύματος και φορτίου συνδέονται με το νόμο διατήρησης του φορτίου, σύμφωνα με τον οποίο: Το συνολικό φορτίο σε ένα απομονωμένο σύστημα παραμένει σταθερό

Πλήρη παράγωγο

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int \rho dV$$

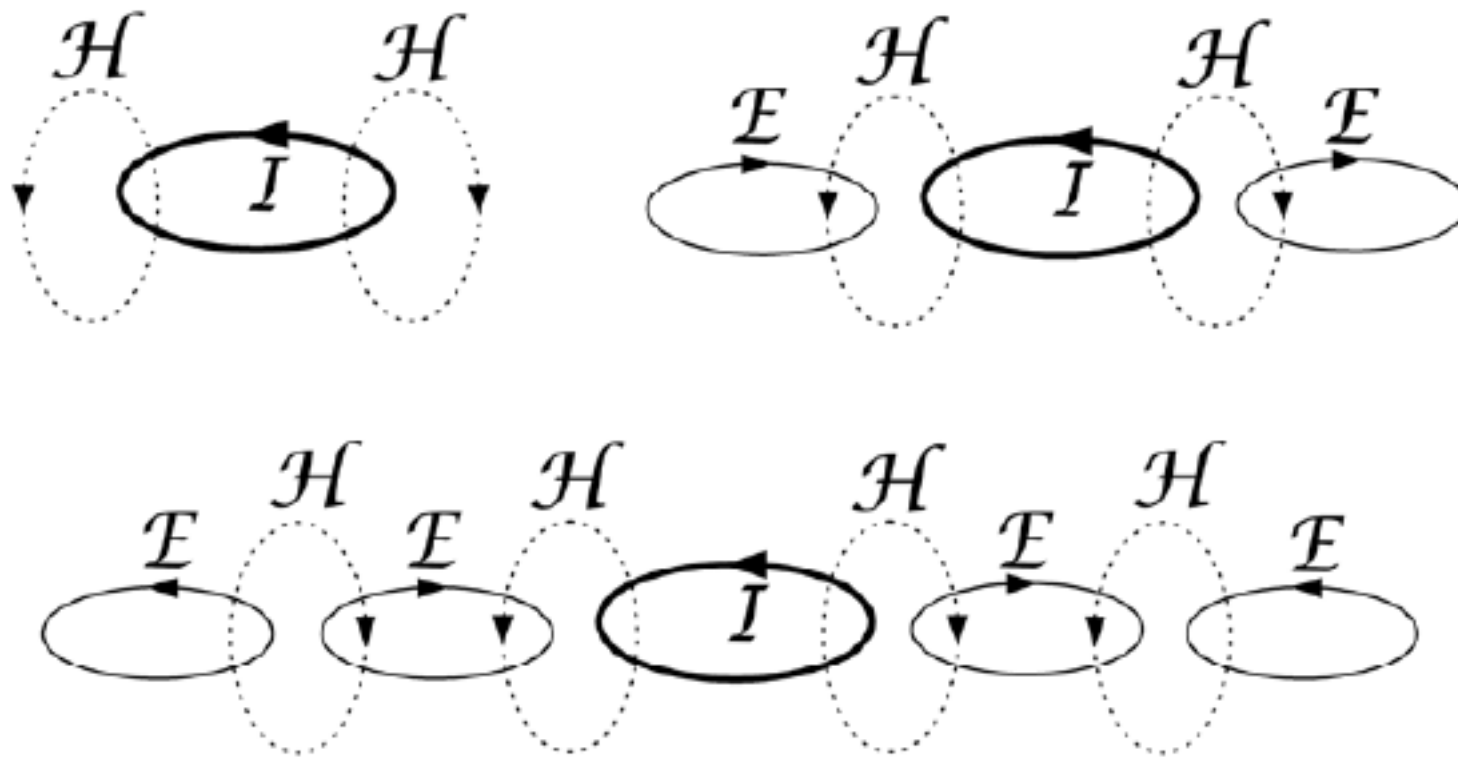
Μερική παράγωγο

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Θεώρημα Gauss $\left[\int_V \nabla \cdot \vec{J} dV = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \right]$

Γέννηση Η/Μ Κυμάτων

23



Ημιτονοειδής Χρονική Μεταβολή

24

- Συνήθως τα πεδία παράγονται από ρεύματα και δυναμικά με ημιτονοειδή χρονική μεταβολή, δηλαδή

$$\mathcal{E} = E_0 \cos(\omega t) \quad \text{ή} \quad \mathcal{E} = E_0 \sin(\omega t)$$

- Αν χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση φασιθετών, γράφουμε

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\}$$

- **ΠΡΟΣΟΧΗ** : Η έκφραση $E(r)$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου

Φασιθέτες και Πεδία

25

- Τα πεδία είναι **διανυσματικά**

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \hat{x}\mathcal{E}_x(\vec{r}, t) + \hat{y}\mathcal{E}_y(\vec{r}, t) + \hat{z}\mathcal{E}_z(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{x}E_x(\vec{r}) + \hat{y}E_y(\vec{r}) + \hat{z}E_z(\vec{r})$$

- Επιπλέον τα πεδία είναι **μιγαδικά**

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{x} \left[E_{xr}(\vec{r}) + jE_{xi}(\vec{r}) \right] + \hat{y} \left[E_{yr}(\vec{r}) + jE_{yi}(\vec{r}) \right] + \\ + \hat{z} \left[E_{zr}(\vec{r}) + jE_{zi}(\vec{r}) \right]$$

Φασιθέτες και Πεδία

26

□ Όπου

$$E_x(\vec{r}) = E_{xr}(\vec{r}) + jE_{xi}(\vec{r}) = |E_x(\vec{r})| e^{j\phi_x(\vec{r})}$$

$$E_y(\vec{r}) = E_{yr}(\vec{r}) + jE_{yi}(\vec{r}) = |E_y(\vec{r})| e^{j\phi_y(\vec{r})}$$

$$E_z(\vec{r}) = E_{zr}(\vec{r}) + jE_{zi}(\vec{r}) = |E_z(\vec{r})| e^{j\phi_z(\vec{r})}$$

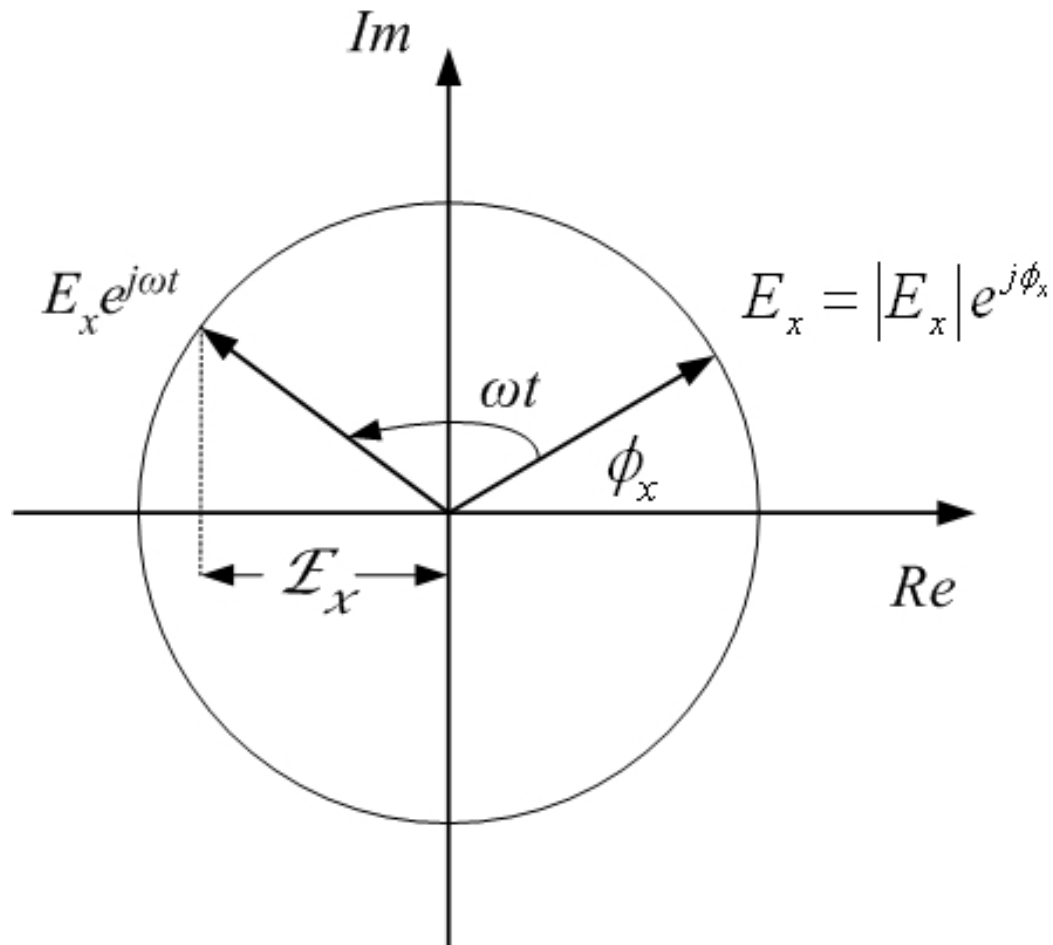
□ και

$$|E_x(\vec{r})| = \sqrt{E_{xr}^2(\vec{r}) + E_{xi}^2(\vec{r})}$$

$$\phi_x(\vec{r}) = \tan^{-1} \left(\frac{E_{xi}(\vec{r})}{E_{xr}(\vec{r})} \right)$$

Φασιθέτες και Πεδία

27



$$\mathcal{E}_x(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[E_x(\vec{r}) e^{j\omega t} \right]$$

Φασιθέτες και Πεδία

28

- Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = & \hat{x} |E_x(\vec{r})| \cos[\omega t + \phi_x(\vec{r})] + \\ & + \hat{y} |E_y(\vec{r})| \cos[\omega t + \phi_y(\vec{r})] + \\ & + \hat{z} |E_z(\vec{r})| \cos[\omega t + \phi_z(\vec{r})]\end{aligned}$$

- Και η χρονική μέση τιμή δίνεται από:

$$\left| \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \right|_{av}^2 = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}^*(\vec{r})$$

Εξισώσεις Maxwell με Φασιθέτες

29

- **ΠΡΟΣΟΧΗ** : Θεωρώ χώρο ελεύθερο από κάθε είδους φορτία ή ρεύματα αγωγιμότητας

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{D}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial e^{j\omega t}}{\partial t} = j\omega e^{j\omega t}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega \vec{D}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Κυματική Εξίσωση & Εξίσωση Helmholtz

30

- Με συνδυασμό των εξισώσεων του Maxwell προκύπτει για το ηλεκτρικό πεδίο (η ίδια εξίσωση ισχύει και για το μαγνητικό)

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Ταχύτητα Διάδοσης}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Εξίσωση
Helmholtz

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

- ΟΤΟΥ

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{u} = 2\pi \frac{f}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ο **κυματικός αριθμός** και λ το μήκος κύματος

Επίπεδα Κύματα σε μέσο χωρίς απώλειες

31

- Η διανυσματική εξίσωση

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + k^2 \vec{E} = 0$$

ισχύει για κάθε συνιστώσα του πεδίου, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} + k^2 E_i = 0 \quad i = x, y, z$$

Επίλυση Κυματικής Εξίσωσης

32

- Με τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών, θεωρούμε

$$E_x = f(x)g(y)h(z)$$

- Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση

$$ghf'' + fhg'' + fgh'' + k^2 fgh = 0$$

- Διαιρώντας με fgh

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} + k^2 = 0$$

Επίλυση Κυματικής Εξίσωσης

33

- Η εξίσωση αυτή διαχωρίζεται σε 3 εξισώσεις

$$\frac{f''}{f} = -k_x^2 \Rightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} + k_x^2 f = 0$$

$$\frac{g''}{g} = -k_y^2 \Rightarrow \frac{d^2 g}{dy^2} + k_y^2 g = 0$$

$$\frac{h''}{h} = -k_z^2 \Rightarrow \frac{d^2 h}{dz^2} + k_z^2 h = 0$$

- όπου k_x, k_y, k_z , οι σταθερές διαχωρισμού

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

Επίλυση Κυματικής Εξίσωσης

34

- Οι εξισώσεις αυτές είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης. Αν γράψουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση της πρώτης, αντικαθιστώντας $f'' = \lambda^2$, τότε $\lambda^2 = -k_x^2$, που έχει δύο λύσεις μιγαδικές $\lambda_1 = jk_x = \lambda_2^* = (-jk_x)^*$.
- Άρα για την πρώτη διαφορική εξίσωση έχουμε λύσεις της μορφής $e^{\pm jk_x x}$ και για τις άλλες δύο $e^{\pm jk_y y}$ και $e^{\pm jk_z z}$
- Άρα μια κατάλληλη λύση για τη συνιστώσα E_x είναι της μορφής

$$E_x = A e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z}$$

Επίλυση Κυματικής Εξίσωσης

35

- Η λύση αυτή μεταφράζεται ως η x συνιστώσα ενός κύματος που διαδίδεται στην κατεύθυνση που ορίζει το διάνυσμα διάδοσης $\vec{k} = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z$
- γιατί το εσωτερικό γινόμενο με το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$
- είναι $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$
- που είναι k φορές η κάθετη απόσταση από την αρχή των αξόνων σε ένα επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα k .

Επίλυση Κυματικής Εξίσωσης

36

- Το διάνυσμα διάδοσης γράφεται $\vec{k} = \hat{n}k$
- όπου $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$
- Άρα για τη x συνιστώσα του πεδίου μπορούμε να γράψουμε

$$E_x = Ae^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

- Όμοια $E_y = Be^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ $E_z = Ce^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

- Αν θέσουμε $\vec{E}_o = \hat{x}A + \hat{y}B + \hat{z}C$

- Τότε $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_o e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ Επίπεδο Κύμα

Επίλυση Κυματικής Εξίσωσης

37

- Ξεκινώντας από την τρίτη εξίσωση του Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_o e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \vec{E}_o \cdot \vec{\nabla} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = 0$$

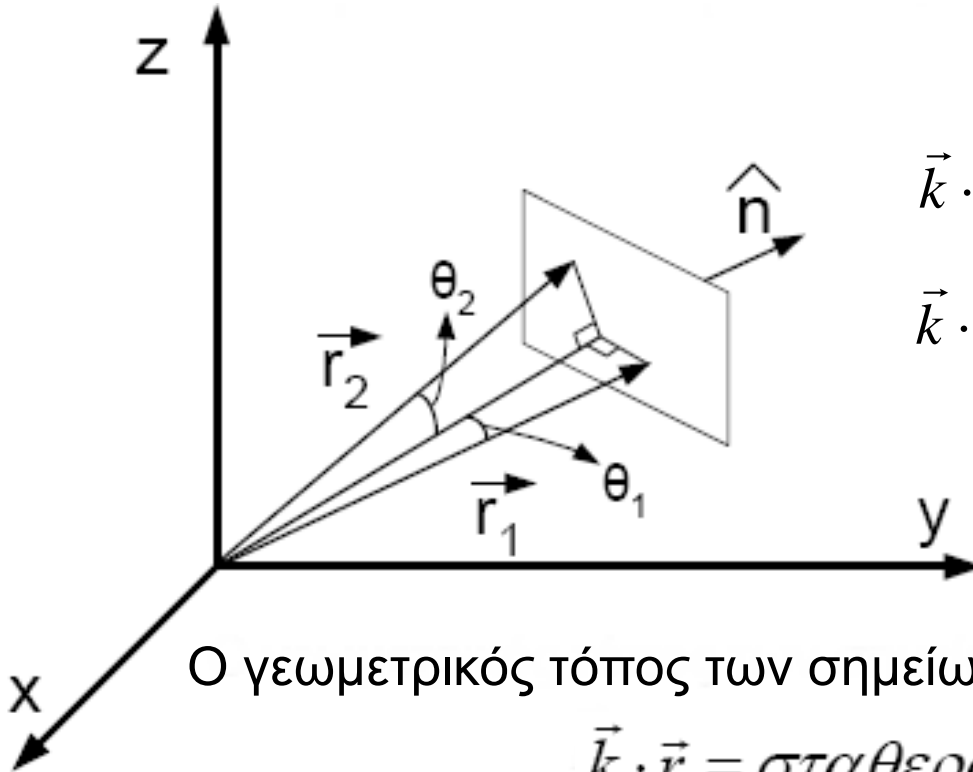
- Καταλήγουμε στην

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_o = 0$$

- Δηλαδή το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης.

Επίπεδα Κύματα – Ισοφασικές Επιφάνειες

38



$$\vec{k} \cdot \vec{r}_1 = k_o \cdot r_1 \cos\theta = k_o \cdot k_o = k_o^2$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r}_2 = k_o \cdot r_2 \cos\theta = k_o \cdot k_o = k_o^2$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τα οποία

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{σταθερά}$$

Είναι **επίπεδο** λόγω της επίπεδης ισοφασικής επιφάνειας (σταθερή φάση) και μάλιστα κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης.

Εγκάρσια Η/Μ Κύματα (TEM)

39

- Μέχρι στιγμής υπολογίσαμε το ηλεκτρικό πεδίο. Υπολογίζουμε και το μαγνητικό πεδίο από την εξίσωση περιστροφής

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\vec{B} = -j\omega\mu_o\vec{H}$$

- Προκύπτει

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} (\hat{n} \times \vec{E}) \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{Z_o} (\hat{n} \times \vec{E})$$

- ΟΤΠΟΥ

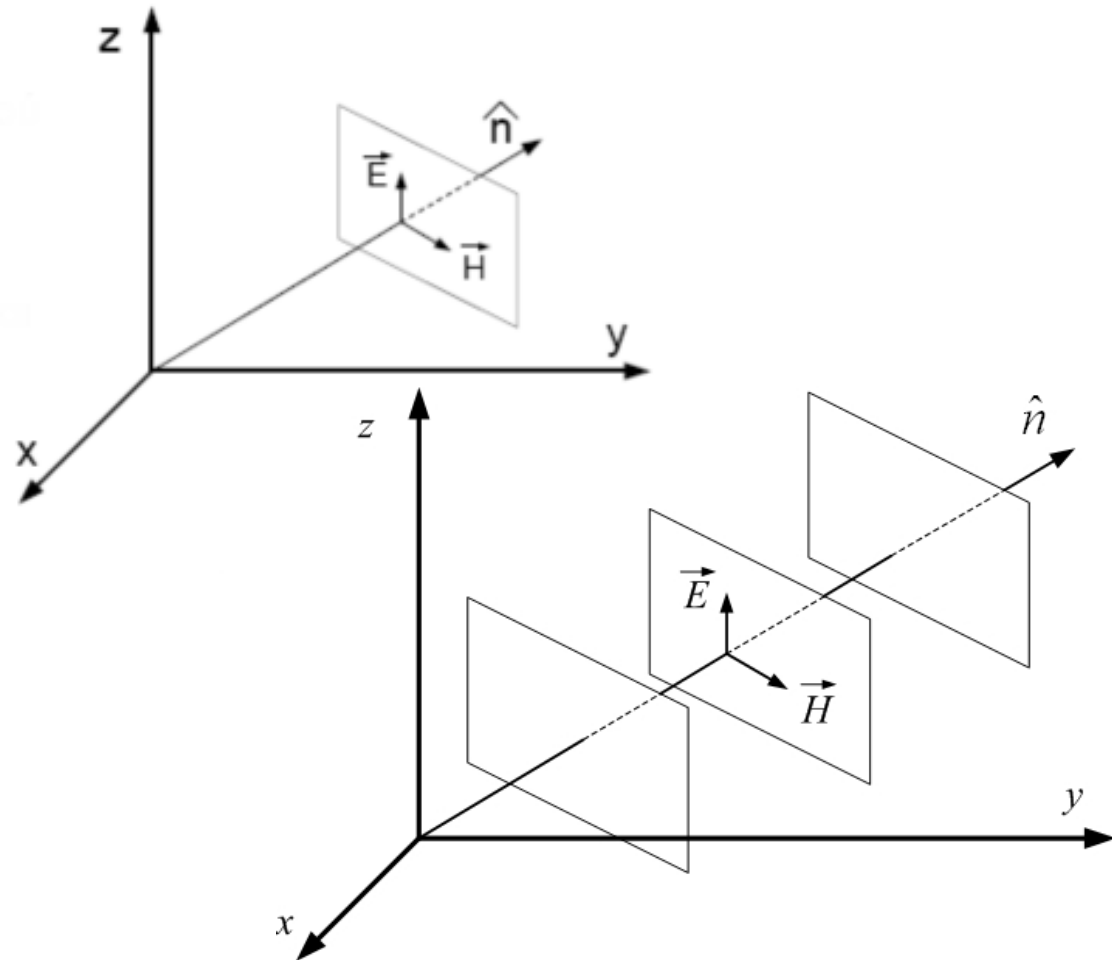
$$Y_o = \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} \quad Z_o = \frac{1}{Y_o} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi \quad \text{Ohm}$$

Εγκάρσια Η/Μ Κύματα (TEM)

40

- Η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετη στο ηλεκτρικό πεδίο και την κατεύθυνση διάδοσης.
- Τα δύο πεδία βρίσκονται στο ισοφασικό επίπεδο του σχήματος.
- Τα ισοφασικά επίπεδα είναι παράλληλα.

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \text{Re}\left\{\vec{E}_o e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{j\omega t}\right\} \\ &= \vec{E}_o \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \\ &= \vec{E}_o \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\end{aligned}$$



Μήκος Κύματος

41

- Η απόσταση που πρέπει να ταξιδέψει το κύμα ώστε να μεταβληθεί η φάση του κατά 2π , δηλαδή

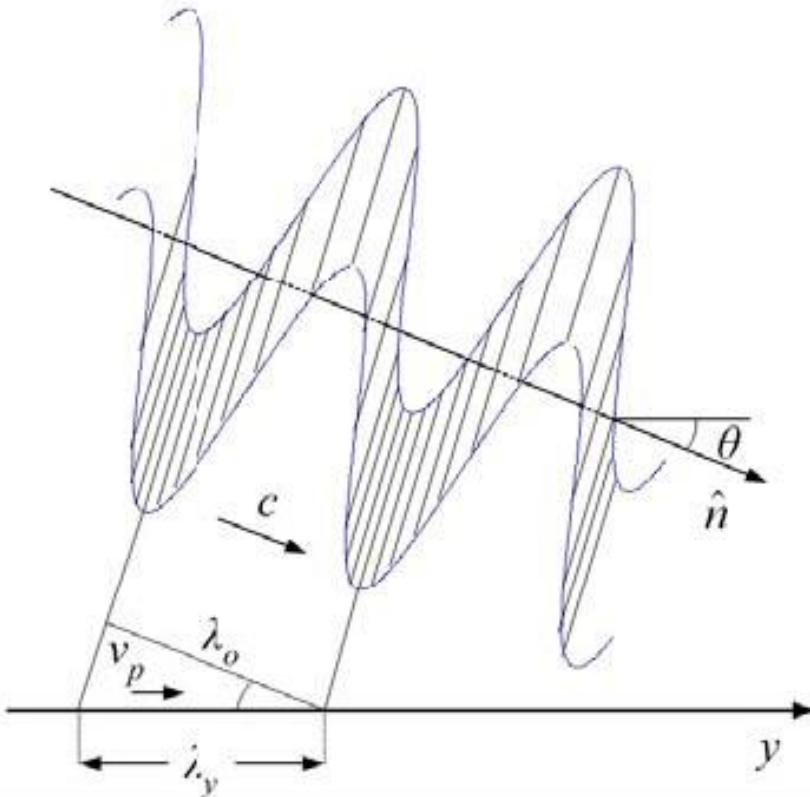
$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k\lambda \hat{n} \cdot \hat{r} = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

- όπου όμως θεωρήσαμε ότι παρατηρούμε το κύμα στη διεύθυνση της διάδοσης.
- Αντικαθιστώντας για k παίρνουμε

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}} = \frac{c}{f}$$

Ταχύτητα Φάσης

42



$$\begin{aligned} v_p &= \frac{\lambda_y}{\frac{\lambda_o}{c}} = c \frac{\lambda_y}{\lambda_o} \\ &= c \frac{\cos \theta}{\lambda_o} = \frac{c}{\cos \theta} \end{aligned}$$

Παράδειγμα Επίπεδου Η/Μ Κύματος

43

- Διάδοση στην κατεύθυνση του άξονα z , δηλαδή δεν υπάρχει εξάρτηση από τις μεταβλητές x, y .

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kz$$

- Επιπλέον θεωρούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο x συνιστώσα, δηλαδή

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(z) = \hat{x}E_x(z) = \hat{x}Ae^{-jkz}$$

- Αντίστοιχα προκύπτει για το μαγνητικό πεδίο

$$\vec{H}(z) = \hat{y}H_y(z) = \hat{y}\frac{A}{Z_0}e^{-jkz}$$

Παράδειγμα Επίπεδου Η/Μ Κύματος

44

- Αν A πραγματικός

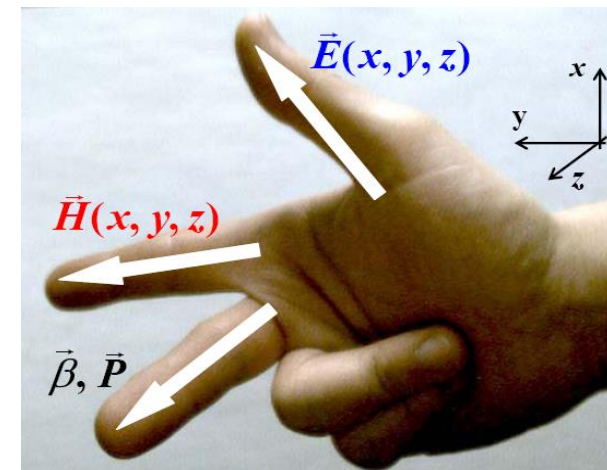
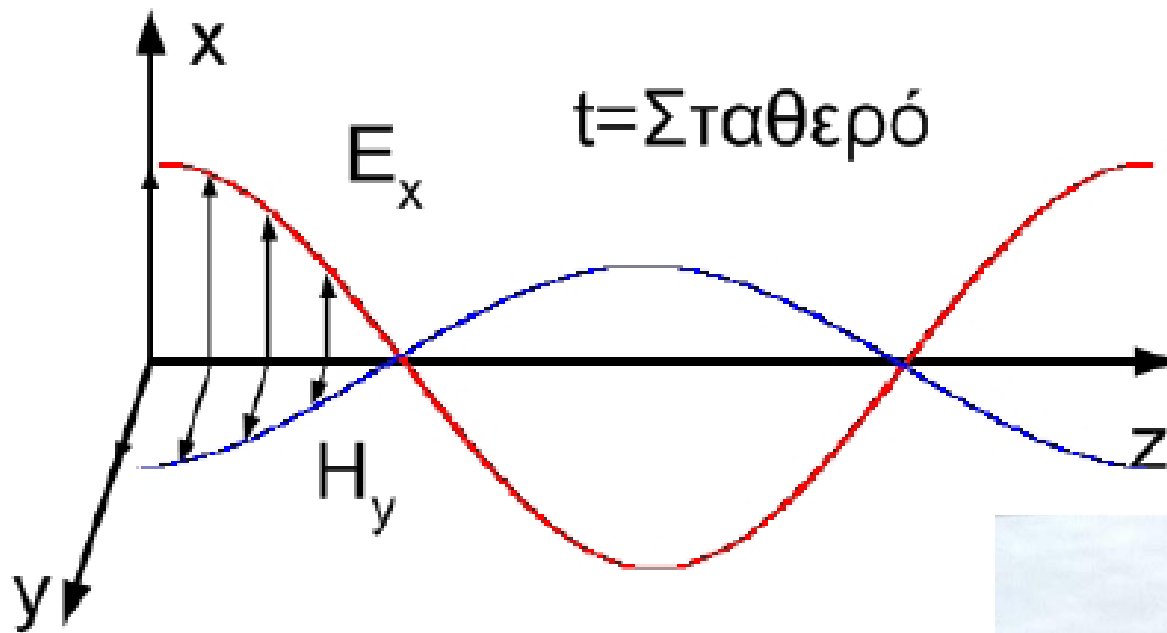
$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \hat{x}\mathcal{E}_x(z, t) = \hat{x}\operatorname{Re}\{E_x(z)e^{j\omega t}\} \\ &= \hat{x}A\cos(\omega t - kz)\end{aligned}$$

- και

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) &= \hat{y}\mathcal{H}_y(z, t) = \hat{y}\operatorname{Re}\{H_y(z)e^{j\omega t}\} \\ &= \hat{y}\frac{A}{Z_o}\cos(\omega t - kz)\end{aligned}$$

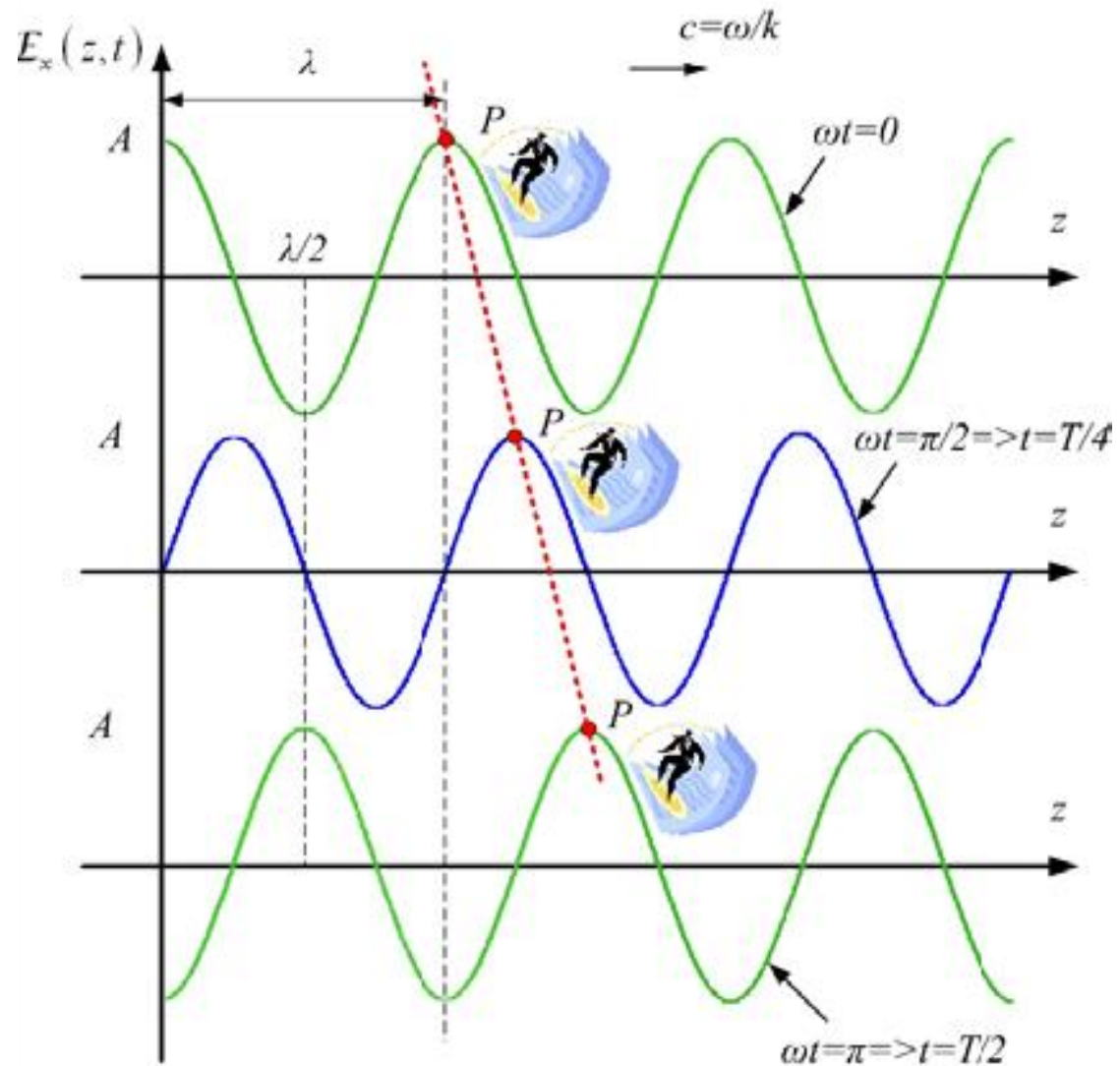
Παράδειγμα Επίπεδου Η/Μ Κύματος

45



Παράδειγμα Επίπεδου Η/Μ Κύματος

46



Όδευση του Κύματος

47

- Μαθηματικά η όδευση

$$\mathcal{E}_x(z, t + \Delta t) = \mathcal{E}_x(z - \Delta z, t) = \mathcal{E}_x(z - c\Delta t, t) \quad \text{ή}$$

$$\mathcal{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_x(z - \Delta z, t - \Delta t) = \mathcal{E}_x(z - c\Delta t, t - \Delta t)$$

- Δηλαδή το κύμα στη θέση z , τη χρονική στιγμή t , έχει τα χαρακτηριστικά που είχε στη θέση $z - \Delta z$ τη χρονική στιγμή $t - \Delta t$ ($\Delta z = c\Delta t$).
- Άλλη μια απόδειξη ότι το κύμα ταξιδεύει με την ταχύτητα του φωτός.

Αντίθετα οδεύοντα κύματα

48

- Μια πιο πλήρης επίλυση της κυματικής εξίσωσης δίνει 2 κύματα που οδεύουν σε αντίθετες κατευθύνσεις

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_o^+ e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{E}_o^- e^{+j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} \left(\hat{n}^+ \times \vec{E}_o^+ e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) + \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} \left(\hat{n}^- \times \vec{E}_o^- e^{+j\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} \left(\hat{n}^+ \times \vec{E}_o^+ e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) - \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} \left(\hat{n}^+ \times \vec{E}_o^- e^{+j\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \\ &= \frac{1}{Z_o} \hat{n}^+ \times \left(\vec{E}_o^+ e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{E}_o^- e^{+j\vec{k}\cdot\vec{r}} \right)\end{aligned}$$

Στάσιμα κύματα

49

- Υποθέτουμε σημείο στο χώρο όπου υπάρχουν δύο αντίθετα οδεύοντα κύματα. Αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] \\ &= \sqrt{|\vec{E}_o^+|^2 + |\vec{E}_o^-|^2 + 2(\vec{E}_o^+ \cdot \vec{E}_o^-) \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r})} \cos \left\{ \omega t - \tan^{-1} \left[\frac{(\vec{E}_o^+ - \vec{E}_o^-)}{(\vec{E}_o^+ + \vec{E}_o^-)} \tan(\vec{k} \cdot \vec{r}) \right] \right\}\end{aligned}$$

$$|\vec{E}(\vec{r})| = \sqrt{|\vec{E}_o^+|^2 + |\vec{E}_o^-|^2 + 2(\vec{E}_o^+ \cdot \vec{E}_o^-) \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\underline{\vec{E}(\vec{r})} = \tan^{-1} \left[\frac{(\vec{E}_o^+ - \vec{E}_o^-)}{(\vec{E}_o^+ + \vec{E}_o^-)} \tan(\vec{k} \cdot \vec{r}) \right]$$

Στάσιμα κύματα

50

$$|\vec{E}(\vec{r})|_{\max} = |\vec{E}_o^+| + |\vec{E}_o^-| \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Υπόθεση: } |\vec{E}_o^+| > |\vec{E}_o^-|$$

$$|\vec{E}(\vec{r})|_{\min} = |\vec{E}_o^+| - |\vec{E}_o^-| \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = \frac{(2m+1)\pi}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

- Διαδοχικά μέγιστα συμβαίνουν κάθε $\lambda/2$. Το ίδιο ισχύει βέβαια και για τα ελάχιστα

$$k_o r = m\pi \Rightarrow \frac{2\pi r}{\lambda} = m\pi \Rightarrow r = m \frac{\lambda}{2}$$

Στάσιμα κύματα

51

- Λόγος Στασίμων κυμάτων $1 \leq SWR \leq \infty$

$$SWR = \frac{|\vec{E}(\vec{r})|_{\max}}{|\vec{E}(\vec{r})|_{\min}} = \frac{|\vec{E}_o^+| + |\vec{E}_o^-|}{|\vec{E}_o^+| - |\vec{E}_o^-|} = \frac{1 + \frac{|\vec{E}_o^-|}{|\vec{E}_o^+|}}{1 - \frac{|\vec{E}_o^-|}{|\vec{E}_o^+|}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

$|\Gamma| = 0$ $SWR = 1$ Ένα απλό οδεύον κύμα

$|\Gamma| = 1$ $SWR = \infty$ Πλήρως στάσιμο (ίσα πλάτη)

Στάσιμα κύματα

52

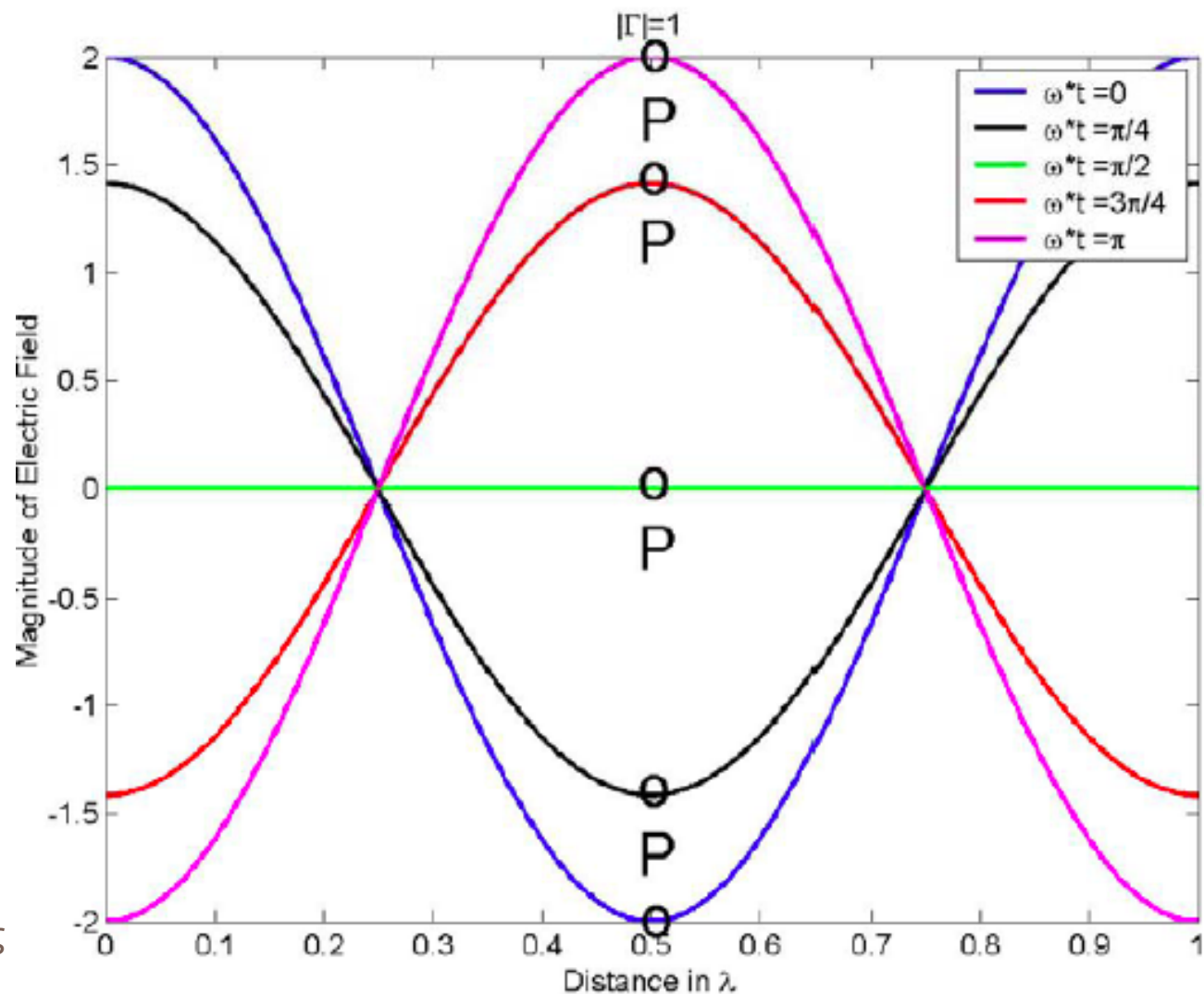
- Περίπτωση πλήρως στάσιμου κύματος $|\Gamma|=1$

$$\begin{aligned} |\vec{E}(\vec{r})|_{\vec{E}_o^+ = \vec{E}_o^-} &= \sqrt{2|\vec{E}_o^+|^2 + 2|\vec{E}_o^+|^2 \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r})} = \sqrt{2|\vec{E}_o^+|^2 [1 + \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r})]} \\ &= \sqrt{2|\vec{E}_o^+|^2 2\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r})} = 2|\vec{E}_o^+| |\cos(\vec{k} \cdot \vec{r})| = 2|\vec{E}_o^-| |\cos(\vec{k} \cdot \vec{r})| \end{aligned}$$

- Ένα σημείο σταθερής φάσης δεν μετατοπίζεται στο χώρο με την πάροδο του χρόνου.

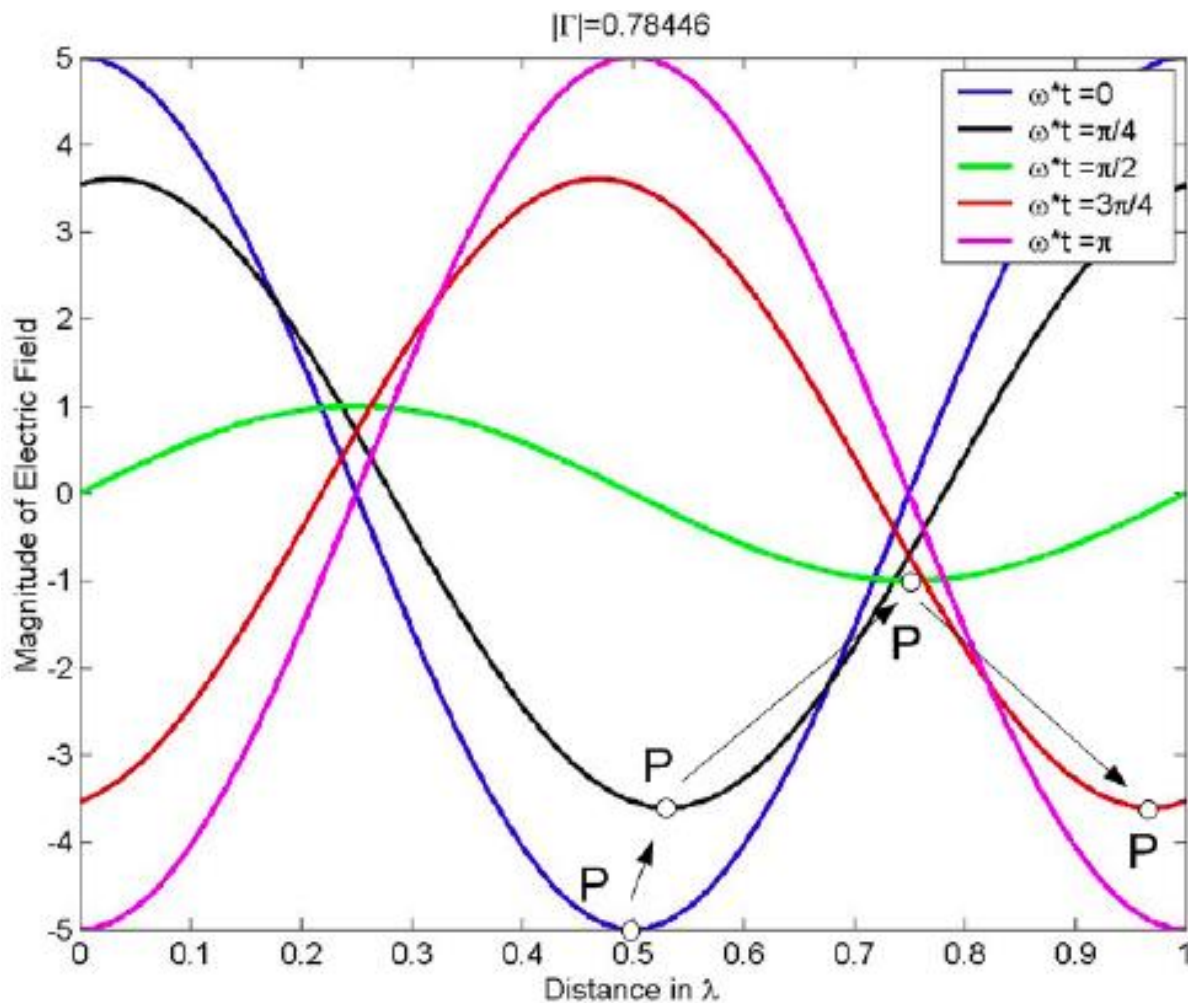
Στάσιμα κύματα

53



Στάσιμα κύματα

54

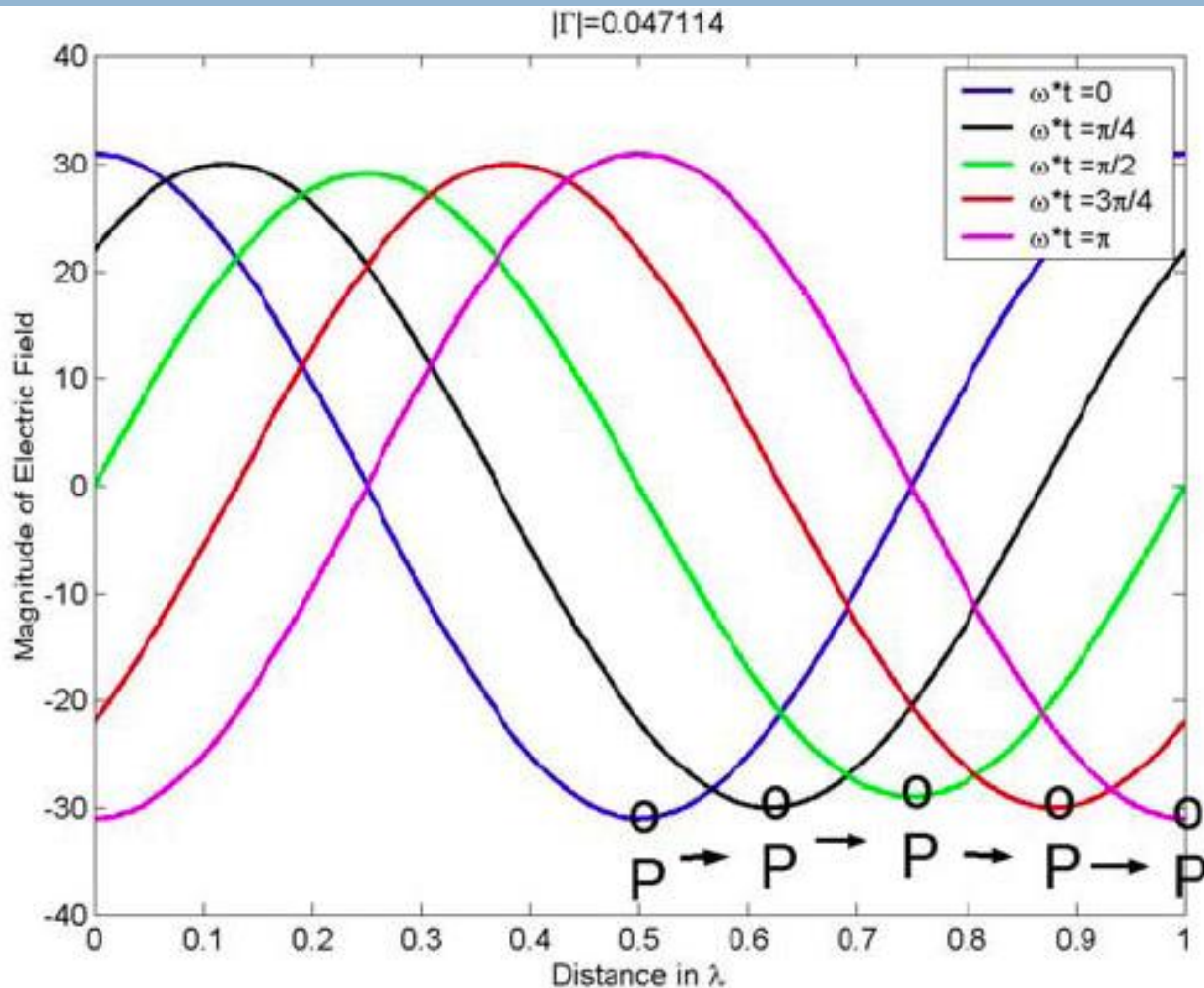


$$E_o^+ = 3 + 2j$$

$$E_o^- = 2 + 2j$$

Στάσιμα κύματα

55



$$E_o^+ \gg E_o^-$$

$$E_o^+ = 30 + j$$

$$E_o^- = 1 + j$$

Ισχύς και Ενέργεια Η/Μ Πεδίου

- **Θεώρημα Poynting** : Το διάνυσμα Poynting σε κάθε σημείο του χώρου, είναι ένα μέτρο του ρυθμού της ενεργειακής ροής ανά μονάδα επιφάνειας στο σημείο αυτό.

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} + \left[\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right]^* \right\}$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t} + \left[\vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right]^* \right\}$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left\{ \text{Re} \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right] + \text{Re} \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) e^{j2\omega t} \right] \right\}$$

Χρονική Μέση Τιμή Διανύσματος Poynting

57

- Υπολογίζεται στη διάρκεια μιας περιόδου

$$\vec{P}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right]$$

- Είναι η πυκνότητα ισχύος ή η χρονική μέση τιμή του ρυθμού ροής της ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας
- Έχει μονάδα $Watt/m^2$. Εξαιρετικά χρήσιμο μέγεθος για τον υπολογισμό της ισχύος που ακτινοβολεί μια κεραία.

- Ισχύει

$$\begin{aligned} \vec{P}_{av}(\vec{r}) &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} |\vec{E}_o|^2 \hat{n} = \frac{|\vec{E}_o|^2}{2Z_o} \hat{n} \end{aligned}$$

Ισχύς Ακτινοβολίας

58

- Το διάνυσμα Poynting και ιδιαίτερα η χρονική μέση τιμή που αναπαριστά ροή ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας, είναι εξαιρετικά χρήσιμα στα προβλήματα ακτινοβολίας.
- Για παράδειγμα με ολοκλήρωση του $\vec{P}_{av}(\vec{r})$ σε μια επιφάνεια που περιέχει μια κεραία εκπομπής μπορούμε να υπολογίσουμε την ισχύ που ακτινοβολεί μια κεραία:

$$W_{rad} = \oint_S \vec{P}_{av}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_S \text{Re} \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right] \cdot d\vec{S}$$

Ταχύτητα Ομάδας

59

- Η ενέργεια του κύματος μεταφέρεται με ταχύτητα που καλείται **ταχύτητα ομάδας** (group velocity) ή ταχύτητα ενέργειας.

- Πυκνότητα Ηλεκτρικής Ενέργειας $w_e = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2$
- Πυκνότητα Μαγνητικής Ενέργειας $w_m = \frac{1}{2} \mu |\vec{H}|^2$

$$u_g = \frac{\vec{P}}{w_m + w_e}$$

- Η ταχύτητα ομάδας δεν μπορεί να υπερβεί την ταχύτητα του φωτός και γενικά συνδέεται με την ταχύτητα φάσης με τη σχέση

$$u_p u_g = c^2 = \frac{1}{\mu \epsilon}$$

Ιδιότητες των Μέσων

60

Διηλεκτρική Σταθερά

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Μαγνητική Διαπερατότητα

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Αγωγιμότητα

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

Σχετική Διηλεκτρική Σταθερά $\epsilon_r = 1 + \chi_e$

Διηλεκτρική Σταθερά του κενού

Ηλεκτρική δεκτικότητα: $(\chi_e \geq 0)$

Μαγνητική δεκτικότητα: χ_m

(Οι δεκτικότητες είναι μέτρα των ιδιοτήτων πόλωσης των υλικών)

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

Σχετική Μαγνητική Διαπερατότητα $\mu_r = 1 + \chi_m$

Μαγνητική Διαπερατότητα του κενού

Ασύρματες Επικοινωνίες

Ιδιότητες των Μέσων

61

- Τα μέσα τα χωρίζουμε σε **διηλεκτρικά**, **αγώγιμα** και **μαγνητικά**.
- Τα **διηλεκτρικά** μέσα που καλούνται και **μονωτές** χαρακτηρίζονται από την έλλειψη ελεύθερων φορτίων και τα άτομα ή τα μόριά τους είναι μακροσκοπικά ουδέτερα.
- Υπό την εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου τα δεσμευμένα φορτία δεν κινούνται στην επιφάνεια του υλικού, αλλά δημιουργούν ηλεκτρικά δίπολα που προσανατολίζονται και ευθυγραμμίζονται ανάλογα με το εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο.
- Θεωρούμε ότι για τα διηλεκτρικά μέσα ισχύει $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 100$
- Για ένα καλό διηλεκτρικό αρκεί $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$

Ιδιότητες των Μέσων

- Τα **μαγνητικά** μέσα παρουσιάζουν μαγνητική πόλωση υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου, δηλαδή τα μαγνητικά δίπολα ευθυγραμμίζονται με το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο κατά τρόπο ανάλογο εκείνου των ηλεκτρικών διπόλων.
- Τα μαγνητικά υλικά χωρίζονται σε *διαμαγνητικά*, *παραμαγνητικά* και τα *σιδηρομαγνητικά*.
- Στα **διαμαγνητικά** η δεκτικότητα είναι αρνητική και συνεπώς η σχετική μαγνητική διαπερατότητα είναι λίγο μικρότερη της μονάδας.
- Στα **παραμαγνητικά** υλικά η δεκτικότητα είναι θετική, αλλά παίρνει μικρές τιμές, οπότε η σχετική διαπερατότητα είναι λίγο μεγαλύτερη της μονάδας.
- Στα **σιδηρομαγνητικά** η σχετική διαπερατότητα είναι πολύ μεγαλύτερη της μονάδας.

Ιδιότητες των Μέσων

63

- Τα *αγώγιμα* συνήθως μεταλλικά μέσα χαρακτηρίζονται από την κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρικών φορτίων παράγοντας ηλεκτρικά ρεύματα.
- Τα ηλεκτρικά φορτία είναι ηλεκτρόνια υψηλής ενέργειας που με την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου απελευθερώνονται από τα άτομα.
- Συνήθως θεωρούμε ότι για τα αγώγιμα μέσα ισχύει

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} > 100$$

Ιδιότητες των Μέσων

64

- Τα μέσα των οποίων οι συντακτικές παράμετροι δεν είναι συνάρτηση του **πλάτους** των πεδίων που εφαρμόζονται σε αυτά, καλούνται **γραμμικά**. Διαφορετικά καλούνται **μη-γραμμικά**.
- Η σχέση που περιγράφει τη μη-γραμμικότητα ως προς το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{D} = \varepsilon(|\vec{E}|)\vec{E} \qquad \varepsilon(|\vec{E}|) = \varepsilon|\vec{E}| + \varepsilon_2|\vec{E}|^2 + \dots$$

Ιδιότητες των Μέσων

65

- Τα μέσα των οποίων οι συντακτικές παράμετροι δεν είναι συνάρτηση της **θέσης** καλούνται **ομογενή**. Διαφορετικά καλούνται **ανομοιογενή**.
- Σε ανομοιογενή υλικά μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Ιδιότητες των Μέσων

66

- Τα μέσα των οποίων οι συντακτικές παράμετροι δεν είναι συνάρτηση της **συχνότητας** καλούνται **μη-διασκορπιστικά**, διαφορετικά καλούνται **διασκορπιστικά μέσα**.
- Για διασκορπιστικά μέσα μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

Ιδιότητες των Μέσων

- Τα μέσα των οποίων οι συντακτικές παράμετροι δεν είναι συνάρτηση της **κατεύθυνσης** των εφαρμοζόμενων πεδίων, καλούνται **ισοτροπικά**, διαφορετικά καλούνται **ανισοτροπικά**.
- Στα ανισοτροπικά υλικά είτε η διηλεκτρική σταθερά είτε η μαγνητική διαπερατότητα είτε και οι δύο, είναι τανυστές, δηλαδή

$$\vec{D} = [\varepsilon] \vec{E} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Επίλυση της Κυματικής Εξίσωσης για διάφορα μέσα

68

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -j\omega \vec{B} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + j\omega \vec{D} = \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E} \\ &= j\omega \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{j\omega \epsilon_0} + \epsilon_r \right) \vec{E} = j\omega \epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \vec{E} \\ &= j\omega \epsilon_0 \epsilon_{rc} \vec{E}\end{aligned}$$

Επίλυση της Κυματικής Εξίσωσης

69

- *Μιγαδική διηλεκτρική σταθερά* του μέσου ϵ_{rc}
- *Σχετική αγωγιμότητα*

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = \frac{18\sigma (mSiemens/m)}{f (MHz)}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = j\omega\mu\sigma\vec{E} - \omega^2\mu\epsilon\vec{E} = \gamma^2\vec{E}$$

Κυματική
Εξίσωση

$$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \text{μιγαδική σταθερά διάδοσης}$$

Επίλυση της Κυματικής Εξίσωσης

70

- Μιγαδική σταθερά διάδοσης γ
- Σταθερά εξασθένησης α (Nepers/m)
- Σταθερά φάσης β (rad/m)
- Αν $(\alpha > 0)$ τότε $(\beta > 0)$
- Για μηδενική αγωγιμότητα ($\sigma = 0$) προκύπτουν οι γνωστές εξισώσεις για χώρο ελεύθερο χωρίς πηγές και ρεύματα αγωγιμότητας. $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$
- Τα μέσα τα οποία παρουσιάζουν αγωγιμότητα καλούνται πολλές φορές και μέσα με απώλειες (lossy media).

Επίλυση της Κυματικής Εξίσωσης

71

Λύση : Κύματα TEM $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_o^+ e^{-\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} + \vec{E}_o^- e^{+\vec{\gamma} \cdot \vec{r}}$

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{Z} (\hat{n}^+ \times \vec{E}_o^+ e^{-\vec{\gamma} \cdot \vec{r}}) + \frac{1}{Z} (\hat{n}^- \times \vec{E}_o^- e^{+\vec{\gamma} \cdot \vec{r}}) \\ &= \frac{1}{Z} (\hat{n}^+ \times \vec{E}_o^+ e^{-\vec{\gamma} \cdot \vec{r}}) - \frac{1}{Z} (\hat{n}^+ \times \vec{E}_o^- e^{+\vec{\gamma} \cdot \vec{r}})\end{aligned}$$

Αντίσταση
του μέσου
μετάδοσης

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0} + \varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}}}$$

Επίλυση της Κυματικής Εξίσωσης

72

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_o^+ e^{-\gamma z} + \vec{E}_o^- e^{\gamma z} = \vec{E}_o^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \vec{E}_o^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right)} \quad \text{Nepers / m}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1 \right)} \quad \text{rad / m}$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{και} \quad \gamma = j\beta = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} = jk$$

Ταχ. Διάδοσης

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \mu_r \epsilon_o \epsilon_r}} \quad (\mu_r = 1) \quad u = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Επίλυση της Κυματικής Εξίσωσης

73

- Η σταθερά εξασθένησης συνήθως δίνεται σε dB/m και όχι Nepers/m

$$\begin{aligned} dB &= 20 \log_{10} (e^{-\alpha z}) = 20(-\alpha z) \log_{10} (e) \\ &= 20(-\alpha z)(0.434) = -8.68(\alpha z) \end{aligned}$$

$$|\alpha (\text{Nepers} / m)| = \frac{1}{8.68} |\alpha (\text{dB} / m)|$$

$$\vec{P}_{av}(z) = \hat{z} P_{av}(0) e^{-2\alpha z}$$

$$L(z) = 10 \log \frac{|\vec{P}_{av}(0)|}{|\vec{P}_{av}(z)|} = 10 \log e^{2\alpha z} = 20\alpha z \log e = 8.68\alpha z \quad (\text{dB})$$

Επίλυση της Κυματικής Εξίσωσης

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = jk_o\sqrt{\epsilon_{rc}\mu_r}$$

Για αγώγιμα υλικά $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} > 100$

$$\gamma \approx \sqrt{j\omega\mu\sigma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \angle 45^\circ$$

$$\alpha = \beta = k = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad u = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad Z \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^\circ$$

Δηλαδή για μεγάλη αγωγιμότητα έχουμε μεγάλη εξασθένηση και μετατόπιση φάσης ανά μονάδα μήκους

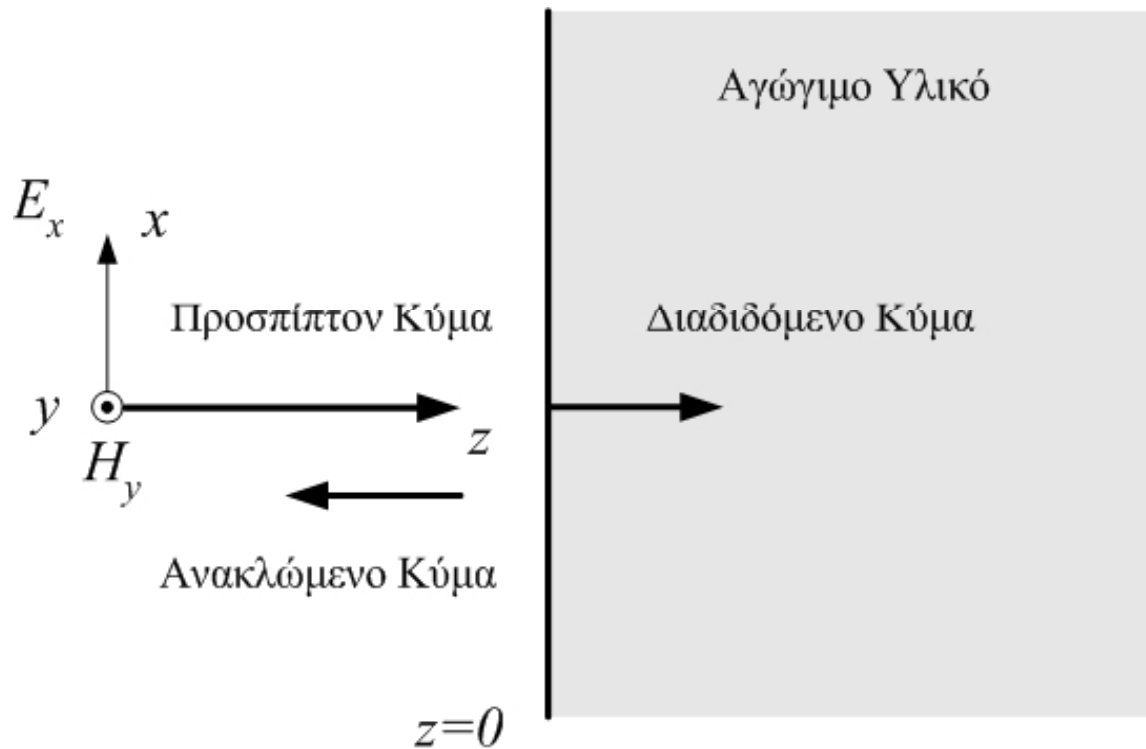
Παραδείγματα Υλικών

75

Μέσο	Σχετική Διηλεκτρική Σταθερά	Αγωγιμότητα	(Σχετική Αγωγιμότητα) @ Συχνότητα
Χαλκός	1	$5,8 \cdot 10^7$	
Θάλασσα	80-81	4	
Νερό	80	10^{-3} ως $5 \cdot 10^{-3}$	
Τυπικό έδαφος πόλης	3	10^{-4}	
Ορεινό ή βραχώδες έδαφος	7	10^{-3} ως $5 \cdot 10^{-3}$	
Πεδινό έδαφος	30	10^{-2} ως $3 \cdot 10^{-2}$	
Μέσο έδαφος ημιαστικής περιοχής	14	10^{-2}	
Γυαλί	3,8-8		$< 3 \cdot 10^{-3}$ @ 3GHz
Ξύλο	1,5-2,1		< 0.07 @ 3GHz
Στεγνό Τούβλο	4		0,05-0,1 @ 4,3GHz
Στεγνό Τσιμέντο	4-6		0,1-0,3 @ 3,6GHz
Χιόνι	1,2-1,5		$< 6 \cdot 10^{-3}$ @ 3GHz
Πάγος	3,2		$2,9 \cdot 10^{-3}$ @ 3GHz

Βάθος Διείσδυσης

76



Αν το μέσο είναι καλός αγωγός το κύμα εξασθενεί πολύ γρήγορα κατά τη γρήγορη διείσδυσή του στο μέσο, επειδή η παράμετρος α , παίρνει μεγάλες τιμές

$$E_x(z) = E_0 e^{-\gamma z} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

Το **βάθος διείσδυσης** ορίζεται ως το βάθος στο οποίο το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου μειώνεται στο $1/e$ της αρχικής του τιμής ή κατά το 36,8% κατά τη διείσδυση του κύματος σε απόσταση δ .

Βάθος Διείσδυσης

77

- Για ($z=0$) $E_x = E_o$
- Ενώ από τον ορισμό του βάθους διείσδυσης για ($z=\delta$)

$$(\alpha z = 1) \quad |E_x(z = \delta)| = E_o e^{-1} = \frac{E_o}{e}$$

$$\alpha \delta = 1 \Rightarrow \delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right)}}$$

$$L(z) = 8.68 \frac{z}{\delta}$$

Δηλαδή έχουμε περίπου απώλειες 9dB για κάθε αύξηση της απόστασης διείσδυσης κατά δ .

Βάθος Διείσδυσης

78

Υλικό	Συχνότητα Η/Μ Κύματος	Βάθος Διείσδυσης
Χαλκός	1kHz	2.1mm
	1MHz	0.066mm
	100MHz	0.0066mm
Θάλασσα	1kHz	7.96m
	1MHz	0.252m
	100MHz	26.6mm
Νερό	1kHz	225.18m
	1MHz	10.63m
	100MHz	9.50m

Για καλούς αγωγούς

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\beta}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\delta$$

Πόλωση Η/Μ Κυμάτων

79

- Η πόλωση ενός ομοιόμορφου επίπεδου κύματος είναι ο γεωμετρικός τόπος που διαγράφεται από το άκρο του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου.
- Αφού το ηλεκτρικό πεδίο είναι πάντα κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης, ο γεωμετρικός τόπος διαγράφεται σε ένα επίπεδο κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης.
- Η πόλωση συνεπώς αναφέρεται στη χρονική μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου σε κάποιο σταθερό σημείο στο χώρο. Περιγράφει τόσο τη χρονικά μεταβαλλόμενη κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου όσο και το πλάτος του.

Πόλωση Η/Μ Κυμάτων

80

- Υπάρχουν 3 κατηγορίες πόλωσης
 - ▣ Γραμμική
 - ▣ Κυκλική
 - ▣ Ελλειπτική (γενική περίπτωση)
- Θεωρώ διάδοση κατά μήκος του άξονα z και επιπλέον παρατηρούμε το ηλεκτρικό πεδίο για $z=0$

$$\hat{n} = \hat{z} \Rightarrow E_{oz} = 0$$

$$z = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = 0$$

Πόλωση Η/Μ Κυμάτων

81

- Γενικά οι συνιστώσες x, y του ηλεκτρικού πεδίου είναι μιγαδικές

$$E_{ox} = |E_{ox}| e^{j\phi_x}$$

$$E_{oy} = |E_{oy}| e^{j\phi_y}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(0, t) = \vec{\mathcal{E}}_x(0, t) + \vec{\mathcal{E}}_y(0, t)$$

$$= \text{Re} \left[|E_{ox}| e^{j\phi_x} e^{j\omega t} \right] \hat{x} + \text{Re} \left[|E_{oy}| e^{j\phi_y} e^{j\omega t} \right] \hat{y}$$

$$= |E_{ox}| \cos(\omega t + \phi_x) \hat{x} + |E_{oy}| \cos(\omega t + \phi_y) \hat{y}$$

- Όλες οι περιπτώσεις πόλωσης προκύπτουν επιλέγοντας κατάλληλες τιμές για τα πλάτη και τις φάσεις

Πόλωση Η/Μ Κυμάτων

82

- Μετά από πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση έλλειψης στο επίπεδο xy

$$\sin^2(\phi_x - \phi_y) = \frac{\mathcal{E}_x^2(t)}{|E_{ox}|^2} + \frac{\mathcal{E}_y^2(t)}{|E_{oy}|^2} - 2 \cos(\phi_x - \phi_y) \frac{\mathcal{E}_x(t)\mathcal{E}_y(t)}{|E_{ox}||E_{oy}|}$$

- Όλες οι περιπτώσεις προκύπτουν επιλέγοντας κατάλληλες τιμές για τα μεγέθη:

$$|E_{ox}| \quad |E_{oy}| \quad \phi_x \quad \phi_y$$

Γραμμική Πόλωση

83

- Θεωρούμε ότι

$$\phi_x = \phi_y = \phi$$

- Άρα

$$\vec{\mathcal{E}}_x(0, t) = |E_{ox}| \cos(\omega t + \phi) \hat{x}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_y(0, t) = |E_{oy}| \cos(\omega t + \phi) \hat{y}$$

$$|\vec{\mathcal{E}}(0, t)| = \sqrt{|E_{ox}|^2 + |E_{oy}|^2} \cos(\omega t + \phi)$$

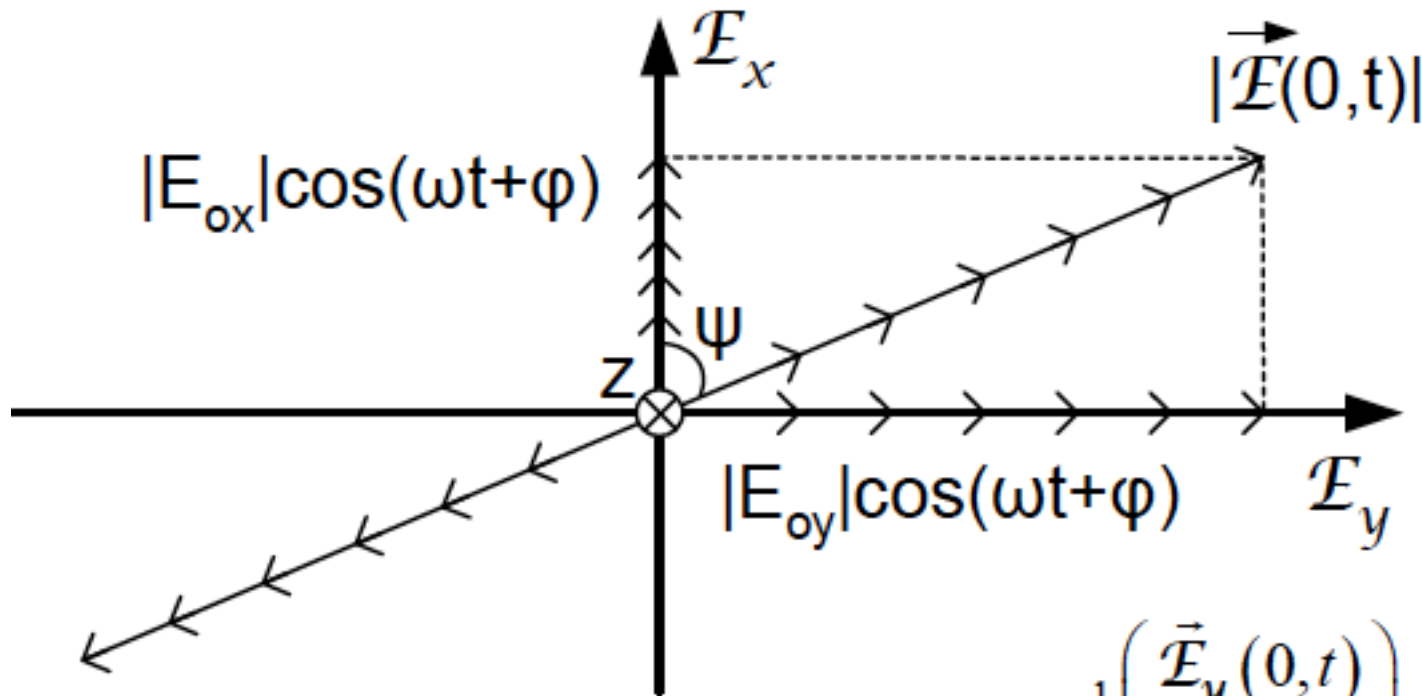
- Η εξίσωση έλλειψης εκφυλίζεται:

$$\left(\frac{\mathcal{E}_x(t)}{|E_{ox}|} - \frac{\mathcal{E}_y(t)}{|E_{oy}|} \right)^2 = 0$$

Γραμμική Πόλωση

84

- Δηλαδή ευθεία γραμμή που σχηματίζει γωνία ψ ως προς τον άξονα x , ίση με τη φάση του πεδίου.



$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{\vec{\mathcal{E}}_y(0,t)}{\vec{\mathcal{E}}_x(0,t)} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{|E_{oy}|}{|E_{ox}|} \right)$$

Γραμμική Πόλωση

85

- Αν επιλέγαμε

$$\phi_y = \phi_x + \pi = \phi + \pi \quad \eta \quad \phi_y = \phi_x - \pi = \phi - \pi$$

- ΤΟΤΕ

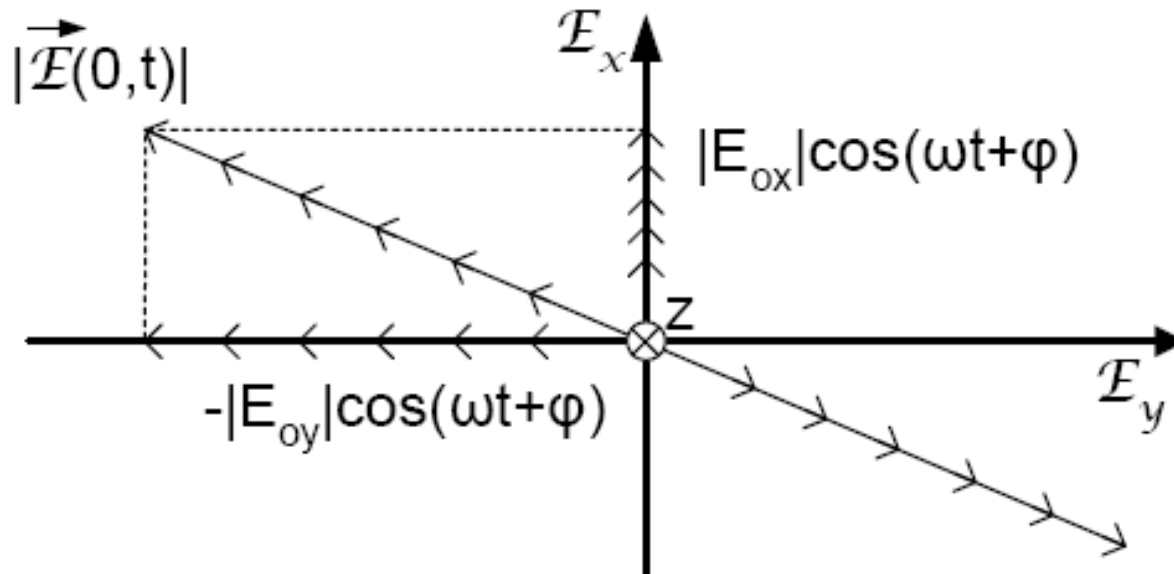
$$\vec{\mathcal{E}}_x(0, t) = |E_{ox}| \cos(\omega t + \phi) \hat{x}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_y(0, t) = |E_{oy}| \cos(\omega t + \phi + \pi) \hat{y} = -|E_{oy}| \cos(\omega t + \phi) \hat{y}$$

$$\left(\frac{\mathcal{E}_x(t)}{|E_{ox}|} + \frac{\mathcal{E}_y(t)}{|E_{oy}|} \right)^2 = 0$$

Γραμμική Πόλωση

86

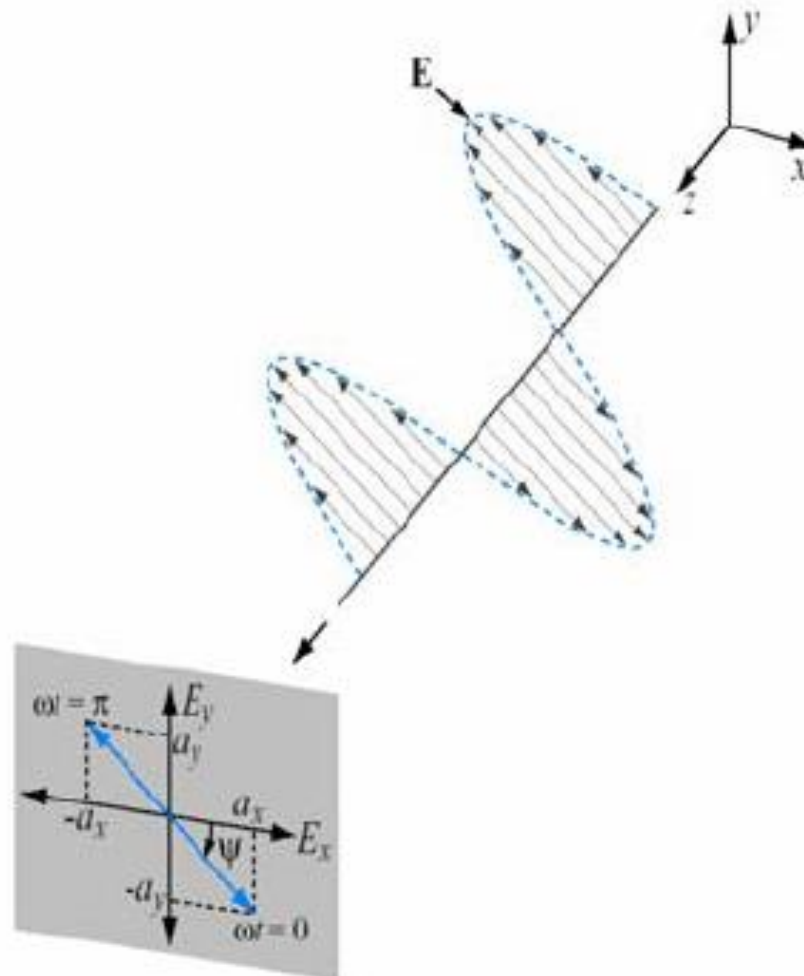


- Αν επιλέγαμε μηδενισμό της x , ή της y συνιστώσας τότε το ηλεκτρικό πεδίο θα είχε μόνο την συνιστώσα y ή x αντίστοιχα.

Γραμμική Πόλωση

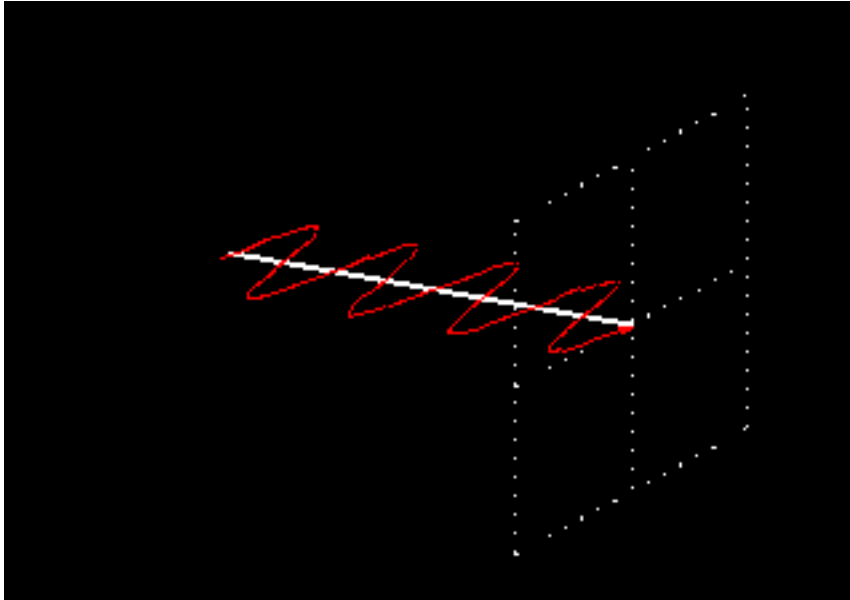
87

- **Κύμα που οδεύει στην κατεύθυνση +z**



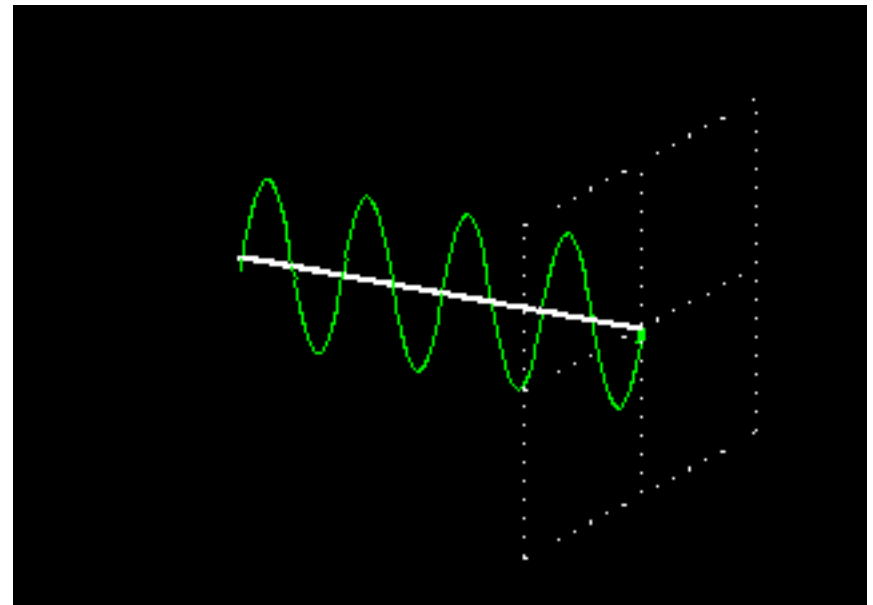
Γραμμική Πόλωση

88



Οριζόντια Πόλωση

Κάθετη Πόλωση



Κυκλική (Ωρολογιακή) Πόλωση

89

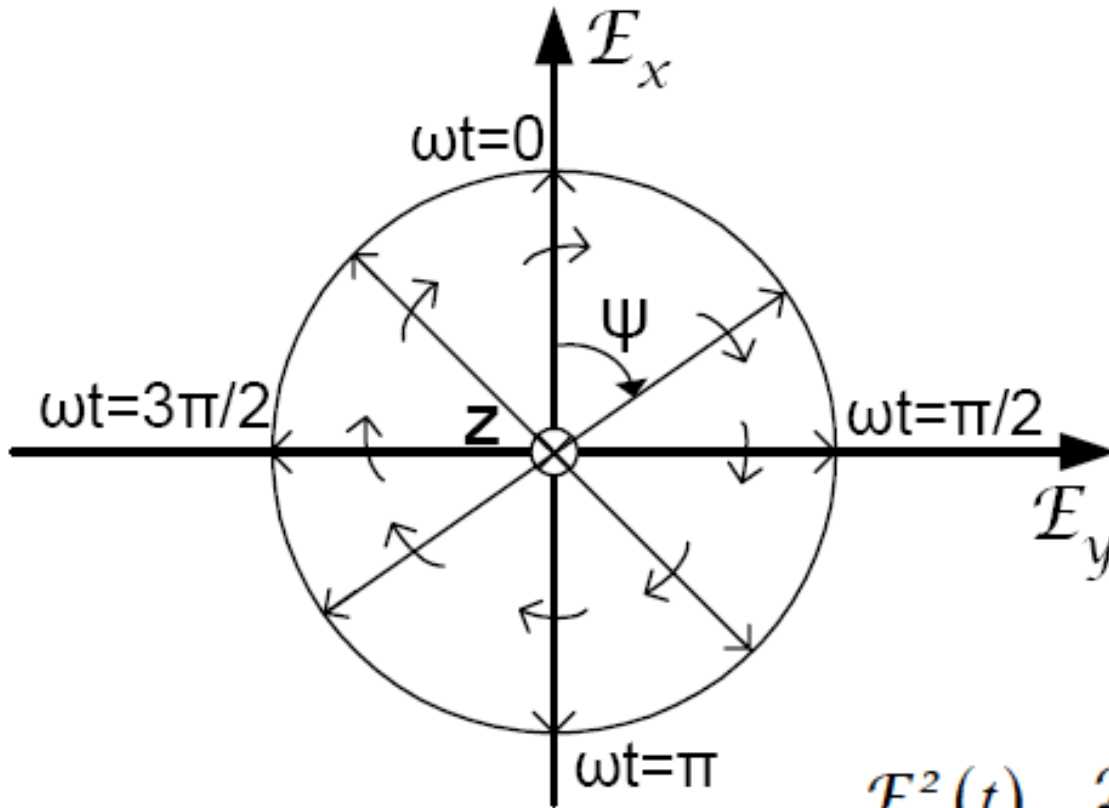
- Αν υποθέσουμε ότι $\phi_x = 0$ και $\phi_y = -\frac{\pi}{2}$
 $|E_{ox}| = |E_{oy}| = E_o$ (Προηγείται η συνιστώσα E_x ως προς την E_y κατά $\pi/2$)

- Τότε $\vec{E}_x(0, t) = E_o \cos(\omega t) \hat{x}$
 $\vec{E}_y(0, t) = E_o \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \hat{y} = E_o \sin(\omega t) \hat{y}$

- Άρα $|\vec{E}(0, t)| = E_o$
$$\psi = \tan^{-1} \left[\frac{\vec{E}_y(0, t)}{\vec{E}_x(0, t)} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{E_o \sin(\omega t)}{E_o \cos(\omega t)} \right]$$
$$= \tan^{-1} [\tan(\omega t)] = \omega t$$

Κυκλική (Ωρολογιακή) Πόλωση

90

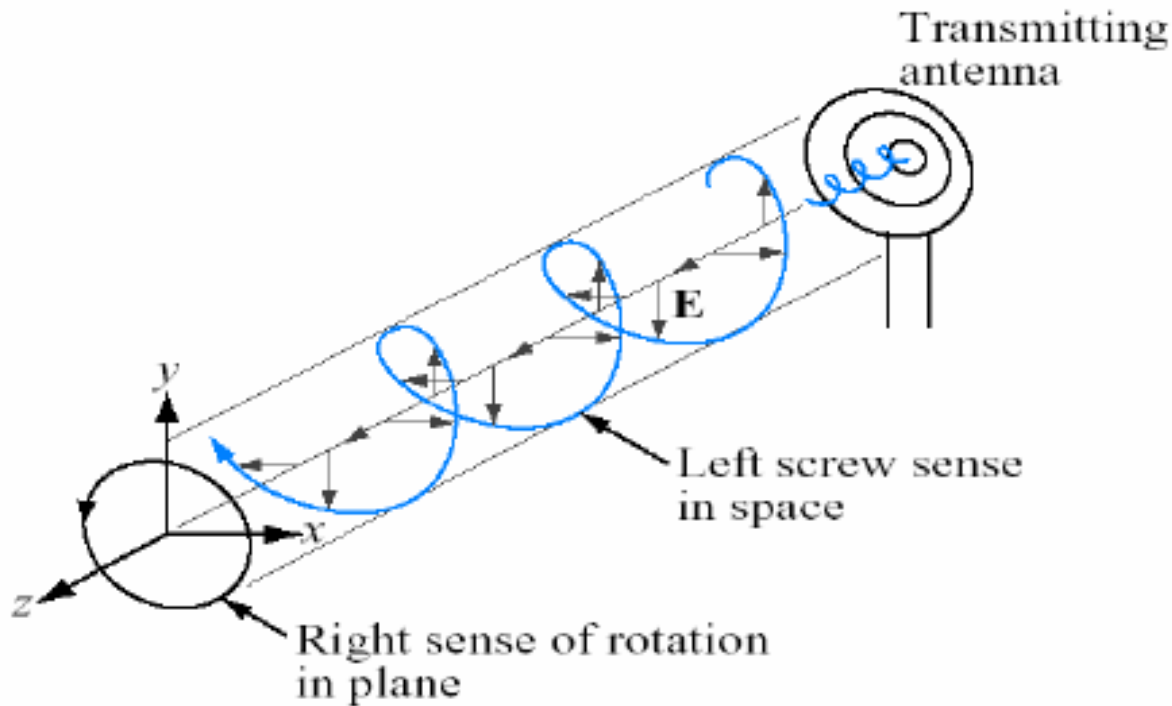


$$\frac{\mathcal{E}_x^2(t)}{|E_{ox}|^2} + \frac{\mathcal{E}_y^2(t)}{|E_{oy}|^2} = \frac{\mathcal{E}_x^2(t) + \mathcal{E}_y^2(t)}{|E_{ox}|^2} = 1$$

Κυκλική (Ωρολογιακή) Πόλωση

91

- **Δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο κύμα που εκπέμπεται από ελικοειδή κεραία**



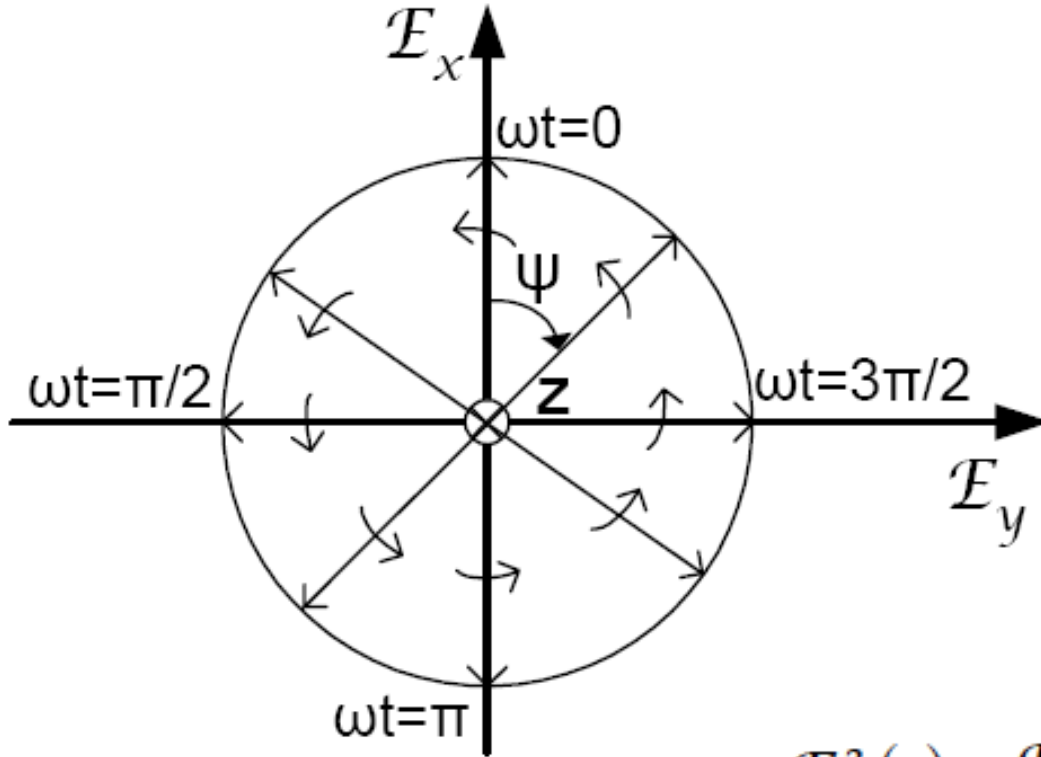
Κυκλική (Ανθρωρολογιακή) Πόλωση

92

- Αν υποθέσουμε ότι $\phi_x = 0$ και $\phi_y = \frac{\pi}{2}$
 $|E_{ox}| = |E_{oy}| = E_o$ (Προηγείται η συνιστώσα E_y
ως προς την E_x κατά $\pi/2$)
- Τότε $\vec{E}_x(0, t) = E_o \cos(\omega t) \hat{x}$
 $\vec{E}_y(0, t) = E_o \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{y} = -E_o \sin(\omega t) \hat{y}$
- Άρα $|\vec{E}(0, t)| = E_o$ και $\psi = -\omega t$

Κυκλική (Ανθρωρολογιακή) Πόλωση

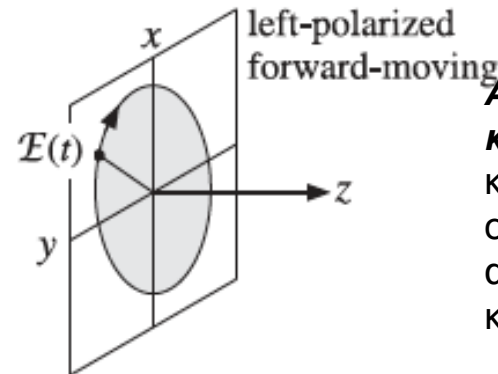
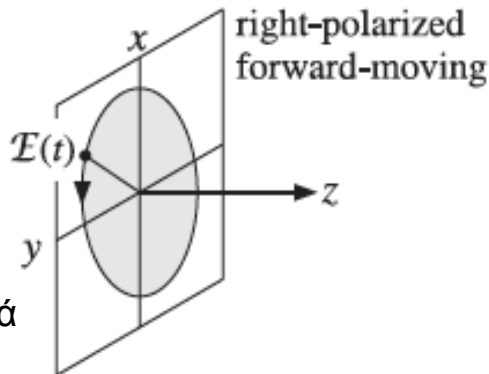
93



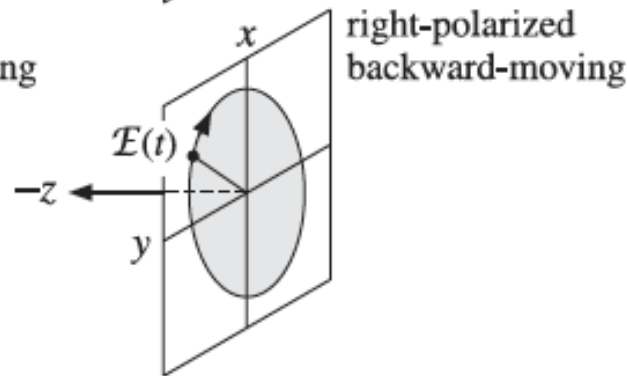
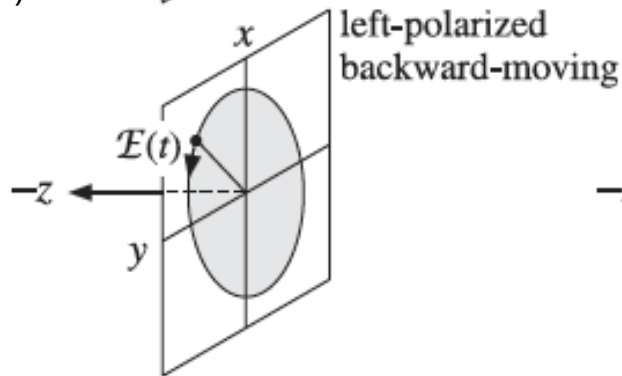
$$\frac{\mathcal{E}_x^2(t)}{|E_{ox}|^2} + \frac{\mathcal{E}_y^2(t)}{|E_{oy}|^2} = \frac{\mathcal{E}_x^2(t) + \mathcal{E}_y^2(t)}{|E_{ox}|^2} = 1$$

Κυκλική Πόλωση

Δεξιόστροφη κυκλική πόλωση ($\varphi = -\pi/2$)
 (κανόνας δεξιόστροφου κοχλία, δηλ. όταν ο αντίχειρας δείχνει τη διεύθυνση διάδοσης, τα δάχτυλα δείχνουν τη φορά περιστροφής του E .)



Αριστερόστροφη κυκλική πόλωση (ο κανόνας του δεξιόστροφου κοχλία δείχνει ανάποδα από την κατεύθυνση διάδοσης)



$$E(z) = A (\hat{x} - j\hat{y}) e^{-jkz}$$

(right-polarized, forward-moving)

$$E(z) = A (\hat{x} + j\hat{y}) e^{-jkz}$$

(left-polarized, forward-moving)

$$E(z) = A (\hat{x} - j\hat{y}) e^{jkz}$$

(left-polarized, backward-moving)

$$E(z) = A (\hat{x} + j\hat{y}) e^{jkz}$$

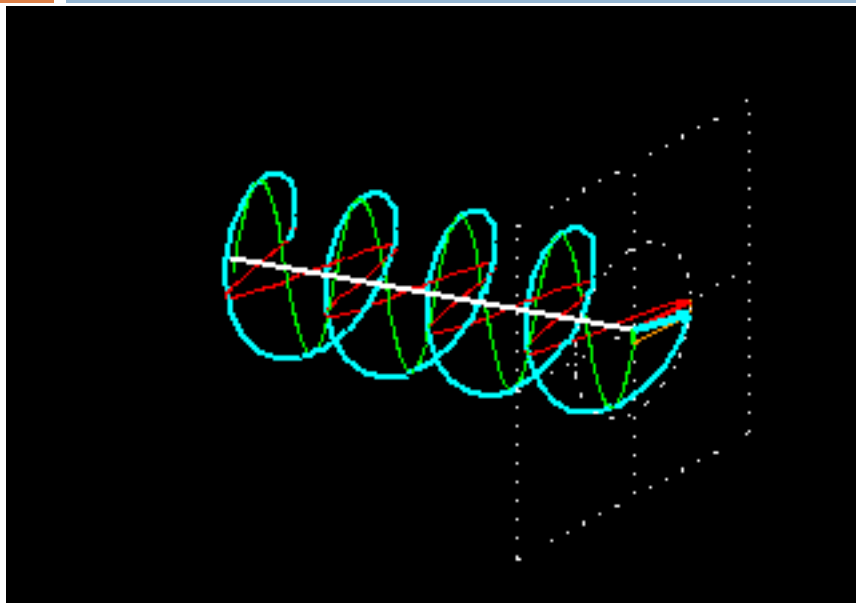
(right-polarized, backward-moving)

$$E_0 = A (\hat{x} - j\hat{y})$$

$$A = |E_{ox}| = |E_{oy}|$$

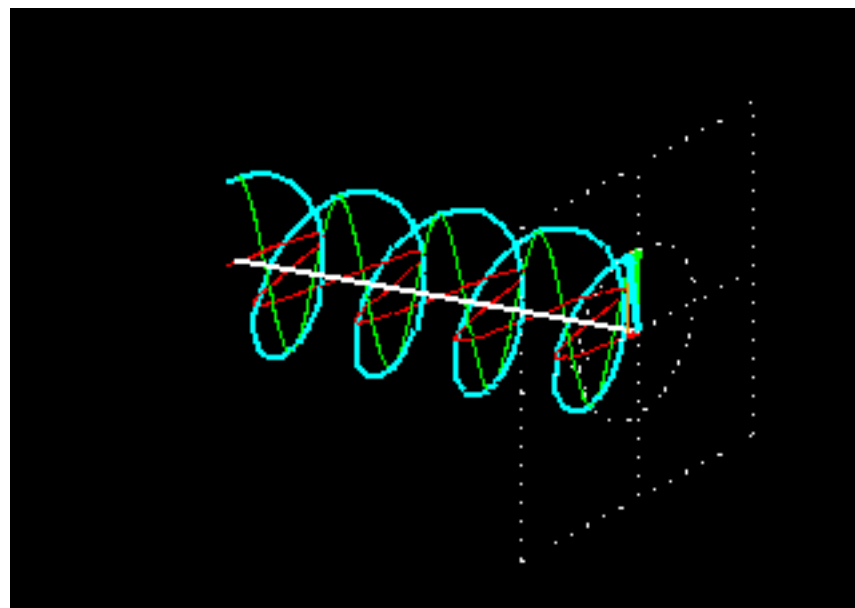
Κυκλική Πόλωση

95



Δεξιόστροφη Πόλωση

Αριστερόστροφη Πόλωση



Ελλειπτική Πόλωση

- Αν αντί για ίσα πλάτη θεωρήσουμε

$$|E_{ox}| = E_1 + E_2 \quad \text{και} \quad |E_{oy}| = E_1 - E_2$$

$$\phi_x = \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \phi_y = 0$$

- Αποδεικνύεται ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων από τα οποία διέρχεται το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου είναι έλλειψη με μεγάλο ημι-άξονα που συμπίπτει με τον άξονα x και μέγεθος

$$|\vec{E}(0,t)|_{\max} = |E_1 + E_2|$$

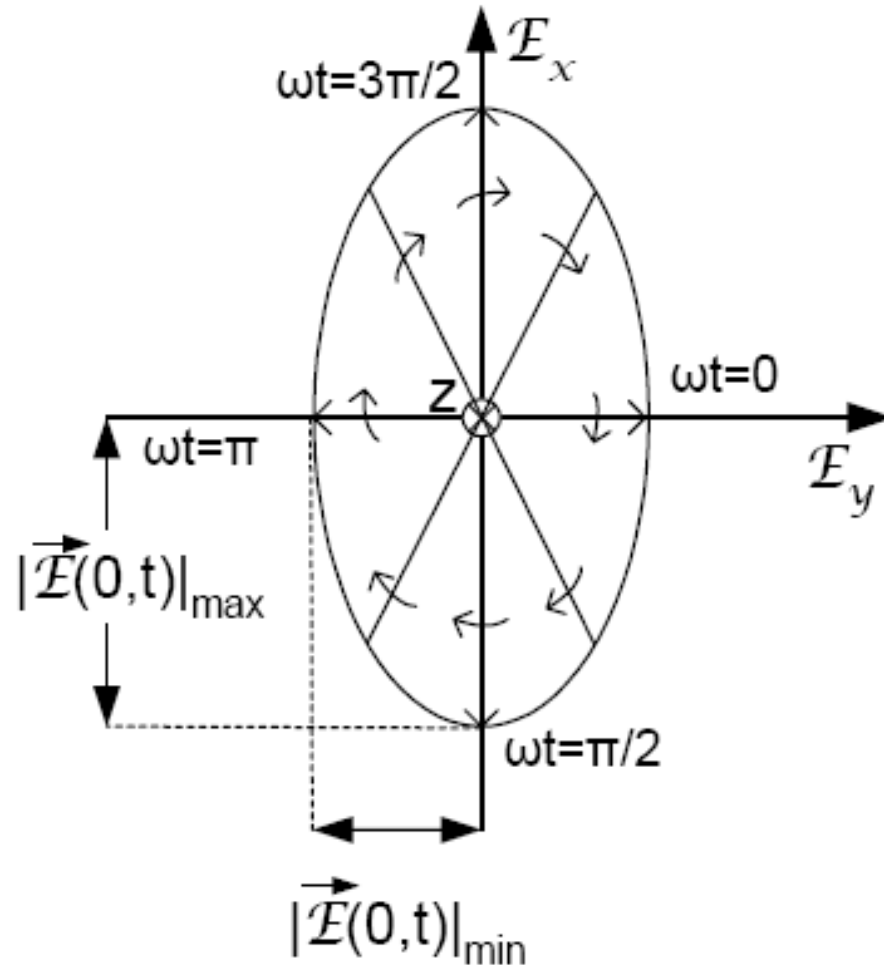
- Και μικρό ημι-άξονα που συμπίπτει με τον άξονα y και

$$|\vec{E}(0,t)|_{\min} = |E_1 - E_2|$$

Ελλειπτική (Ωρολογιακή) Πόλωση

97

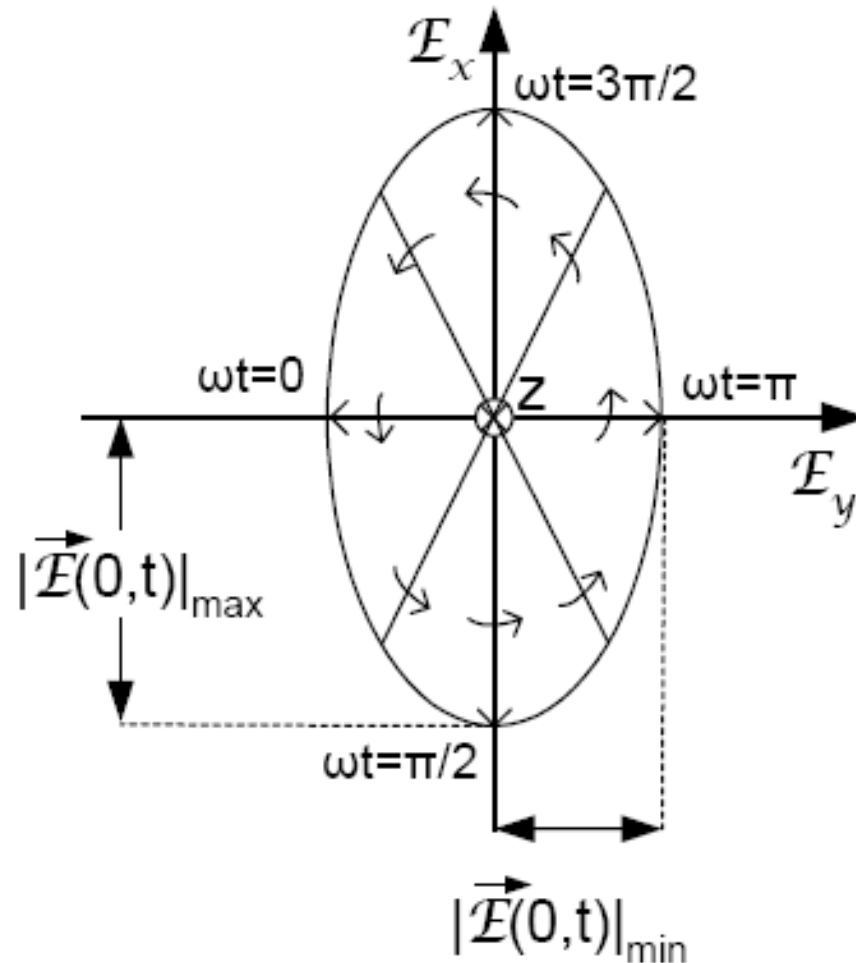
- Αν $E_1 > E_2$



Ελλειπτική (Ανθρωρολογιακή) Πόλωση

98

- Αν $E_1 < E_2$



Ελλειπτική Πόλωση

99

□ Αν $|E_{ox}| = E_1 - E_2$ και $|E_{oy}| = E_1 + E_2$

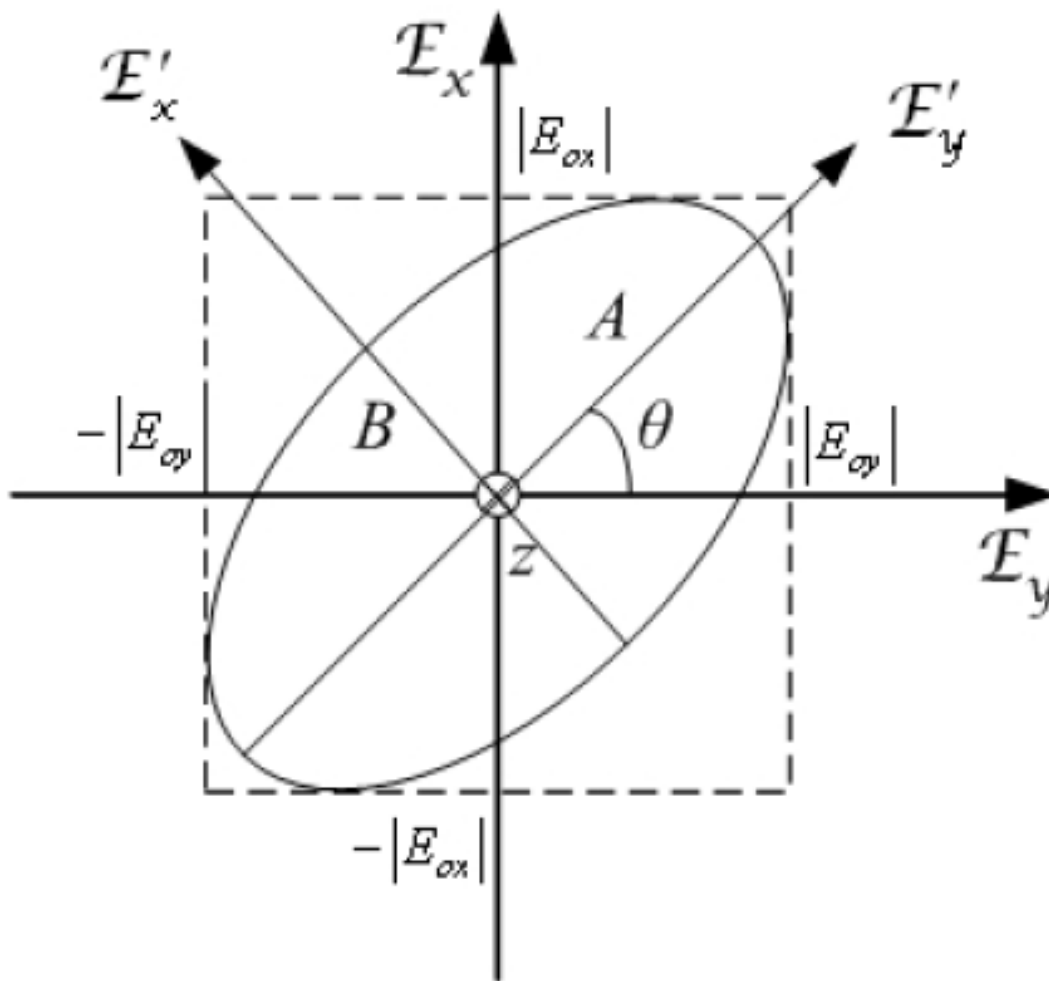
$$\phi_x = \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \phi_y = 0$$

- τότε στρέφεται η έλλειψη και ο μεγάλος ημι-άξονας συμπίπτει με τον άξονα y , ενώ ο μικρός με τον άξονα x , παραμένοντας ωρολογιακή για $E_1 > E_2$, και ανθωρολογιακή για $E_1 < E_2$.
- Υπάρχει βέβαια και η γενική περίπτωση όπου ο μεγάλος και ο μικρός άξονας της έλλειψης δεν συμπίπτουν με τους άξονες x, y , αλλά υπάρχει μια κλίση της έλλειψης για

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y \neq \frac{m\pi}{2} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ελλειπτική Πόλωση

100



Ελλειπτική Πόλωση

101

$$\tan(2\theta) = \frac{2|E_{ox}||E_{oy}|}{|E_{ox}|^2 - |E_{oy}|^2} \cos(\Delta\phi)$$

$$A^2 = \frac{1}{2} \left(|E_{ox}|^2 + |E_{oy}|^2 \right) + \frac{s}{2} \sqrt{\left(|E_{ox}|^2 - |E_{oy}|^2 \right)^2 + 4|E_{ox}|^2 |E_{oy}|^2 \cos^2(\Delta\phi)}$$

$$B^2 = \frac{1}{2} \left(|E_{ox}|^2 + |E_{oy}|^2 \right) - \frac{s}{2} \sqrt{\left(|E_{ox}|^2 - |E_{oy}|^2 \right)^2 + 4|E_{ox}|^2 |E_{oy}|^2 \cos^2(\Delta\phi)}$$

$$s = \text{sign}\left(|E_{ox}| - |E_{oy}|\right)$$

Ελλειπτική Πόλωση

102

- Αν η διαφορά φάσης δεν είναι περιττό πολλαπλάσιο των 90° και $|E_{ox}| = |E_{oy}|$

$$\theta = 45^\circ \quad A = |E_{ox}| \sqrt{1 + \cos \Delta\phi} \quad B = |E_{ox}| \sqrt{1 - \cos \Delta\phi}$$

- Η φορά περιστροφής είναι ωρολογιακή (CW) αν

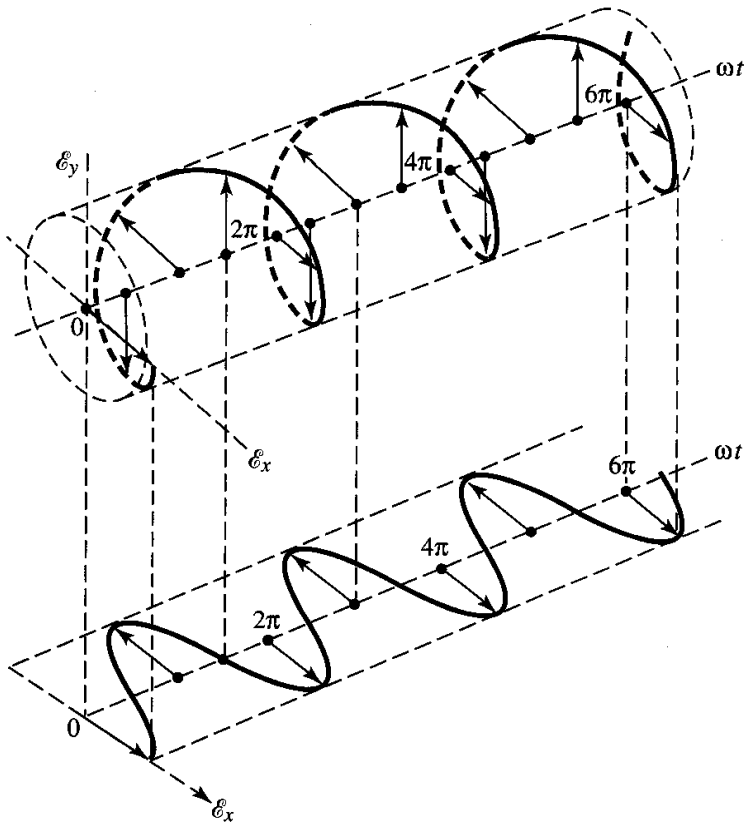
$$\sin(\Delta\phi) < 0$$

- Και ανθωρολογιακή (CCW) αν

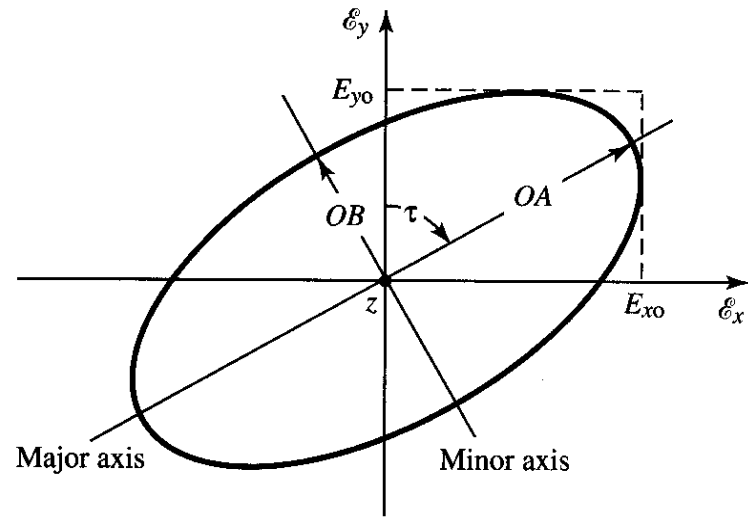
$$\sin(\Delta\phi) > 0$$

Ελλειπτική Πόλωση

103



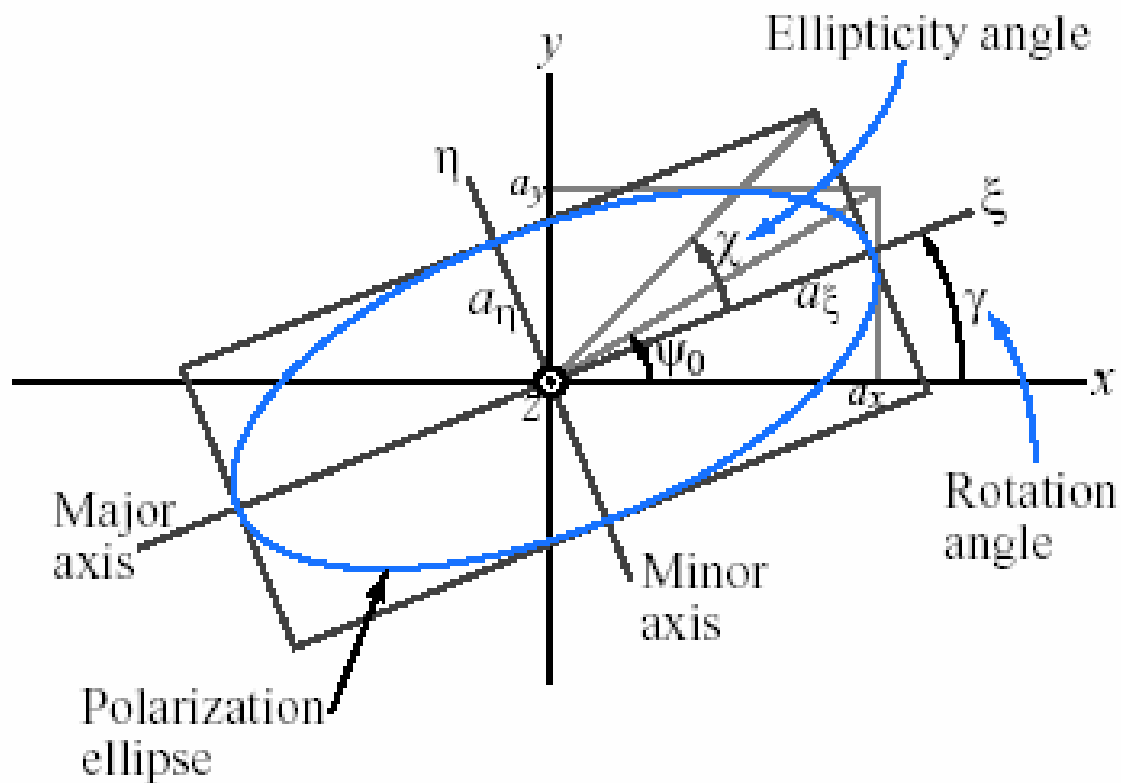
(a) Rotation of wave



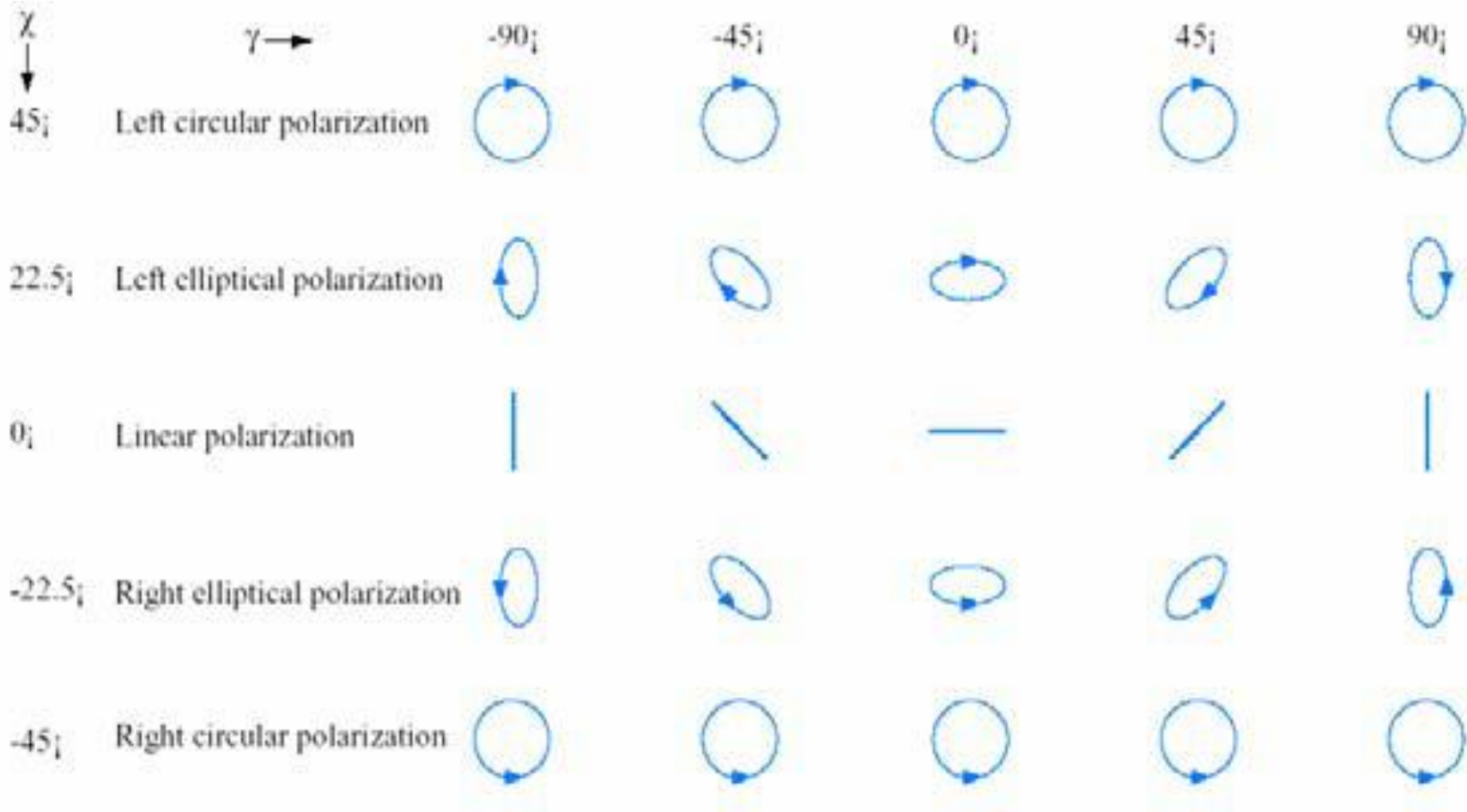
(b) Polarization ellipse

Ελλειπτική Πόλωση

104



Ελλειπτική Πόλωση



Ελλειπτική Πόλωση

106

- Έστω το μιγαδικό ηλεκτρικό πεδίο:

$$\vec{E} = (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y) e^{-jkz}$$

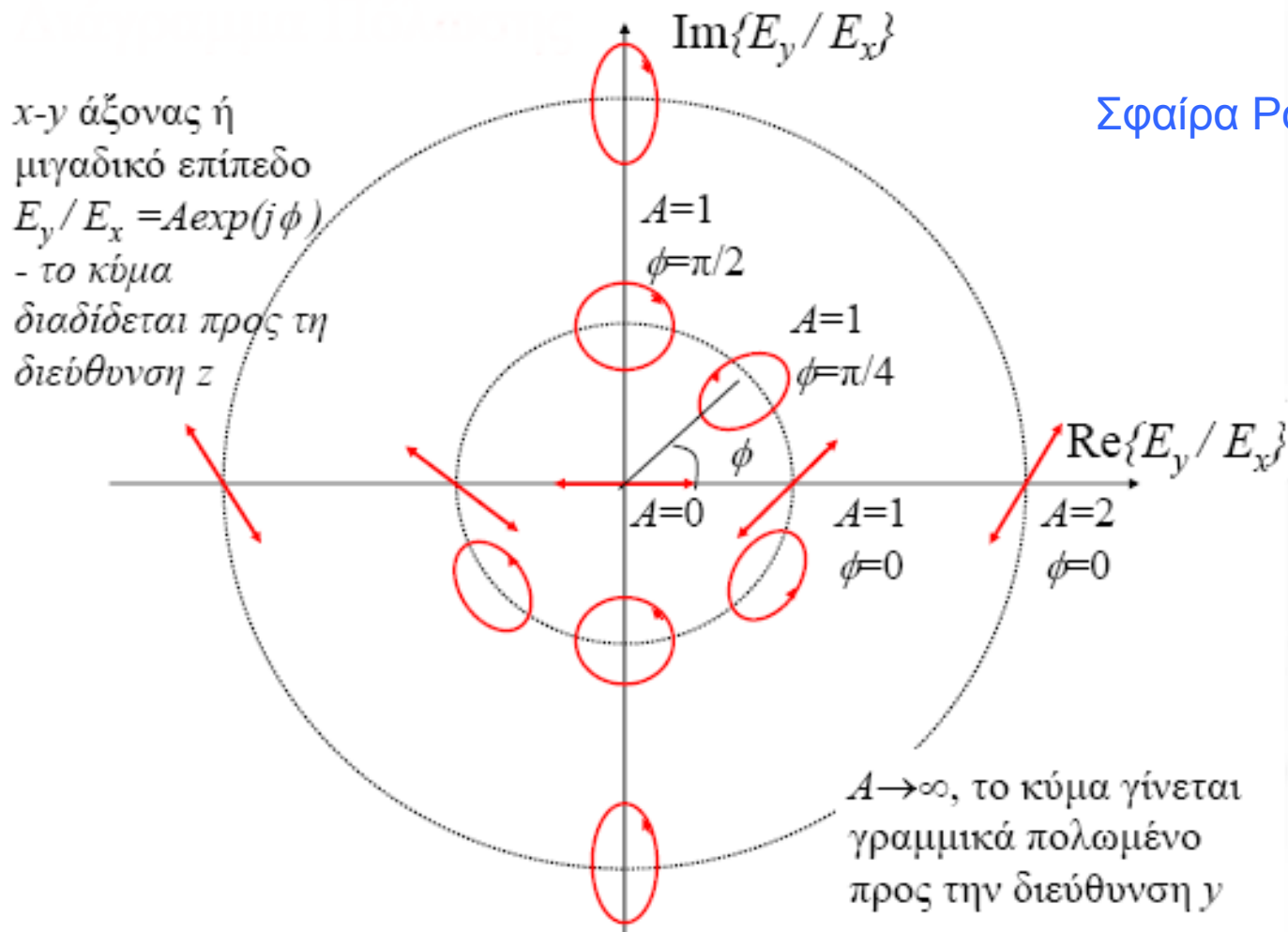
- Τότε τα A και ϕ καθορίζονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{E_x}{E_y} = Ae^{j\phi} \quad A = \frac{|E_{oy}|}{|E_{ox}|}$$

- και απεικονίζονται στο μιγαδικό επίπεδο ως εξής:

Διάγραμμα Πόλωσης

107



Λήψη Σημάτων Ραδιοφώνου και Τηλεόρασης

108

- Ραδιοφωνικοί σταθμοί AM:
 - ▣ E κάθετο στο έδαφος (vertically polarized)
- Ραδιοφωνικοί σταθμοί FM:
 - ▣ κυκλική πόλωση
- Εκπομπές τηλεόρασης:
 - ▣ E οριζόντιο (horizontally polarized)

Ανακεφαλαίωση

109

□ Πόλωση

□ Γραμμική Πόλωση έχουμε αν

- Μια από τις δύο συνιστώσες είναι μηδενική **ή**
- Η διαφορά φάσης των δύο συνιστωσών είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του π , δηλαδή

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = n\pi \quad n = \pm 0, 1, 2, \dots$$

□ Κυκλική Πόλωση αν

- Τα πλάτη των δύο ορθογώνιων συνιστωσών είναι ίσα **και** η διαφορά φάσης είναι περιττό πολλαπλάσιο του $\pi/2$

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = \pm \left(\frac{1}{2} + 2n \right) \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ανακεφαλαίωση

110

□ Πόλωση

□ Ελλειπτική Πόλωση έχουμε αν

- Η διαφορά φάσης των δύο συνιστωσών είναι περιττό πολλαπλάσιο του $\pi/2$ και τα πλάτη δεν είναι ίσα,

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = \pm \left(\frac{1}{2} + 2n \right) \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Η ανεξαρτήτως των πλατών η διαφορά φάσης δεν είναι πολλαπλάσιο του $\pi/2$

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y \neq \pm n \frac{\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ανακεφαλαίωση

111

- **Φορά Περιστροφής**
- Η φορά περιστροφής προκύπτει παρατηρώντας το κύμα ενώ απομακρύνεται και **περιστρέφοντας τη συνιστώσα που προηγείται προς τη συνιστώσα που έπεται**. Η περιστροφή γίνεται πάντα προς τη μικρότερη γωνία που σχηματίζουν οι δύο συνιστώσες.
- Γενικά υπολογίζουμε

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y$$

- Επίσης προσέξτε την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος και τοποθετήστε σωστά τις xyz ανάλογα με το δεξιόστροφο κοχλία.

Ανακεφαλαίωση

112

□ Φορά Περιστροφής για Κυκλική Πόλωση

□ Α) Κατεύθυνση $+\hat{z}$

- Α.1) Η συνιστώσα E_x προηγείται

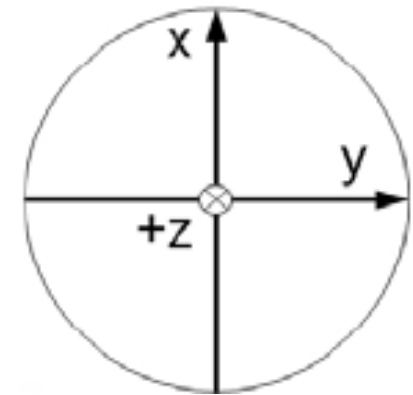
$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Άρα στρέφω x προς y και έχω CW

- Α.2) Η συνιστώσα E_y προηγείται

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = -\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Άρα στρέφω y προς x και έχω CCW



Ανακεφαλαίωση

113

□ Φορά Περιστροφής για Κυκλική Πόλωση

□ Β) Κατεύθυνση $-\hat{z}$

- Β.1) Η συνιστώσα E_x προηγείται

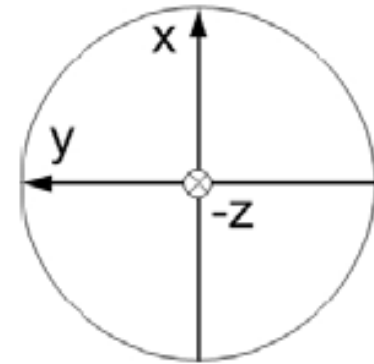
$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Άρα στρέφω x προς y και έχω CCW

- Β.2) Η συνιστώσα E_y προηγείται

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = -\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Άρα στρέφω y προς x και έχω CW



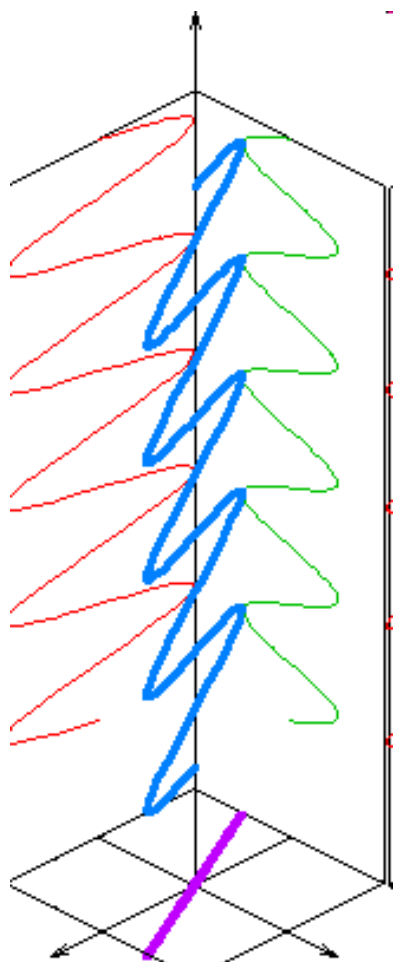
Ανακεφαλαίωση

114

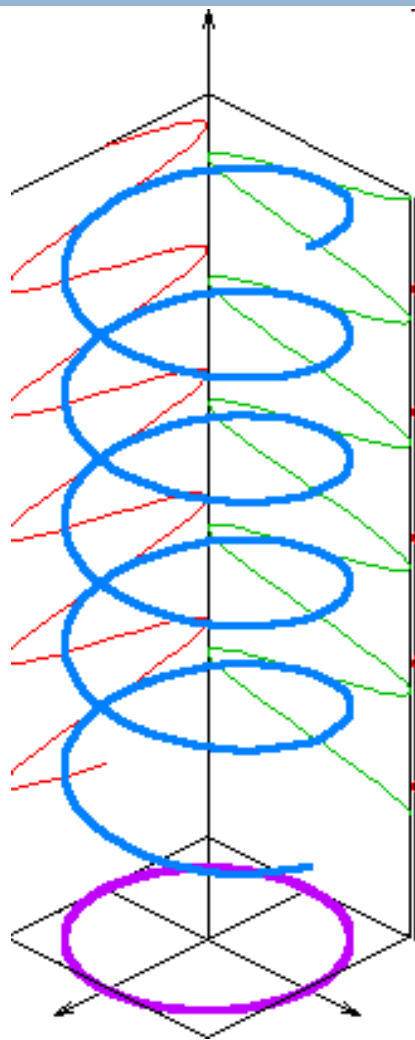
- **Φορά Περιστροφής για Ελλειπτική Πόλωση**
- Ισχύουν τα ίδια με την κυκλική όταν τα πλάτη είναι διαφορετικά αλλά η διαφορά φάσης είναι περσιπτό πολλαπλάσιο του $\pi/2$.
- Όταν $\Delta\phi \neq \pm n \frac{\pi}{2}$
 - A) Κατεύθυνση $+\hat{z}$
 - A.1) $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y > 0$ Η πόλωση είναι CW
 - A.2) $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y < 0$ Η πόλωση είναι CCW
 - B) Κατεύθυνση $-\hat{z}$
 - B.1) $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y > 0$ Η πόλωση είναι CCW
 - B.2) $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y < 0$ Η πόλωση είναι CW

Ανακεφαλαίωση

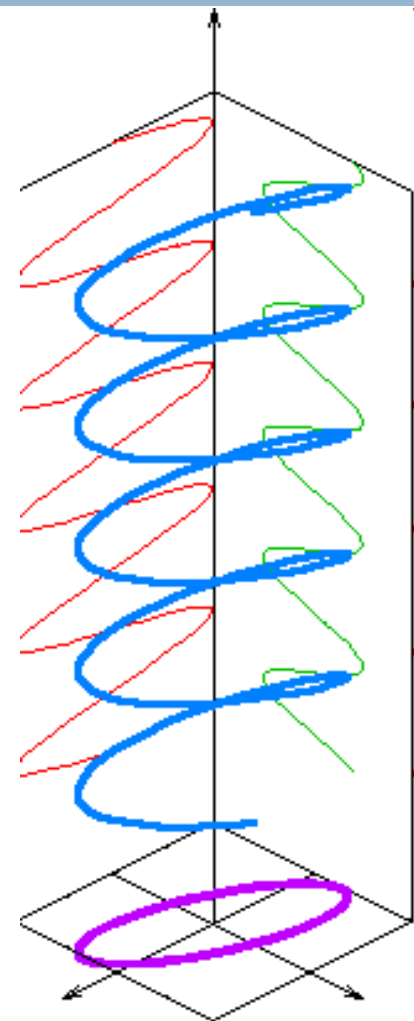
115



Γραμμική Πόλωση
Ασύρματες Επικοινωνίες



Κυκλική Πόλωση

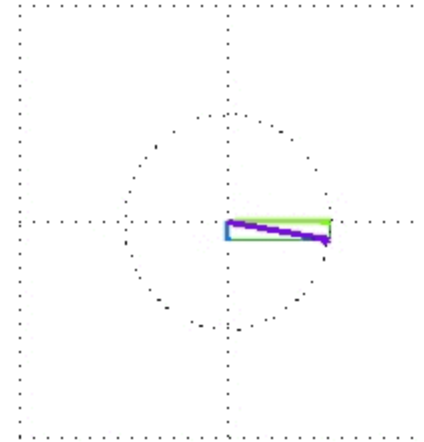
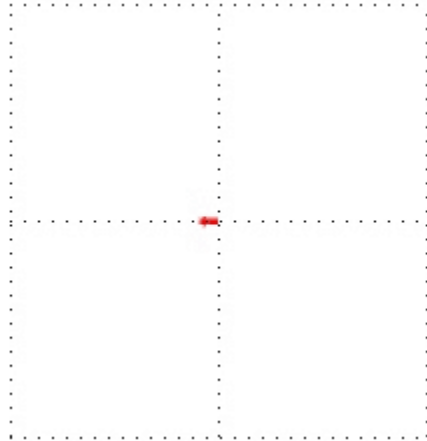


Ελλειπτική Πόλωση

Ανακεφαλαίωση

116

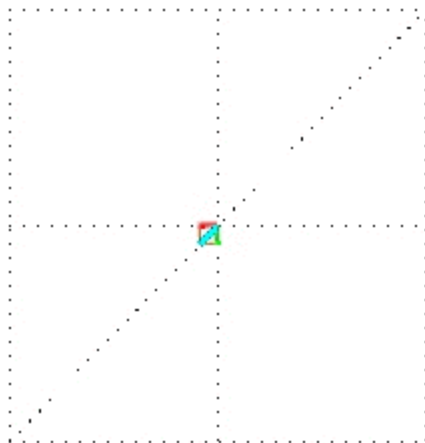
$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{a}_x E_m \cos(\omega t - \beta z)$$



Κυκλική Πόλωση

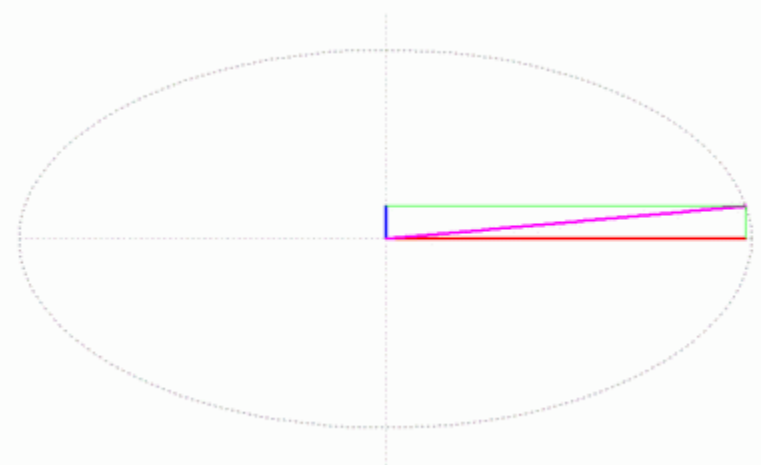
$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{a}_x E_0 \cos(\omega t - \beta z) + \mathbf{a}_y E_0 \cos\left[\omega t - \beta z \pm (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{a}_x E_{xm} \cos(\omega t - \beta z) + \mathbf{a}_y E_{ym} \cos(\omega t - \beta z \pm n\pi)$$



$$\alpha = \pm \arctan \frac{E_{ym}}{E_{xm}}$$

Γραμμική Πόλωση



Ελλειπτική Πόλωση