ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Μαθηματικός Λογισμός

Σημειώσεις – Παράγωγος

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Παράγωγος

Αντίθετα από την ολοκλήρωση που αναπτύχθηκε σημαντικά από τους αρχαίους Έλληνες, η διαφόριση δεν αναπτύχθηκε σε ουσιαστικό βαθμό από τους αρχαίους. Ο διαφορικός λογισμός ξεκινάει από τον δυναμικό - κινητικό ορισμό της εφαπτόμενης ευθείας μιας καμπύλης και χρησιμοποιεί την έννοια του ορίου (οι τέμνουσες τείνουν στην εφαπτόμενη)

<u>Ορισμός</u> Αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, η f λέγεται παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη στο $x_0\in(a,b)$ αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, το οποίο συμβολίζεται $f'(x_0)$ [συμβολισμός Newton] ή $\frac{df}{dx}(x_0)$ [συμβολισμός Leibniz] και λέγεται παράγωγος της f στο x_0.

Έτσι, η παράγωγος είναι το όριο του μέσου ρυθμού μεταβολής, δηλαδή ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής.

Η παράγωγος $f'(x_0)$ είναι η κλίση της εφαπτόμενης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ και η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο αυτό είναι $y(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Η f λέγεται παραγωγίσιμη στο (a,b) αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in(a,b)$.

<u>Ορισμός</u> Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, η f λέγεται παραγωγίσιμη από δεξιά (αντ. αριστερά) στο $x_0\in[a,b]$ αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $\left(\text{αντ. }\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ το οποίο συμβολίζεται $f'_+(x_0)$ (αντ. $f'_-(x_0)$) ή $\frac{df}{dx}(x_0^+)$ (αντ. $\frac{df}{dx}(x_0^-)$) και λέγεται δεξιά παράγωγος (αντ. αριστερή) της f στο x_0.

Η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέγεται παραγωγίσιμη αν είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_+(a)$, $f'_-(b)$.

Πρόταση

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0\in(a,b)$ αν και μόνο αν $\exists\, f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ και $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

Απόδειξη

Προφανής από τον ορισμό του ορίου και των πλευρικών ορίων εφαρμοζόμενως για τη συνάρτηση του μέσου ρυθμού μεταβολής.

Πρόταση

f παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow f$ συνεχής στο x_0.

Απόδειξη

Αφού f παραγωγίσιμη στο x_0, άρα $\exists f'(x_0)$. Είναι

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}h$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h = f(x_0)+f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)$$

$\Rightarrow f$ συνεχής στο x_0.

Το αντίστροφο δεν ισχύει, αφού η $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο 0, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0. Πράγματι,

$\lim_{h\to 0} f(0+h)=\lim_{h\to 0}|0+h|=\lim_{h\to 0}|h|=0=|0|=f(0)$, άρα f συνεχής στο 0

και $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ δεν υπάρχει. Αλλιώς, η δεξιά παράγωγος της f στο 0 είναι $f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$,

ενώ η αριστερή παράγωγος $f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$,

άρα $f'_+(0)\neq f'_-(0)\Rightarrow \nexists f'(0)$.

Ακόμα υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις πουθενά παραγωγίσιμες (Weierstrass) δηλαδή εμφανίζουν έντονο ζιγκ-ζαγκ.

Παραδείγματα

1) Η σταθερή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0$$

2) Η ταυτοτική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$

3) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}^*$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=nx^{n-1}$.

Πράγματι, από το διωνυμικό ανάπτυγμα $(x+h)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k h^{n-k}$ είναι

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k h^{n-k}-x^n\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k h^{n-k}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k h^{n-k-1}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\binom{n}{0}h^{n-1}+\binom{n}{1}xh^{n-2}+\dots+\binom{n}{n-2}x^{n-2}h+\binom{n}{n-1}x^{n-1}\right\}$$

$$=\binom{n}{n-1}x^{n-1}=nx^{n-1}.$$

Αλλιώς: $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

Για $a=x+h$, $b=x$ είναι $a-b=h$ και

$(x+h)^n-x^n=h\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\dots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right]$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\dots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right]$$

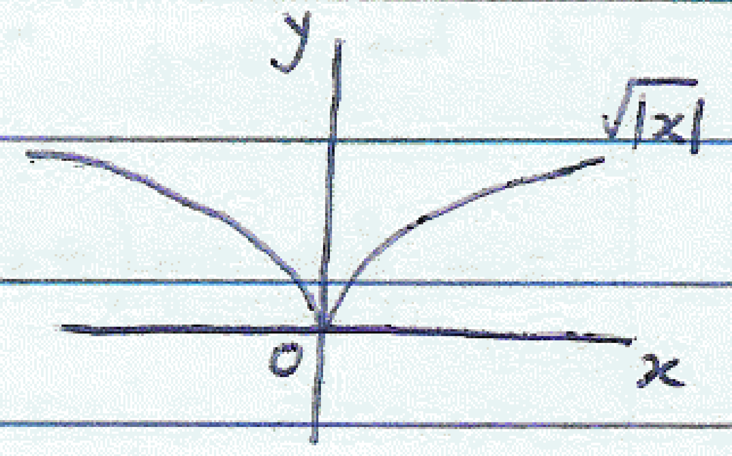
$$=x^{n-1}+x^{n-2}x+\dots+x\,x^{n-2}+x^{n-1}=nx^{n-1}.$$

4) Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{|x|}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, όχι όμως στο 0.

Αν $x>0$ και $h\neq 0$ με $x+h>0$ τότε

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

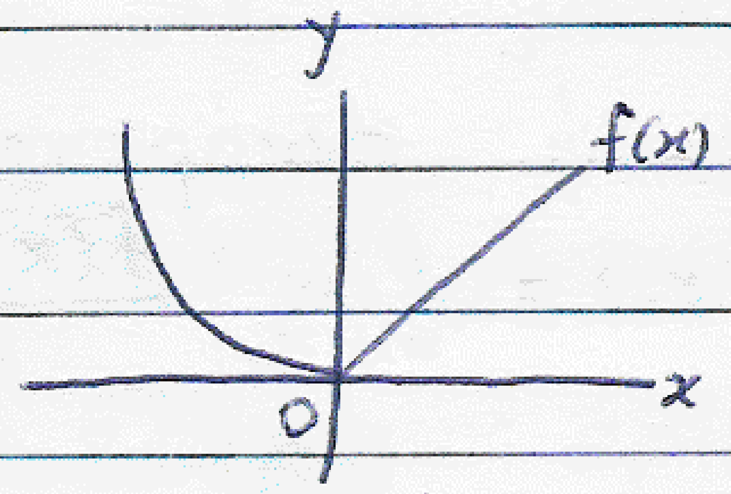


Αν $x<0$ και $h\neq 0$ με $x+h<0$ τότε

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{-x-h}-\sqrt{-x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{-x-h}+\sqrt{-x}}=-\frac{1}{2\sqrt{-x}}$$

Είναι $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$, άρα $\nexists\, f'(0)$.

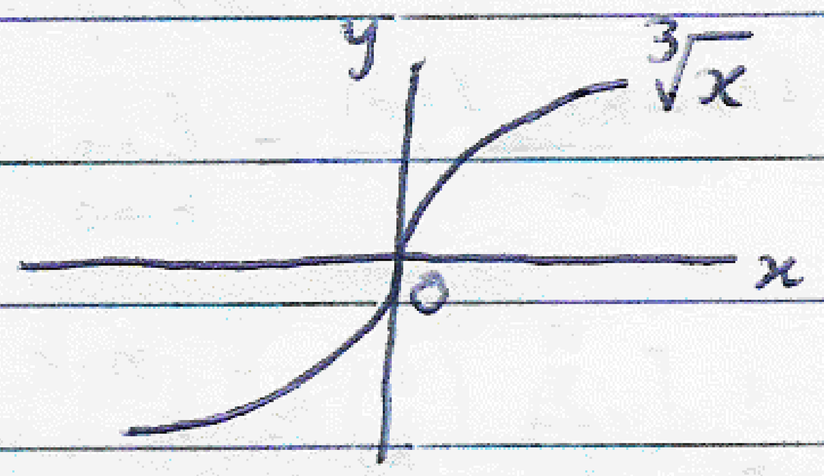
5) Η $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ έχει



$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \frac{h^2}{h} = h, & h \le 0 \\ \frac{h}{h} = 1, & h > 0 \end{cases}$$

άρα $f'_-(0) = \lim\limits_{h \to 0^-} h = 0$, $\quad f'_+(0) = \lim\limits_{h \to 0^+} 1 = 1$, άρα $\nexists\, f'(0)$

6) $f(x) = \sqrt[3]{x}$



$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}}$$

$f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$, άρα η εφαπτόμενη στο 0 είναι παράλληλη στον άξονα y.

7) $f(x) = \sin x$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \right) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$$

Αλλιώς: $\dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \dfrac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$

$$= \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \cdot \sin h}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

8) $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \cdot \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} =$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$= -\lim_{h \to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x$$

Αλλιώς: $\dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \dfrac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \dfrac{\cos x (\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} =$

$$= \cos x \frac{\cosh - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cosh - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$$

<u>Θεώρημα</u>

Αν $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a,b)$ τότε $f+g$, fg, λf παραγωγίσιμες στο x_0 ($\lambda \in \mathbb{R}$) και

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

Επιπλέον, αν $g(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$ τότε $\frac{1}{f}$, $\frac{f}{g}$ παραγωγίσιμες στο x_0 και

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

<u>Απόδειξη</u>

Είναι $\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$

Άρα $\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\Rightarrow (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Επίσης $\frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)\right]$

$$= f(x_0+h)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0)\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x_0+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

αφού η f διαφορίσιμη στο x_0, άρα και συνεχής στο x_0.

$$\Rightarrow (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Για $f=\lambda \Rightarrow (\lambda g)'(x) = \lambda g'(x_0)$, αφού $\lambda'=0$

Εξάλλου
$$\frac{\frac{1}{f}(x_0+h)-\frac{1}{f}(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{f(x_0+h)}-\frac{1}{f(x_0)}}{h} = -\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,\frac{1}{f(x_0)f(x_0+h)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f}(x_0+h)-\frac{1}{f}(x_0)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,\frac{1}{f(x_0)\cdot\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)} = -f'(x_0)\frac{1}{f(x_0)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, άρα είναι και συνεχής στο x_0.

Τέλος,
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\cdot\frac{1}{g}(x_0) + f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Παραδείγματα

1) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}^*$ τότε
$(x^n)' = (x\cdots x)' = 1\cdot x\cdots x + \cdots + x\cdot x\cdots 1 = n x^{n-1}$ που το ξέρουμε

2) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{-n}$, $n\in\mathbb{N}^*$

Θεωρούμε την $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}=x^n$. Τότε
$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$$

Τελικά $(x^n)' = n x^{n-1}$, $n\in\mathbb{Z}^*$

3) $f:\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\tan x$

$$f'(x) = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

4) $f:(k\pi, (k+1)\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cot x$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

5) $(\sec x)' = \sec x\cdot\tan x$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$; $(\csc x)' = -\csc x\cdot\cot x$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

Όλες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες, άρα και συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους, π.χ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Για $x\neq 0$, $f'(x) = \left(x\sin\frac{1}{x}\right)' = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

Για $x=0$, $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$ που δεν υπάρχει

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Για $x\neq 0$, $f'(x) = \left(x^2\sin\frac{1}{x^2}\right)' = 2\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$

Για $x=0$, $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h\sin\frac{1}{h^2}\right) \overset{k=h^2}{=} \lim_{k\to 0}\left(\sqrt{k}\sin\frac{1}{k}\right) = 0$

Παράδειγμα

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Είναι $f^2(x) = 1$, $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow (f^2)'(x) = 0$.
Ωστόσο δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο του γινομένου, αφού η f δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.
Αν ίσχυε $(f^2)'(x) = 2f(x)f'(x)$ τότε $0 = 2f(x)f'(x)$, άρα $f'(x) = 0$ που είναι άτοπο.

Παράδειγμα

Η εξίσωση κύκλου $x^2+y^2=1$ για το πάνω ημικύκλιο $y=\sqrt{1-x^2}$ έχει $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{y}$, άρα η κλίση του γραφήματος στο σημείο (x_0,y_0) είναι $-\frac{x_0}{y_0}$ και η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο (x_0,y_0) είναι

$$y(x) = y_0 + y'(x_0)(x-x_0) = y_0 - \frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

Θεώρημα (κανόνας αλυσίδας)

Αν $g:(a,b)\to(c,d)$ παραγωγίσιμη στο $x_0\in(a,b)$ και $f:(c,d)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η $f\circ g:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο x_0 και

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\,g'(x_0)$$

Σαν συναρτήσεις $(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g'$ στα σημεία ορισμού που ορίζονται και τα δύο μέλη.

Αν $u=g(x)$, $y=f(u)$ τότε σε συμβολισμό Leibniz

$$\frac{dy}{dx}=\left.\frac{dy}{du}\right|_{u=g(x)}\cdot\frac{du}{dx}$$

ή ακόμα $\dfrac{d}{dx}f(u)=f'(u)\cdot\dfrac{du}{dx}$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(h)=\begin{cases}\dfrac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}, & g(x_0+h)-g(x_0)\neq 0\\ f'(g(x_0)), & g(x_0+h)-g(x_0)=0\end{cases}$

Αφού f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, άρα

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{k}=f'(g(x_0))$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta'>0:\ \forall\, 0<|k|<\delta',\ \left|\frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{k}-f'(g(x_0))\right|<\varepsilon.$$

Αλλά g παραγωγίσιμη στο x_0, άρα και συνεχής στο x_0, άρα
$\exists\,\delta>0:\ \forall\,|h|<\delta,\ |g(x_0+h)-g(x_0)|<\delta'$

Αν $k=g(x_0+h)-g(x_0)\neq 0$ τότε $\forall\,|h|<\delta$ είναι $0<|k|<\delta'$,

$$\phi(h)=\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}=\frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{k}$$

$\Rightarrow \forall\,|h|<\delta,\ g(x_0+h)-g(x_0)\neq 0$ είναι $|\phi(h)-f'(g(x_0))|<\varepsilon$.

Αν $g(x_0+h)-g(x_0)=0$ τότε $\phi(h)=f'(g(x_0))$, άρα $|\phi(h)-f'(g(x_0))|<\varepsilon$

Επομένως, $\lim_{h\to 0}\phi(h)=f'(g(x_0))$, δηλ. ϕ συνεχής στο 0.

Αν $h\neq 0$ τότε $\dfrac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}=\phi(h)\,\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$ που ισχύει και για $g(x_0+h)-g(x_0)\neq 0$ και για $g(x_0+h)-g(x_0)=0$ (αφού $0=0$).

Άρα $(f\circ g)'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \phi(h) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$

$$= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Σχόλιο: Είναι $(f\circ g)'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(f\circ g)(x_0+h) - (f\circ g)(x_0)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} \, \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0) + [g(x_0+h) - g(x_0)]) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

και αν $k = g(x_0+h) - g(x_0)$ τότε

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0)+k) - f(g(x_0))}{k} \cdot g'(x_0)$$

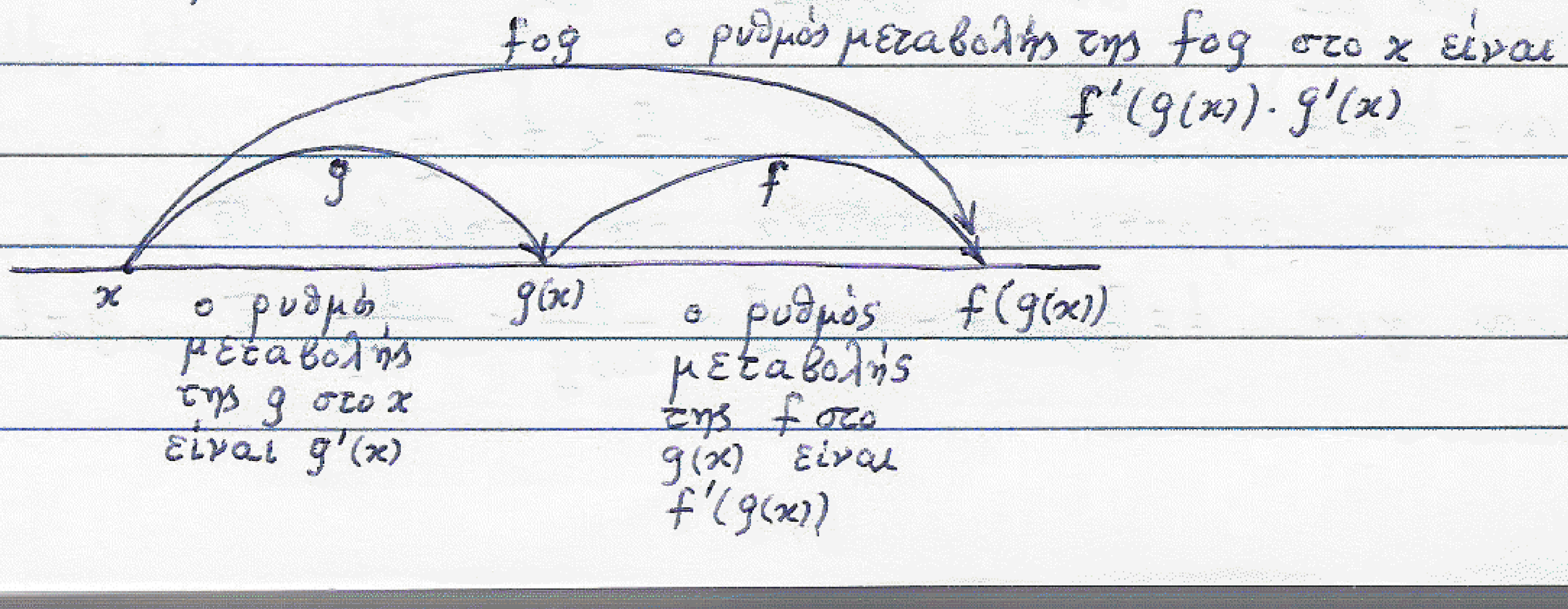
Αλλά η συνέχεια της g στο x_0 σημαίνει ότι για $h\to 0$ είναι $k\to 0$, άρα

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(g(x_0)+k) - f(g(x_0))}{k} \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Το μόνο σοβαρό πρόβλημα στην παραπάνω απόδειξη είναι ότι μπορεί $g(x_0+h) - g(x_0) = 0$, $h \neq 0$ (π.χ. $g =$ σταθερά ή $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ όπου $g(0+h) - g(0) = 0$ για αυθαίρετα μικρό h)
Επομένως, γι' αυτό το λόγο κάναμε τη σωστή απόδειξη παραπάνω.

Το ίδιο: $u = g(x)$, $y = f(u) = f(g(x)) \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} f'(u)g'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$ (με $\Delta u \to 0$)

Αφού η παράγωγος είναι ένας ρυθμός μεταβολής, άρα οι ρυθμοί μεταβολής των δύο συναρτήσεων πολλαπλασιάζονται, δηλαδή η παράγωγος της σύνθεσης είναι το γινόμενο των παραγώγων (στα κατάλληλα σημεία)



Παράδειγμα

1) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x^3 + 5}$

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x^3+5)^{-\frac{3}{4}}(x^3+5)' = \frac{3}{4}x^2(x^3+5)^{-3/4}$$

2) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{9/7}$

$$f'(x) = \frac{9}{7}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2/7}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = -\frac{18}{7}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{7}}\left(\frac{1}{x-1}\right)^2$$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^3 + 7x)$

Αν $g(x) = \sin x$, $h(x) = x^3 + 7x$ τότε $f = g \circ h$.

Αλλά $g'(x) = \cos x$, $h'(x) = 3x^2 + 7$, άρα

$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \cos(x^3 + 7x) \cdot (3x^2 + 7)$

Παράδειγμα

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Είναι $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = 1 \Rightarrow (f \circ f)'(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Ωστόσο δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο της αλυσίδας, αφού η f δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

Αν ίσχυε $(f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$ τότε $0 = f'(f(x)) \cdot f'(x)$ άτοπο

Αν για μια <u>παραμετροποιημένη καμπύλη</u> $(x(t), y(t))$ υπάρχουν οι παράγωγοι $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ και αν για την αλγεβρική μορφή της καμπύλης υπάρχει η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ τότε

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

π.χ. $x(t) = \sec t$, $y(t) = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

Ποια η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(\sqrt{2}, 1)$;

Είναι για $t = \frac{\pi}{4}$, $x = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $y = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

Είναι $\frac{dx}{dt} = \sec t \cdot \tan t \neq 0$ στο σημείο αυτό

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \cdot \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} = \csc t$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \csc\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

άρα η εφαπτόμενη ευθεία είναι

$$y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x - 1$$

<u>Παράδειγμα</u>

Τήξη πάγου-κύβου όπου σε $t_1 = 1h$ έχει λιώσει το $\frac{1}{4}$ του όγκου του. Να βρεθεί ο ολικός χρόνος τήξης του πάγου.

Αν ο κύβος έχει ακμή s τότε ο όγκος του είναι $V = s^3 \Rightarrow$

$$\frac{dV}{dt} = 3s^2\frac{ds}{dt}.$$

Αλλά ο πάγος λιώνει μέσω της εξωτερικής του επιφάνειας A, δηλ.

$$\frac{dV}{dt} = -kA = -k(6s^2) = -6ks^2$$

Άρα $3s^2\frac{ds}{dt} = -6ks^2 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = -2k \Rightarrow s = c - 2kt$

Για $t = 0 \Rightarrow s = c = s_0 \Rightarrow s = s_0 - 2kt$

Για $t = t_1 \Rightarrow s_1 = s_0 - 2kt_1 \Rightarrow 2kt_1 = s_0 - s_1 \Rightarrow k = \frac{s_0 - s_1}{2t_1}$

Όταν ο πάγος λιώσει πλήρως $s = 0 \Rightarrow s_0 - 2kT = 0 \Rightarrow T = \frac{s_0}{2k} \Rightarrow$

$$T = \frac{s_0 t_1}{s_0 - s_1} = \frac{t_1}{1 - \frac{s_1}{s_0}}$$

Αλλά $\frac{V_1}{V_0} = \frac{s_1^3}{s_0^3} = \left(\frac{s_1}{s_0}\right)^3 \Rightarrow \frac{s_1}{s_0} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{1/3}$, οπότε τελικά $T = \frac{t_1}{1 - \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{1/3}}$

Για $t_1 = 1h$ είναι $\frac{V_1}{V_0} = \frac{3}{4}$, άρα $T = \frac{1h}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}} = \frac{1h}{1 - 0.91} = 11h$

Παραγώγιση πεπλεγμένης συνάρτησης

Αν έχουμε μια εξίσωση της μορφής $F(x,y)=0$ που δεν μπορούμε ή δεν θέλουμε να λύσουμε ως προς y, μπορούμε ωστόσο να υπολογίσουμε το $\frac{dy}{dx}$ παραγωγίζοντας κανονικά ως προς x την $F(x,y)=0$ και λύνοντας ως προς $\frac{dy}{dx}$.

π.χ. $y^2=x$,

$$\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(x) \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ή } \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

και πράγματι, αφού $y=\sqrt{x}$ ή $y=-\sqrt{x}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ή $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

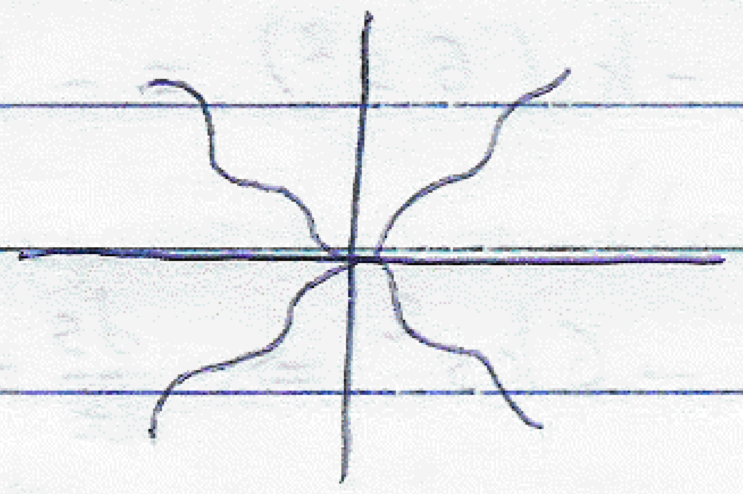
Παράδειγμα

$$y^2=x^2+\sin(xy)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}\sin(xy) \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=2x+\cos(xy)\cdot\frac{d}{dx}(xy)$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=2x+\cos(xy)\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow [2y-x\cos(xy)]\frac{dy}{dx}=2x+y\cos(xy)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x+y\cos(xy)}{2x-x\cos(xy)}$$



Παράδειγμα

$x^3+y^3-9xy=0$. Να βρεθεί η εφαπτόμενη και η κάθετη στο $(2,4)$

$$\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(y^3)-\frac{d}{dx}(9xy)=0 \Rightarrow 3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9y-9x\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow$$

$$(3y^2-9x)\frac{dy}{dx}=9y-3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3y-x^2}{y^2-3x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)}=\frac{3(4)-2^2}{4^2-3(2)}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

Η εφαπτόμενη $y-4=\frac{4}{5}(x-2) \Leftrightarrow y=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}$

Η κάθετη στην εφαπτόμενη έχει κλίση $-\frac{5}{4}$, άρα η κάθετη είναι $y-4=-\frac{5}{4}(x-2) \Leftrightarrow y=-\frac{5}{4}x+\frac{13}{2}$

Παράδειγμα

Μέσω παραγώγισης πεπλεγμένης συνάρτησης μπορεί να δειχθεί ότι

$$(x^p)' = p\,x^{p-1}, \quad p \in \mathbb{Q}^*$$

Πράγματι, αν $y = x^{m/n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow y^n = x^m \Rightarrow \frac{d}{dx}(y^n) = \frac{d}{dx}(x^m) \Rightarrow$

$$\Rightarrow n y^{n-1}\frac{dy}{dx} = m x^{m-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{m x^{m-1}}{n y^{n-1}} = \frac{m}{n}\,\frac{x^{m-1}}{(x^{\frac{m}{n}})^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}$$

Θεώρημα (παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης)

Αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής, 1-1 στο (a,b) και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ τότε

(i) αν $f'(x_0) \neq 0$ τότε f^{-1} παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

δηλ. αν $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$ τότε f^{-1} παραγωγίσιμη στο y_0

(ii) αν $f'(x_0) = 0$ τότε f^{-1} όχι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$,

δηλ. αν $f'(f^{-1}(y_0)) = 0$ τότε f^{-1} όχι παραγωγίσιμη στο y_0.

Ακόμα για το $(f^{-1})'$ χρησιμοποιούμε και την έκφραση $\frac{dx}{dy}$, οπότε με βάση το θεώρημα είναι $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, το μεν αριστερό μέλος στο σημείο y_0, το δε δεξιό στο σημείο x_0.

Απόδειξη

(i) Αφού f συνεχής στο (a,b), άρα η εικόνα $f(a,b)$ είναι ανοικτό διάστημα, έστω $f(a,b) = (c,d)$.

Αφού f συνεχής, 1-1 στο (a,b), άρα f γνήσια μονότονη, άρα $\forall h \neq 0$ με $y_0 + h \in (c,d)$, $\exists!\, k = k(h)$ με $y_0 + h = f(x_0 + k)$

$\Rightarrow f^{-1}(y_0+h) = x_0 + k \Rightarrow k = f^{-1}(y_0+h) - x_0$.

Αλλά f συνεχής, 1-1, άρα f^{-1} συνεχής στο y_0, άρα για $h \to 0$ είναι $k \to f^{-1}(y_0) - x_0 = 0$.

Άρα $\displaystyle \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \frac{(x_0+k)-x_0}{f(x_0+k)-y_0} = \frac{1}{\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}}$

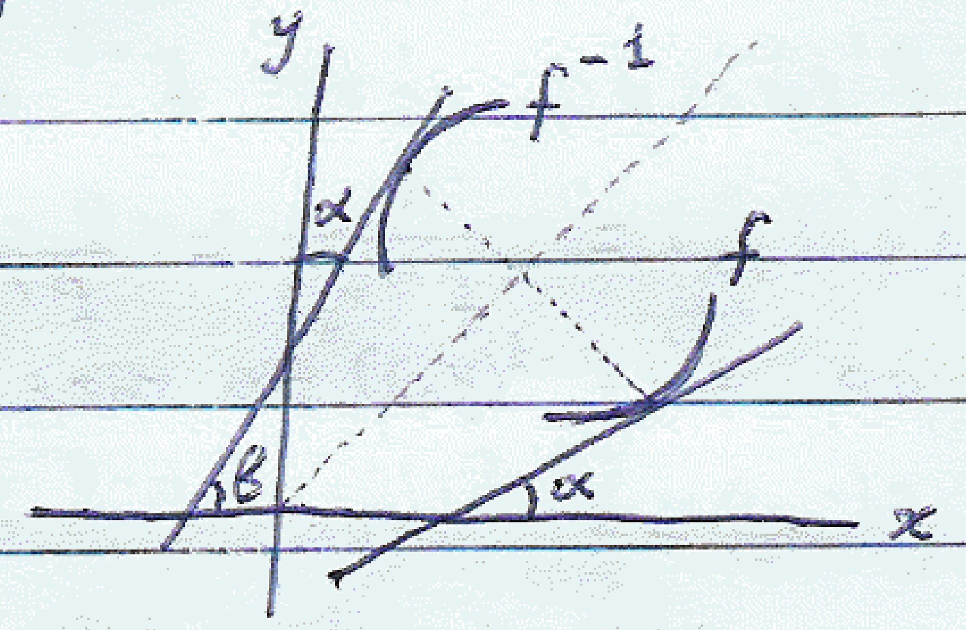
$$\Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}} = \lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

(ii) Αν $f'(x_0)=0$ και υποθέσουμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_0=f(x_0)$ τότε

$$1=(f^{-1}\circ f)'(x_0) = (f^{-1})'(f(x_0))\cdot f'(x_0)=0$$ άτοπο, άρα f^{-1} όχι παραγωγίσιμη στο y_0.

<u>Σχόλιο</u> Είναι $(f\circ f^{-1})(x)=x \Rightarrow (f\circ f^{-1})'(x_0)=1$. Στο σημείο αυτό δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα αλυσίδας και να γράψουμε $f'(f^{-1}(x_0))\cdot(f^{-1})'(x_0)=1$, διότι δεν ξέρουμε αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη. Αν ήταν έτσι θα προέκυπτε αμέσως ότι $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$.

<u>Σχόλιο</u> Μπορούμε να κάνουμε μία γραφική απόδειξη του παραπάνω νόμου.



Ξέρουμε ότι τα γραφήματα των f, f^{-1} είναι κατοπτρικά ως προς την διαγώνιο. Άρα, η γωνία α που σχηματίζει η εφαπτόμενη στο γράφημα της f με τον άξονα x ισούται με τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη στο γράφημα της f^{-1} με τον άξονα y. Αν β είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη στο γράφημα της f^{-1} με τον άξονα x, τότε $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ για $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ και $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{2}$ για $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$.
Επομένως, αφού $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ θα είναι

$$1-\tan\alpha\tan\beta=0 \Rightarrow \tan\beta=\frac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow (f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

<u>Παράδειγμα</u>
Μπορούμε να δείξουμε ξανά μέσω της αντίστροφης συνάρτησης ότι η παράγωγος της $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{1/n}$, $n\in\mathbb{N}^*$ είναι $f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.
Έστω $f^{-1}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=x^n$ η αντίστροφη της f.
Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη με $(f^{-1})'(x)=nx^{n-1}$
Άρα $$f'(x)=\frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}=\frac{1}{(f^{-1})'(x^{1/n})}=\frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

Αλλιώς: $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^{1/n}-x^{1/n}}{(x+h)-h}=\frac{1}{\dfrac{[(x+h)^{1/n}]^n-(x^{1/n})^n}{(x+h)^{1/n}-x^{1/n}}}$$

Αλλά $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Άρα για $a = (x+h)^{1/n}$, $b = x^{1/n}$ είναι

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{\frac{a^n - b^n}{a-b}} = \frac{1}{a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{(x+h)^{\frac{n-1}{n}} + (x+h)^{\frac{n-2}{n}} x^{1/n} + \cdots + (x+h)^{1/n} x^{\frac{n-2}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}} + \cdots + x^{\frac{n-1}{n}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Παράδειγμα

$f(x) = x^2 + 2x - 5$, $x \in [-1, \infty)$, $(f^{-1})'(30) = ;$

Είναι $f'(x) = 2x + 2 > 0$, $\forall x \in [-1, \infty)$, άρα f γνήσια αύξουσα, επομένως $\exists f^{-1}$ που είναι γνήσια αύξουσα.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x+2}$$

Είναι $f(5) = 30$, $f^{-1}(30) = 5$

Άρα $(f^{-1})'(30) = \frac{1}{2\cdot 5 + 2} = \frac{1}{12}$

Αλλιώς: $f \circ f^{-1} = (f^{-1})^2 + 2f^{-1} - 5 = I$

$$\Rightarrow (f \circ f^{-1})' = 2(f^{-1})(f^{-1})' + 2(f^{-1})' = 1$$

$$\Rightarrow 2(f^{-1})'(f^{-1} + 1) = 1 \Rightarrow (f^{-1})' = \frac{1}{2(f^{-1}+1)}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(30) = \frac{1}{2(f^{-1}(30)+1)} = \frac{1}{2(5+1)} = \frac{1}{12}$$

Αλλιώς: $y = x^2 + 2x - 5 \Rightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4(-5-y)}}{2} = -1 + \sqrt{6+y}$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{6+y}, \quad y \in [-6, \infty)$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6+y}} \Rightarrow (f^{-1})'(30) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6+30}} = \frac{1}{12}.$$

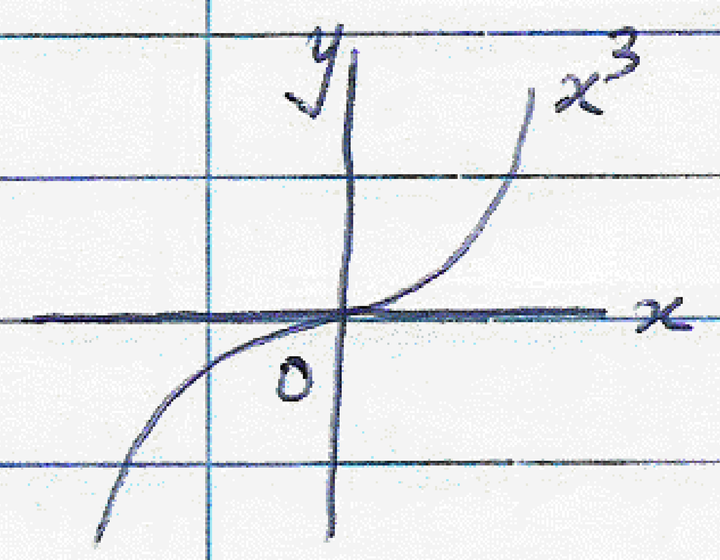
Παράδειγμα

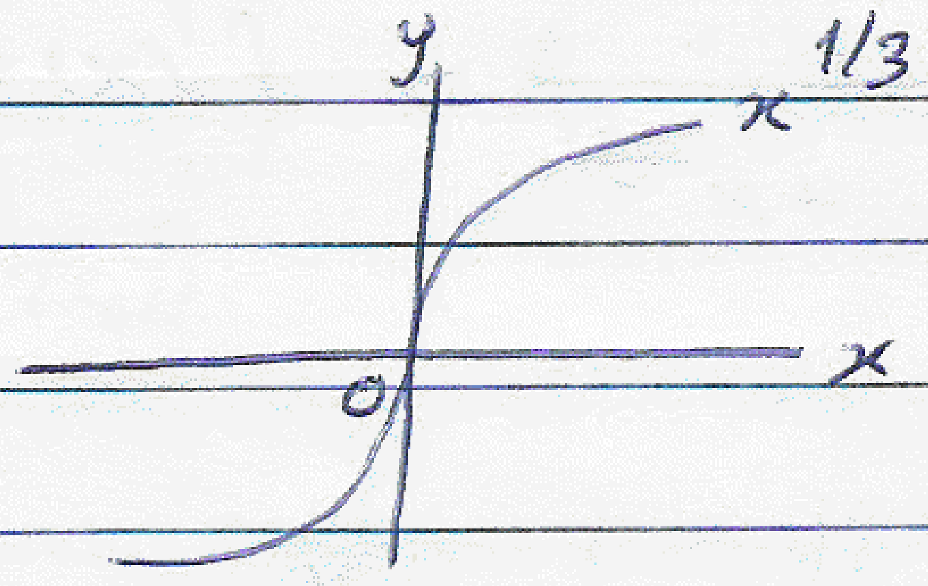
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x)=x^3$$

Η f είναι 1-1 και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0)=0$.
Άρα, η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f, που δίνεται από τον τύπο $f^{-1}(x)=x^{1/3}$ δεν έχει παράγωγο στο 0.
Αυτό φαίνεται και από τη σχέση

$$(f^{-1})'(x)=(x^{1/3})'=\frac{1}{3}x^{1/3-1}=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3x^{2/3}}\ ,\ \text{οπότε}$$

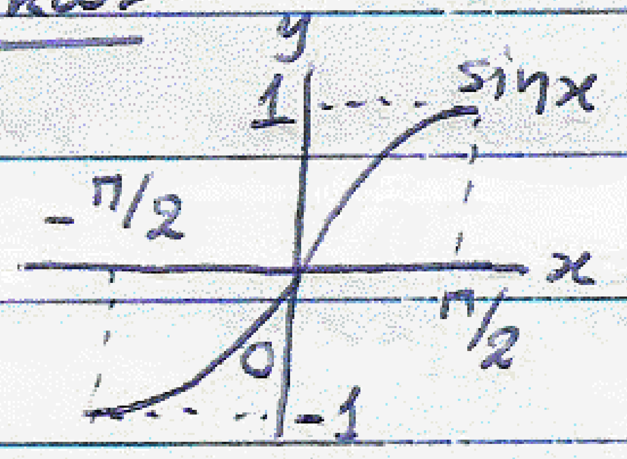
$$(f^{-1})'(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\infty$$



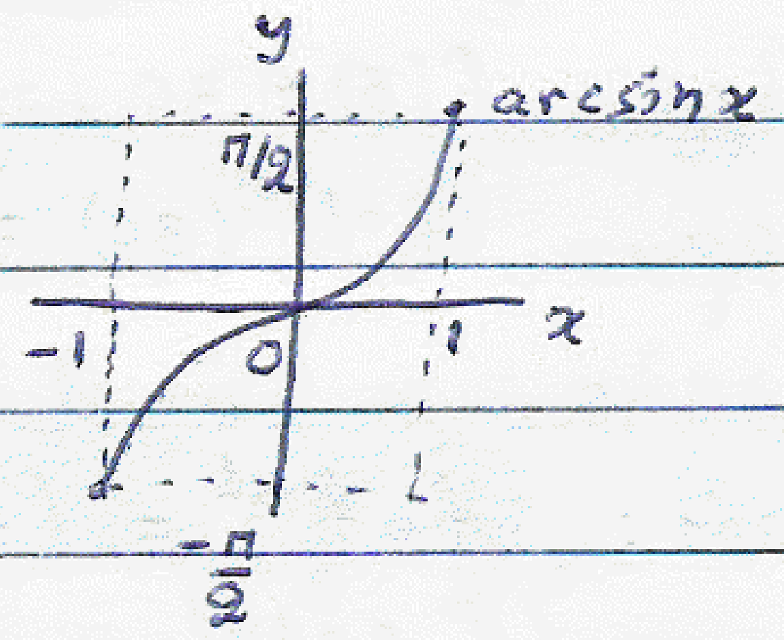


Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών

1) $\sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ 1-1



Η αντίστροφη είναι $\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



$$(\arcsin)'=\frac{1}{D(\sin)\circ\arcsin}=\frac{1}{\cos\circ\arcsin}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)'=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$\left(\text{ακόμα: } \frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\frac{d\sin y}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

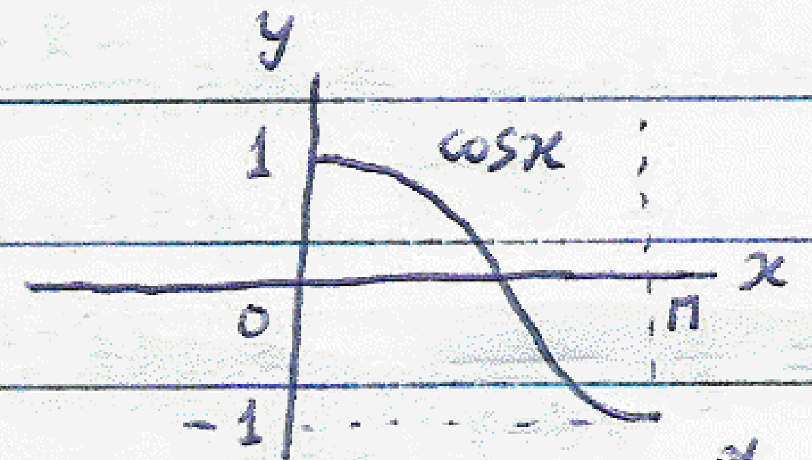
$y=\arcsin x \Rightarrow x=\sin y$

$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \cos(\arcsin x)=\cos y=\sqrt{1-x^2}$

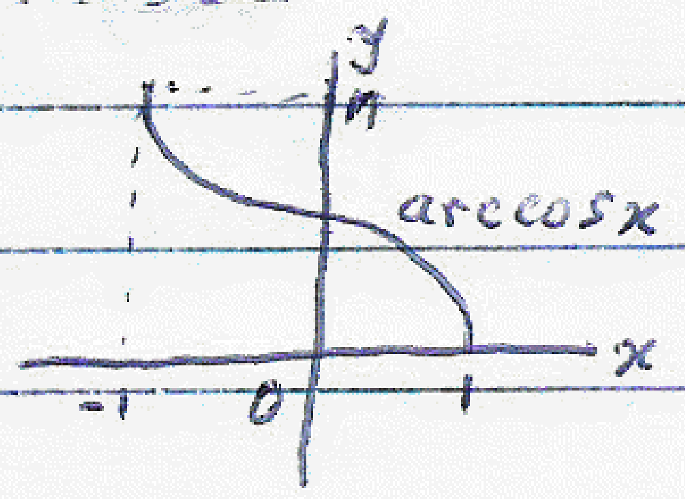
$$\Rightarrow (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ x\in(-1,1)$$

---

2) $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ 1-1



Η αντίστροφη είναι $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$



$$(\arccos)'=\frac{1}{D(\cos)\circ\arccos}=-\frac{1}{\sin\circ\arccos}$$

$$\Rightarrow \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}$$

(ακόμα: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow \frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{d}{dx}\arcsin x$
$\Rightarrow \frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

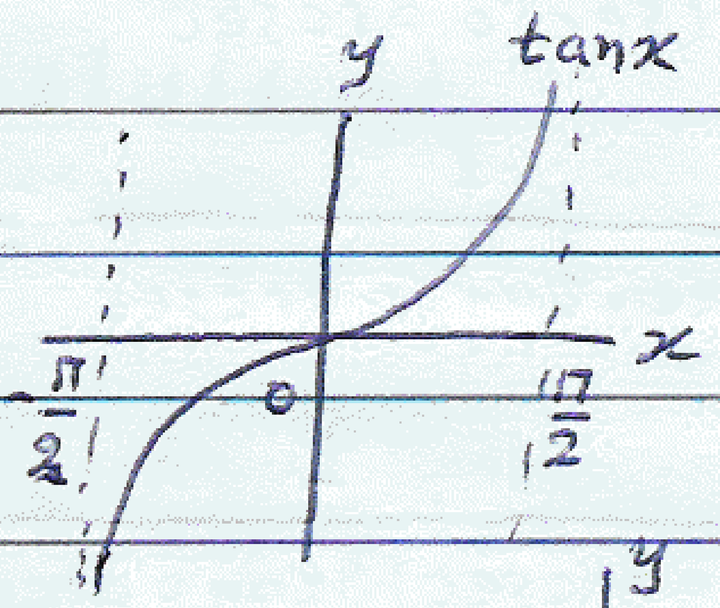
$y = \arccos x \Rightarrow x = \cos y$

$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sin(\arccos x) = \sin y = \sqrt{1-x^2}$

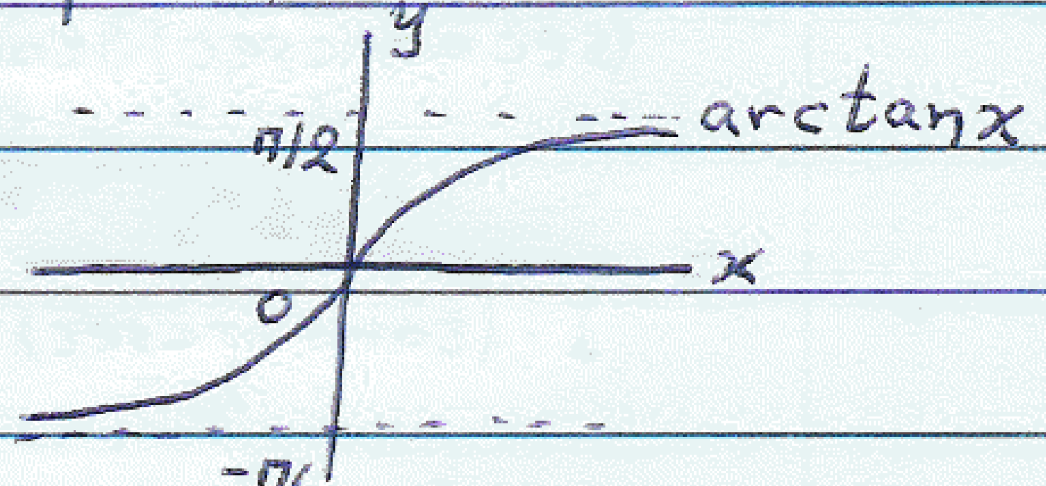
$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$

---

3) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ 1-1



Η αντίστροφη είναι $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$(\arctan)' = \frac{1}{D(\tan)\circ\arctan} = \frac{1}{\sec^2 \circ \arctan}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2}\circ\arctan} = \frac{1}{(1+\tan^2)\circ\arctan}$$

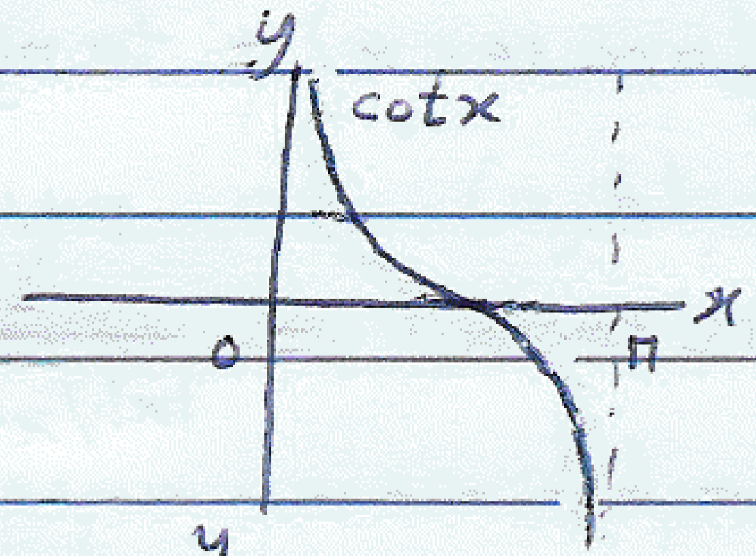
(ακόμα: $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{\frac{d\tan y}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$)

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+[\tan(\arctan x)]^2}$$

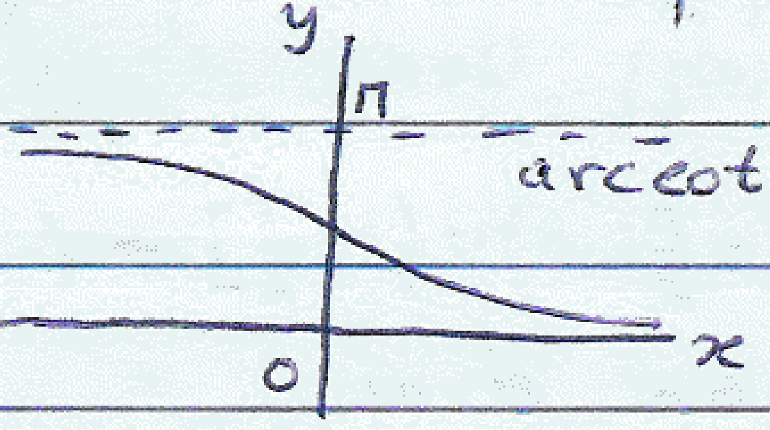
$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty)$

---

4) $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ 1-1



Η αντίστροφη είναι $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$



$$(\operatorname{arccot})' = \frac{1}{D(\cot)\circ\operatorname{arccot}} = -\frac{1}{\csc^2 \circ \operatorname{arccot}}$$

$$= -\sin^2 \circ \operatorname{arccot}$$

$$\Rightarrow (\operatorname{arccot} x)' = -[\sin(\operatorname{arccot} x)]^2$$

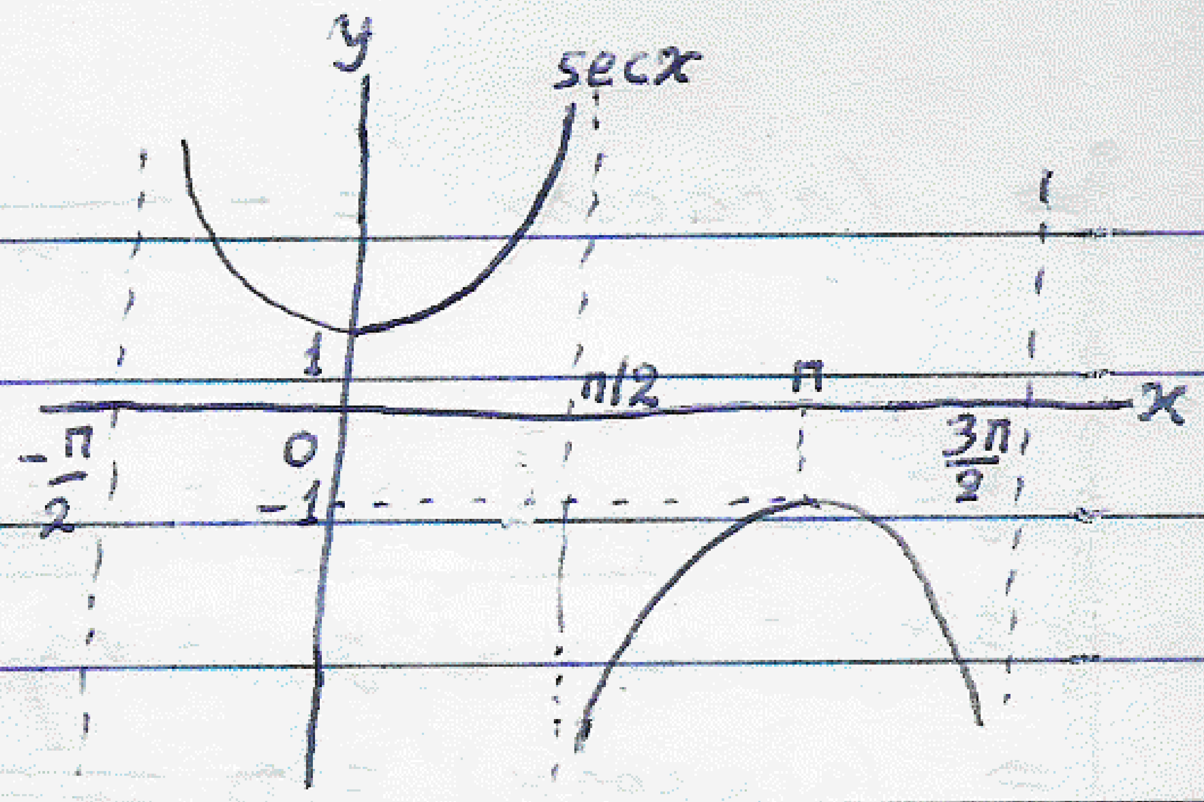
$y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow x = \cot y$

$\sin y = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \sin(\operatorname{arccot} x) = \sin y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

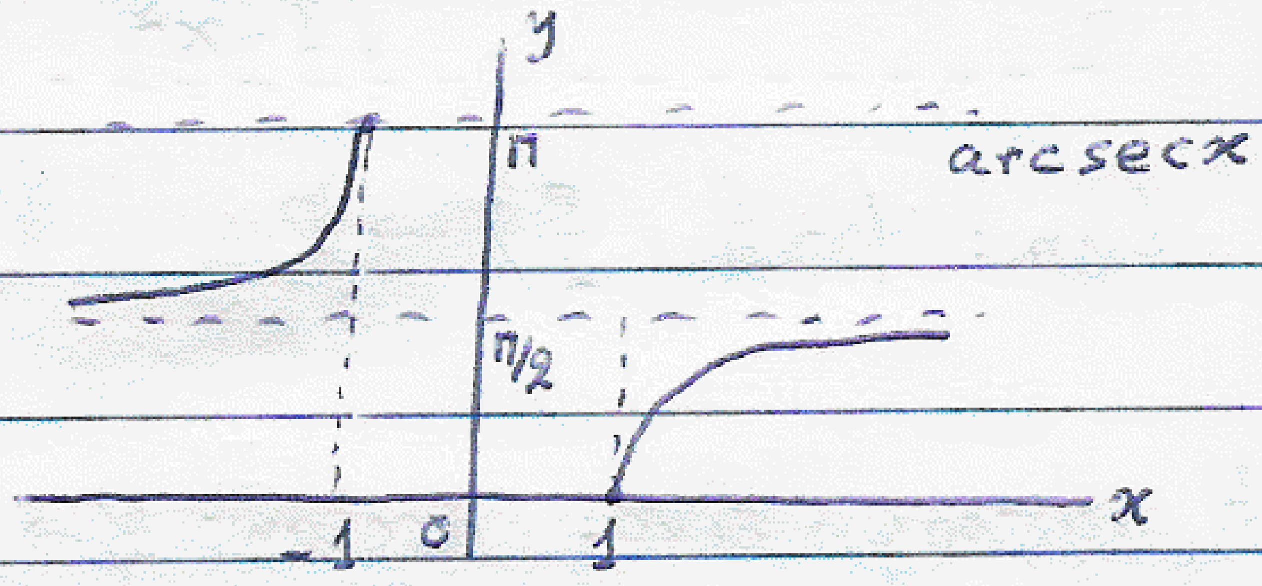
$\Rightarrow (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty)$

---

5) $\sec : [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Η αντίστροφη είναι $\text{arcsec}: (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \to [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$



$$(\text{arcsec})' = \frac{1}{D(\sec)\circ \text{arcsec}} = \frac{1}{(\sec \cdot \tan)\circ \text{arcsec}} = \frac{1}{(\sec\circ\text{arcsec})\cdot(\tan\circ\text{arcsec})} = \frac{1}{I\cdot(\tan\circ\text{arcsec})}$$

(ακόμα: $\frac{d}{dx}\text{arcsec}\,x = \frac{1}{\frac{d\sec y}{dy}} = \frac{1}{\sec y\cdot\tan y} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$)

$$\Rightarrow (\text{arcsec}\,x)' = \frac{1}{x\tan(\text{arcsec}\,x)}$$

$y = \text{arcsec}\,x \Rightarrow x = \sec y$

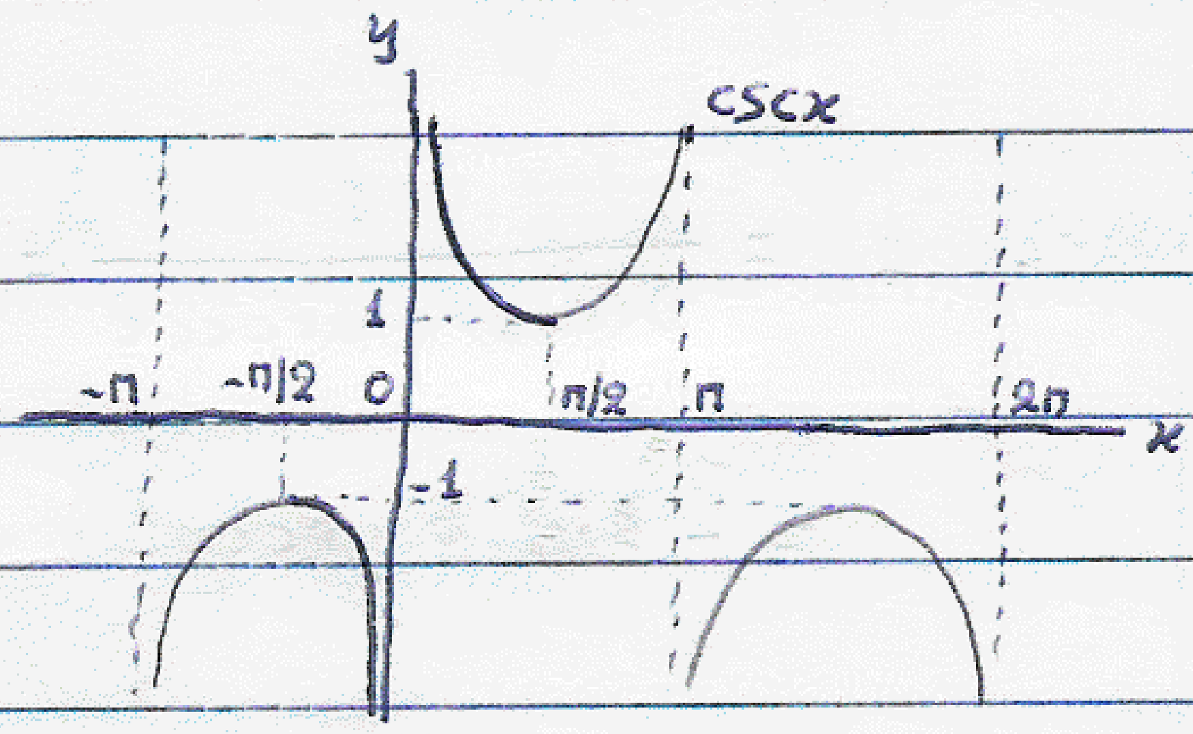
$$\tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 y}}{\cos y} = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} - 1} = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \tan(\text{arcsec}\,x) = \tan y = \pm\sqrt{x^2-1}$$

$$\Rightarrow (\text{arcsec}\,x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$$

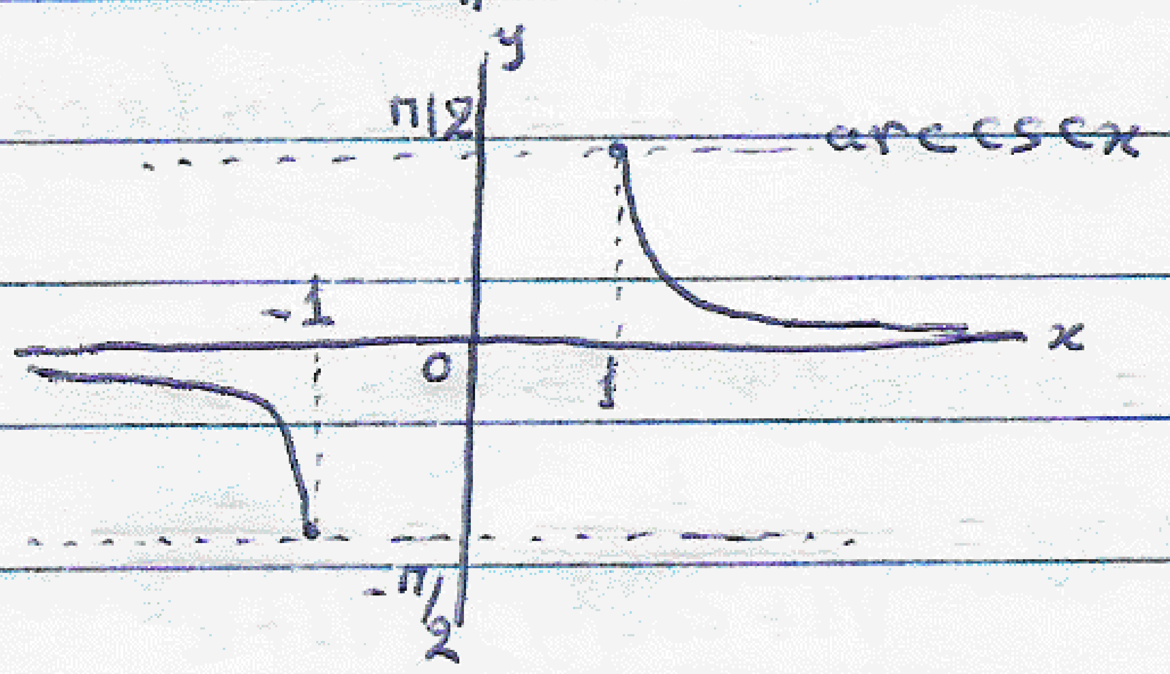
---

6) $\csc : [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Η αντίστροφη είναι

$\text{arccsc}: (-\infty,-1]\cup[1,\infty) \to [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$



$$(\text{arccsc})' = \frac{1}{D(\csc)\circ\text{arccsc}} = -\frac{1}{(\csc\cdot\cot)\circ\text{arccsc}} = -\frac{1}{(\csc\circ\text{arccsc})\cdot(\cot\circ\text{arccsc})} = -\frac{1}{I\cdot(\cot\circ\text{arccsc})}$$

(ακόμα: $\frac{d}{dx}\text{arccsc}\,x = -\frac{d}{dx}\text{arcsec}\,x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

$$\Rightarrow (\text{arccsc}\,x)' = -\frac{1}{x\cot(\text{arccsc}\,x)}$$

$y = \operatorname{arccsc} x \Rightarrow x = \csc y$

$$\cot y = \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 y}}{\sin y} = \pm\sqrt{\frac{1}{\sin^2 y} - 1} = \pm\sqrt{\csc^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2-1}$$

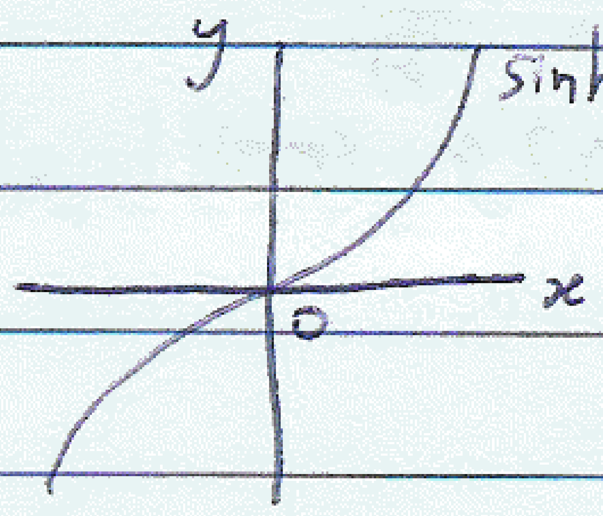
$$\Rightarrow \cot(\operatorname{arccsc} x) = \cot y = \pm\sqrt{x^2-1}$$

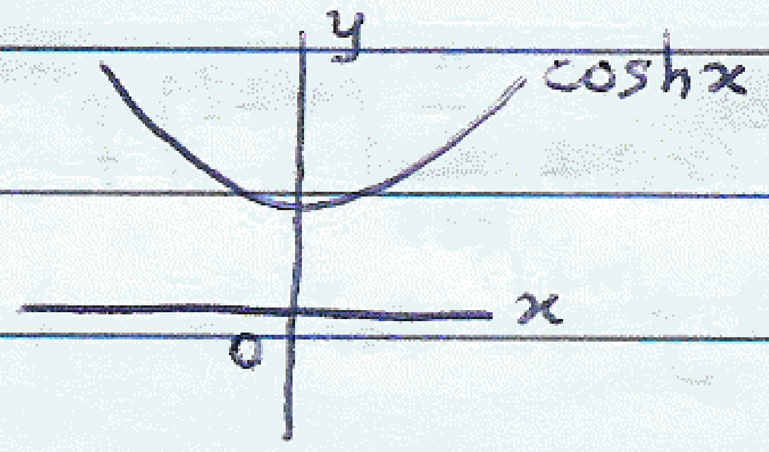
$$\Rightarrow (\operatorname{arccsc} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

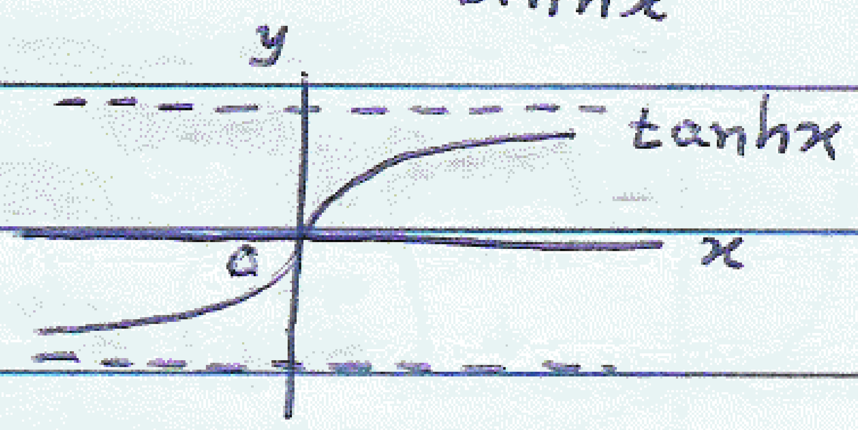
Υπάρχουν και οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$







<u>Ορισμός</u> Αν $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, τότε υπάρχει η παράγωγος $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$. Αν η f' είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε υπάρχει η "δεύτερη παράγωγος" της f, $f'' : (a,b) \to \mathbb{R}$, όπου $f'' = (f')'$.
Όμοια, αν η $f^{(n)} : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε υπάρχει η $(n+1)$-παράγωγος της f, $f^{(n+1)} : (a,b) \to \mathbb{R}$, όπου $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.
Λέμε ότι η f είναι k φορές παραγωγίσιμη στο x_0 αν υπάρχουν οι παράγωγοι $f^{(n)}(x_0)$, $n = 0, 1, \dots, k$.
Λέμε ότι η f είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη στο x_0 αν υπάρχουν οι παράγωγοι $f^{(n)}(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Πρόταση</u>
Αν $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a,b)$, τότε $f+g$, λf, fg n φορές παραγωγίσιμες στο x_0 $(\lambda \in \mathbb{R})$ και

$$(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$$

$$(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$$

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0)\, g^{(k)}(x_0)$$

Απόδειξη

Είναι $(f+g)^{(n)}(x_0) = ((f+g)^{(n-1)})'(x_0) = (f'+g')^{(n-1)}(x_0)$ και συνεχίζοντας φτάνουμε στο άθροισμα των n-οστών παραγώγων.

Επίσης, $(fg)^{(n+1)}(x_0) = ((fg)^{(n)})'(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n-k)} g^{(k)} \right)'(x_0) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(n+1-k)}(x_0)\, g^{(k)}(x_0) + f^{(n-k)}(x_0)\, g^{(k+1)}(x_0) \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x_0)\, g^{(k)}(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0)\, g^{(k+1)}(x_0)$$

$$\overset{\ell=k+1}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x_0)\, g^{(k)}(x_0) + \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} f^{(n+1-\ell)}(x_0)\, g^{(\ell)}(x_0)$$

$$= \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x_0)\, g^{(0)}(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] f^{(n+1-k)}(x_0)\, g^{(k)}(x_0)$$
$$+ \binom{n}{n} f^{(0)}(x_0)\, g^{(n+1)}(x_0)$$

$$= \binom{n+1}{0} f^{(n+1)}(x_0)\, g^{(0)}(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x_0)\, g^{(k)}(x_0)$$
$$+ \binom{n+1}{n+1} f^{(0)}(x_0)\, g^{(n+1)}(x_0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x_0)\, g^{(k)}(x_0)$$

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Να δειχθεί ότι $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$

Είναι

$f^{(1)}(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Αν ισχύει για n, τότε για $(n+1)$ είναι

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(-x - \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(-x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

Όμοια η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, έχει $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Να βρεθεί το $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$

Είναι

$f^{(0)}(0) = f(0) = 1$

$f^{(1)}(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f^{(1)}(0) = 0$

Εξάλλου $(1+x^2)f(x)=1$, άρα $\forall n\geq 2$ είναι

$$(1+x^2)^{(0)} f^{(n)}(x) + n(1+x^2)^{(1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}(1+x^2)^{(2)} f^{(n-2)}(x) + \dots = 0$$

$$\Rightarrow (1+x^2) f^{(n)}(x) + 2nx\, f^{(n-1)}(x) + n(n-1) f^{(n-2)}(x) = 0$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) + n(n-1) f^{(n-2)}(0) = 0$$

$$\Rightarrow f^{(2)}(0) = -2\cdot 1\cdot f^{(0)}(0) = -2!$$

$$f^{(3)}(0) = -3\cdot 2\cdot f^{(1)}(0) = 0$$

$$f^{(4)}(0) = -4\cdot 3\cdot f^{(2)}(0) = 4!$$

$$f^{(5)}(0) = 0$$

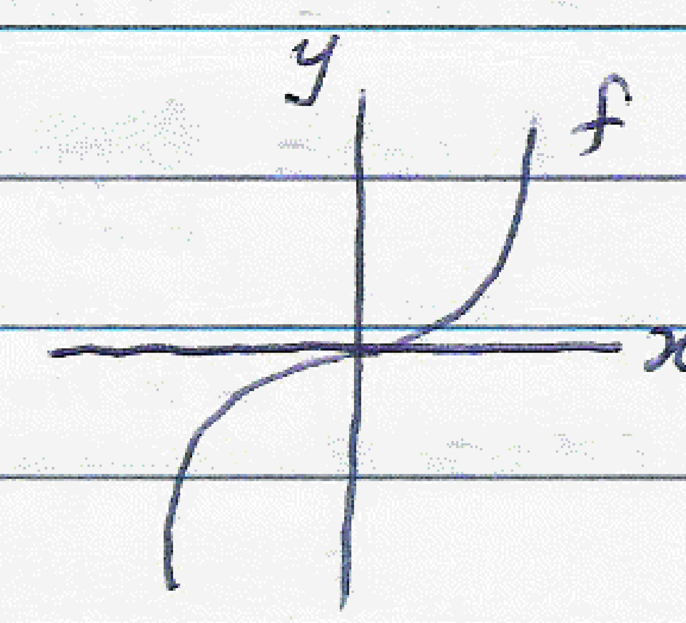
$$f^{(6)}(0) = -6!$$

$$\vdots$$

$$f^{(2n-1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)!$$

Παράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x\geq 0 \\ -x^2, & x\leq 0 \end{cases}$$



$f'(x)=2x,\ x>0$

$f'(x)=-2x,\ x<0$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2}{h} = -\lim_{h\to 0^-} h = 0$$

Άρα $f'(0)=0$ και $f'(x)=2|x|$, αλλά $\nexists\, f''(0)$.

Παράδειγμα

$x(t)=t-t^2$, $y(t)=t-t^3$. Να βρεθεί το $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Είναι

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1-3t^2}{1-2t}\right) = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2-6t+6t^2)/(1-2t)^2}{1-2t} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}$$

Παράδειγμα

$2x^3 - 3y^2 = 8$. Να βρεθεί το $\frac{d^2y}{dx^2}$

Είναι

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}8 \Rightarrow 6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y},\ y \neq 0$$

Άρα $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\frac{x^2}{y} =$$

$$= \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}$$

Παράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Για $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

Για $x = 0$, $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Η f' δεν είναι συνεχής στο 0, άρα η f' όχι παραγωγίσιμη στο 0, άρα $\nexists\ f''(0)$.

Παράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Εδώ η f' είναι συνεχής στο 0, αλλά $\nexists\ f''(0)$ λόγω του όρου $x\cos\frac{1}{x}$.

Παράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2\sin\frac{1}{x} - 4x\cos\frac{1}{x} - 2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$\exists f'(0), f''(0)$, αλλά f'' όχι συνεχής στο 0, άρα $\nexists f'''(0)$.

Παράδειγμα

$$f(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$\exists f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n)}(0)$, αλλά $f^{(n)}$ όχι συνεχής στο 0, άρα $\nexists f^{(n+1)}(0)$.

Παράδειγμα

$$f(x)=\begin{cases} x^{2n+1}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$\exists f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ και $f^{(n)}$ συνεχής στο 0. Πρόσο $\nexists f^{(n+1)}(0)$.

Δηλαδή, ο παθολογικός χαρακτήρας του $\sin\frac{1}{x}$ θα φανεί στην ανυπαρξία κάποιας ανώτερης παραγώγου και πάνω.

Ορισμός

Αν $y=f(x)$ παραγωγίσιμη, ονομάζουμε διαφορικό της f στο x τη γραμμική συνάρτηση $df(x;h)=f'(x)\cdot h$

Γράφουμε ακόμα $h=dx$, οπότε $df=f'(x)\cdot dx$ ή $dy=f'(x)\cdot dx$

Επειδή $f'(x)=\frac{df}{dx}$, έπεται ότι ο συμβολισμός αυτός της παραγώγου εκφράζει και το πηλίκο δύο διαφορικών.

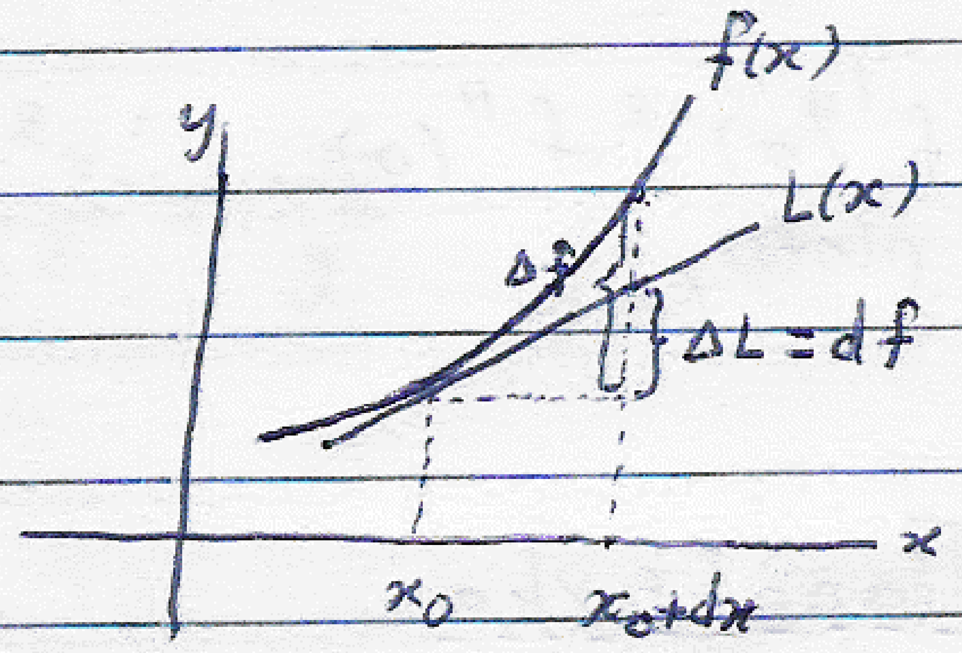
Το διαφορικό dx είναι ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το διαφορικό dy εξαρτάται από το x και το dx.

Τα διαφορικά dx, dy δεν είναι απαραίτητα μικρά, παρότι στις φυσικές εφαρμογές συνήθως είναι, οπότε στην περίπτωση αυτή ποσότητες της μορφής $(dx)^2$, $dx\,dy$, $(dy)^2, \ldots$ (διαφορικά ανωτέρας τάξης) είναι πολύ μικρότερες από τα dx, dy και αγνοούνται.

π.χ. $y = f(x) = x^5 + 37x$

$dy = df = (5x^4 + 37)\,dx$

Αν f παραγωγίσιμη στο x_0, η συνάρτηση $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ λέγεται γραμμικοποίηση της f στο x_0.



Ισχύει $\underline{\Delta L = df}$

αφού

$$\Delta L = L(x_0 + dx) - L(x_0)$$
$$= [f(x_0) + f'(x_0)\,dx] - f(x_0)$$
$$= f'(x_0)\,dx = df$$

δηλαδή όταν το x μεταβληθεί από x_0 σε $x_0 + dx$, το df εκφράζει τη μεταβολή επί της εφαπτομένης και όχι επί της ίδιας της συνάρτησης $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$.

Είναι $\underline{dx = \Delta x}$ λόγω ορισμού, ενώ $df \neq \Delta f$.

Ισχύει $\underline{\Delta f = df + \underbrace{\varepsilon \Delta x}_{\text{σφάλμα}}}$, με $\varepsilon \to 0$ για $\Delta x \to 0$

αφού

$$\Delta f - df = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right]\Delta x$$
$$= \varepsilon \Delta x,$$

όπου $\varepsilon(x_0, \Delta x) = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$

και βέβαια για $\Delta x \to 0$ είναι $\varepsilon \to f'(x_0) - f'(x_0) = 0$

Για $f(x) = x$ είναι $\varepsilon = \dfrac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} - 1 = 0$, άρα πράγματι $\Delta x = dx$.

Αν θέλουμε να είμαστε πιο τυπικοί ορίζουμε

$\tilde{\Phi}(x_0; h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$, οπότε $\lim\limits_{h \to 0} \tilde{\Phi}(x_0; h) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$ και επειδή η $\tilde{\Phi}$ δεν ορίζεται στο 0, θεωρούμε την επέκτασή της ϕ με $\phi(0) = 0$, οπότε ϕ συνεχής στο 0. Άρα

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \phi(x_0; h)h, \quad \phi(x_0; h) \text{ συνεχής με } \phi(x_0; 0) = 0.$$

Ισχύει $\underline{f(x+h) \simeq f(x) + df(x;h)}$, $|h|$ μικρό, $df \neq 0$

αφού αν $df \neq 0 \Leftrightarrow f'(x) \neq 0$, τότε για $|h|$ αρκούντως μικρό είναι $|\phi(x;h)| << |f'(x)|$ αφού $\phi(x;h)$ συνεχής στο $h=0$ με $\phi(x;0)=0$
Επομένως, από
$$f(x+h) = f(x) + [f'(x) + \phi(x;h)]h$$
$$\simeq f(x) + f'(x) \cdot h$$
$$= f(x) + df(x;h)$$

Αργότερα, θα δούμε ότι $f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{1}{2!} f''(x) \cdot h^2 + \cdots$

Παράδειγμα

1) $f(x) = (1+x)^k$

$f'(x) = k(1+x)^{k-1}$, $f'(0) = k$, $f(0) = 1$

$\Rightarrow f(0+x) \simeq f(0) + f'(0)x$, $|x|$ μικρό

$\Rightarrow (1+x)^k \simeq 1 + kx$, $|x|$ μικρό

π.χ. $k = \frac{1}{2}$, $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$, $|x|$ μικρό

$k=-1$, $\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x$, $|x|$ μικρό

$k = \frac{1}{3}$, $(1+x)^{1/3} \simeq 1 + \frac{1}{3}x \rightsquigarrow \sqrt[3]{1+5x^4} \simeq 1 + \frac{1}{3}5x^4$, $|x|$ μικρό

$k = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq 1 - \frac{1}{2}x \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}x^2$, $|x|$ μικρό

2) $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$

$\Rightarrow f(0+x) \simeq f(0) + f'(0)x$, $|x|$ μικρό

$\Rightarrow \sin x \simeq x$, $|x|$ μικρό

3) $f(x) = \cos x$

$f'(x) = -\sin x$, $f'(0) = 0$, $f(0) = 1$

$\Rightarrow f(0+x) \simeq f(0) + f'(0)x$, $|x|$ μικρό

$\Rightarrow \cos x \simeq 1$, $|x|$ μικρό

4) $f(x) = \tan x$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$

$\Rightarrow f(0+x) \simeq f(0) + f'(0)x$, $|x|$ μικρό

$\Rightarrow \tan x \simeq x$, $|x|$ μικρό.

5) $f(x)=\cos x$

$f'(x) = -\sin x \quad , \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad f(x) \simeq f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad x$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad \cos x \simeq \frac{\pi}{2} - x \quad , \quad x$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}$.

Παράδειγμα

1) $\sin 31^\circ$

$\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right)$

$f(x) = \sin x \quad , \quad x = \frac{\pi}{6} \quad , \quad h = \frac{\pi}{180}$

$f'(x) = \cos x \quad , \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad f(x+h) \simeq f(x) + f'(x)h \quad , \quad |h|$ μικρό

$\Rightarrow \quad \sin 31^\circ \simeq f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\pi}{180} = 0.5 + 0.01512 = 0.51512$

ενώ $\sin 31^\circ = 0.51504\ldots$

2) $\sqrt{145}$

$\sqrt{145} = \sqrt{144+1}$

$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad x = 144 \quad , \quad h = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad f'(144) = \frac{1}{2.12} = \frac{1}{24} \quad , \quad f(144) = \sqrt{144} = 12$

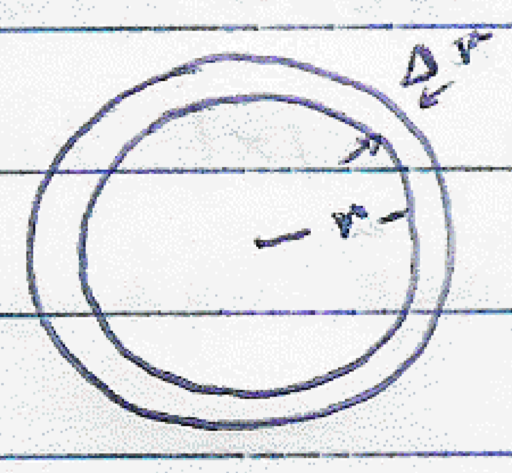
$\Rightarrow \quad f(x+h) \simeq f(x) + f'(x)\,h , \quad |h|$ μικρό

$\Rightarrow \quad \sqrt{145} \simeq f(144) + f'(144).1 = 12 + \frac{1}{24}.1 = 12.0417$

ενώ $\sqrt{145} = 12.0416\ldots$

Παράδειγμα

1) $A = \pi r^2$



$r = 10\ m$

$\Delta r = 0.1\ m$

Η γραμμική μεταβολή του εμβαδού είναι

$dA = A'(r)\,dr = 2\pi r\,dr$

$= 2\pi(10)(0.1) = 2\pi$

Η πραγματική μεταβολή του εμβαδού είναι

$\Delta A = A(r+\Delta r) - A(r) = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = \pi(102.01 - 100) =$

$= 2.01\pi = 2\pi + 0.01\pi = dA + \underbrace{0.01\pi}_{\text{σφάλμα γραμμικοποίησης}}$

2) $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \simeq m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = m_0 + \frac{1}{2}m_0\frac{\upsilon^2}{c^2} \Rightarrow (m - m_0)c^2 \simeq \frac{1}{2}m_0\upsilon^2 - \frac{1}{2}m_0 0^2$

$\Rightarrow \quad \Delta m.\,c^2 \simeq \Delta T \Rightarrow \Delta T \simeq 9\times 10^{16}\,\Delta m\,(\text{Joule})$