ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Μαθηματικός Λογισμός

Σημειώσεις – Επαγωγή

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μαθηματική Επαγωγή

Συμβολισμός : $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

π.χ. $\sum_{k=1}^{4} 2k = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 = 2+4+6+8$

$\sum_{k=0}^{2} 1 = 1+1+1 = 3$

$\sum_{k=1}^{n} p = p+p+\dots+p = np$

$\sum_{k=1}^{n} n = n+n+\dots+n = n^2$

$\sum_{k=-3}^{1} k^3 = (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3$

$\sum_{k=3}^{7} \frac{1}{(k-2)^2} \overset{l=k-3}{=} \sum_{l=0}^{4} \frac{1}{(l+1)^2} = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{(k+1)^2}$

Ισχύει η εξής προφανής αρχή της μαθηματικής επαγωγής που διατυπώθηκε από τον Φραγκίσκο Μαυρόλυκο (1557) και αργότερα από τον B. Pascal (1675)

Αρχή μαθηματικής επαγωγής: Έστω $p(x)$ μία πρόταση (ισότητα, ανισότητα, έκφραση) που αναφέρεται στον αριθμό x. Έστω

- $p(n_0)$ αληθής , $n_0 \in \mathbb{Z}$
- αν $p(n)$ αληθής για τυχόν $n \geq n_0 \Rightarrow p(n+1)$ αληθής.

Τότε $p(n)$ αληθής $\forall n \geq n_0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(συνήθως ο εναρκτήριος ακέραιος είναι $n_0 = 0$ ή 1)

Παράδειγμα: $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Για $n=1$ ισχύει $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$

Έστω ότι ισχύει η παραπάνω σχέση για n. Τότε

$\sum_{k=1}^{n+1} k = 1+2+\dots+(n+1) = (1+2+\dots+n)+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$,

δηλαδή ισχύει η παραπάνω σχέση και για $n+1$.

Επομένως, από την αρχή της επαγωγής ισχύει η παραπάνω σχέση $\forall n$.

Δεν είναι εύκολο να μαντεύουμε τέτοιες "κλειστές" εκφράσεις για αθροίσματα, αν όμως μας δοθεί προς απόδειξη συνήθως μπορούμε να το δείξουμε με επαγωγή.

Εδώ την παραπάνω "κλειστή" έκφραση μπορούμε να την υπολογίσουμε ως εξής:

Είναι $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$

Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή για $k=1,2,\dots,n$, οπότε

$$2^2 - 1^2 = 2\cdot 1+1$$
$$3^2 - 2^2 = 2\cdot 2+1$$
$$\vdots$$
$$(n+1)^2 - n^2 = 2\cdot n+1$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές παίρνουμε

$$(n+1)^2 - 1 = 2\cdot(1+2+\dots+n) + n$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot(1+2+\dots+n) = (n+1)^2 - 1 - n = (n+1)^2 - (n+1) = n(n+1)$$
$$\Leftrightarrow 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Παράδειγμα: $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x>-1$, $n\in\mathbb{N}$ (ανισότητα Bernoulli)

Για $n=0$ ισχύει $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0\cdot x$

Έστω ότι ισχύει η παραπάνω ανισότητα για n. Τότε

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$,

δηλαδή ισχύει η παραπάνω ανισότητα για $n+1$.

Άρα, από την αρχή της επαγωγής ισχύει η παραπάνω ανισότητα $\forall n$.

Παράδειγμα Κάθε φυσικός είναι είτε even είτε odd

Ο φυσικός $n=1$ είναι πράγματι odd.

Έστω ότι ο φυσικός n είναι είτε even είτε odd. Τότε είτε $n=2k$ είτε $n=2k+1$, άρα είτε $n+1=2k+1$ είτε $n+1=2k+2$, άρα $n+1$ είτε odd είτε even.

Επομένως, από την αρχή της επαγωγής κάθε φυσικός είναι είτε even είτε odd.

Ορισμός $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, $0 \le k \le n$ (διωνυμικός συντελεστής)

όπου $n! = 1\cdot 2 \cdots n$, $0! = 1$

Ισχύει: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad \text{(τριγωνική ιδιότητα Pascal)}$$

αφού $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\,k}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

Ισχύει: $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \text{(διωνυμικό ανάπτυγμα)}$$

$x, y \in \mathbb{R}$

Για $n=0$ ισχύει $(x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} x^{0-k} y^k$

Έστω ότι ισχύει η παραπάνω σχέση για n. Τότε

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k = x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k =$$

$$= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k \overset{l=k-1}{=\!=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^{n-l} y^{l+1} =$$

$$= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y)(x+y)^n =$$

$= (x+y)^{n+1}$, δηλαδή ισχύει η παραπάνω σχέση για $n+1$. Άρα λόγω της αρχής της επαγωγής ισχύει για κάθε n.

Τρίγωνο Pascal

Βάσει τη τριγωνική ιδιότητας του Pascal κατασκευάζεται μια τριγωνική διάταξη όπου κάθε αριθμός του τριγώνου είναι το άθροισμα

$$\begin{array}{ccccccccccccc|l}
 & & & & & & 1 & & & & & & & 1\text{η γραμμή} \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & 2\text{η} \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & 3\text{η} \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & 4\text{η} \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & 5\text{η} \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & 6\text{η} \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & 7\text{η}
\end{array}$$

των δύο αριθμών της προηγούμενης γραμμής κάτω από τους οποίους βρίσκεται.
Το τρίγωνο Pacal έχει δύο ιδιότητες: (i) ο αριθμός $\binom{n}{k}$ ισούται με το $k+1$ στοιχείο της $n+1$ γραμμής, π.χ. το $\binom{6}{2}=15$ ισούται με το 3ο στοιχείο της 7ης γραμμής (ii) η $(n+1)$-οστή γραμμή δίνει τους συντελεστές του αναπτύγματος $(x+y)^n$.

Ισχύει $\binom{n}{k}\in\mathbb{N}^*$

1η απόδειξη (μέσω επαγωγής):

Για $n=1$, εκ του ορισμού του διωνυμικού συντελεστή είναι $k=0,1$ και ισχύει $\binom{1}{0}=\binom{1}{1}=1\in\mathbb{N}^*$. Επίσης είναι $\binom{n}{0}=1\in\mathbb{N}^*$.
Έστω ότι για n ισχύει $\binom{n}{k}\in\mathbb{N}^*, 0\neq k\leq n$. Τότε αφού $k-1<n$ άρα $\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}\in\mathbb{N}^*, k\leq n$. Άρα $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\in\mathbb{N}^*, k\leq n$. Αλλά $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$, άρα $\binom{n+1}{k}\in\mathbb{N}^*, k\leq n$. Εξάλλου $\binom{n+1}{n+1}=1\in\mathbb{N}^*$.
Άρα τελικά $\binom{n+1}{k}\in\mathbb{N}^*, k\leq n+1$.

2η απόδειξη (μέσω συνδυαστικής):

Αν έχω n διακριτά αντικείμενα, τότε ο αριθμός των διατάξεων των $k\leq n$ εξ' αυτών είναι $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, αφού για την πρώτη θέση της διάταξης μπορούν να επιλεγούν n αντικείμενα, για τη δεύτερη θέση $n-1$, ..., για την k θέση $n-(k-1)$ αντικείμενα. Απ' την άλλη, απ' όλες αυτές τις διατάξεις, μαζεύουμε σε ομάδες όλες εκείνες που περιέχουν δεδομένα k αντικείμενα. Προφανώς, κάθε τέτοια ομάδα περιέχει $k!$ στοιχεία-διατάξεις, αφού ένα σύνολο k αντικειμένων μπορεί να διαταχθεί κατά $k!$ τρόπους. Επομένως, ο αριθμός των σχηματιζόμενων ομάδων είναι $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k}$, που είναι και ο αριθμός των συνδυασμών των n αντικειμένων ανά k (χωρίς να ενδιαφέρει η διάταξη τους). Τελικά $\binom{n}{k}\in\mathbb{N}^*$.

Παράδειγμα $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2\sum_{k=odd}\binom{n}{k}=2\sum_{k=even}\binom{n}{k}=2^n$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

Είναι $2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

$$0 = [1+(-1)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 2^n - 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} [1-(-1)^k] \binom{n}{k} = 2^n \Rightarrow 2 \sum_{k=odd} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 2^n + 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} [1+(-1)^k] \binom{n}{k} = 2^n \Rightarrow 2 \sum_{k=even} \binom{n}{k} = 2^n$$

Αρχή της πλήρους επαγωγής: Έστω

- $p(n_0)$ αληθής, $n_0 \in \mathbb{Z}$
- $p(n_0), p(n_0+1), \dots, p(n)$ αληθείς για τυχόν $n \geq n_0 \Rightarrow p(n+1)$ αληθής.

Τότε $p(n)$ αληθής, $\forall n \geq n_0$, $n \in \mathbb{Z}$

Απόδειξη Έστω ότι δεν ισχύει η παραπάνω αρχή. Τότε ισχύουν οι υποθέσεις, αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμα, δηλαδή $\exists n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ με $p(n)$ ψευδής. Άρα το $A \equiv \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0, p(n) \text{ ψευδής}\} \neq \phi$. Προφανώς $n_0 \notin A$ αφού $p(n_0)$ αληθής. Αν $n_1 = \min A$ τότε $n_1 \in A$ και είναι $n_1 \geq n_0 + 1$. Άρα $n_0, n_0+1, \dots, n_1 - 1 \notin A$, άρα $p(n_0)$, $p(n_0+1), \dots, p(n_1-1)$ αληθείς. Επομένως, εξ' υποθέσεως θα ισχύει ότι $p(n_1)$ αληθής, άρα $n_1 \notin A$, που είναι άτοπο. Άρα ισχύει η παραπάνω αρχή.

Παράδειγμα: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + \dots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \sum_{r=0}^{p} A_r n^r$, $p \in \mathbb{N}$

Θα δείξουμε τη σχέση εφαρμόζοντας την αρχή της πλήρους επαγωγής ως προς το p.

Για $p=0$ ισχύει $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^0 = 1^0 + 2^0 + \dots + n^0 = 1+1+\dots+1 = n = \frac{n^{0+1}}{0+1} + \sum_{r=0}^{0} 0 . n^r$

Για $p=1$ ισχύει $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^1 = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^{1+1}}{1+1} + \frac{1}{2} n$

Έστω ότι ισχύει η παραπάνω σχέση για $p=0, p=1, \dots, p-1$.

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε

$$(k+1)^{p+1} = \sum_{r=0}^{p+1} \binom{p+1}{r} k^{p+1-r} = k^{p+1} + (p+1) k^p + \sum_{r=2}^{p+1} \binom{p+1}{r} k^{p+1-r}$$

$$\Rightarrow (k+1)^{p+1} - k^{p+1} = (p+1) k^p + \sum_{r=2}^{p+1} \binom{p+1}{r} k^{p+1-r}$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή για $k = 1, 2, \dots, n$ οπότε έχουμε

$$2^{p+1} - 1^{p+1} = (p+1)\,1^p + \sum_{r=2}^{p+1} \binom{p+1}{r} 1^{p+1-r}$$

$$3^{p+1} - 2^{p+1} = (p+1)\,2^p + \sum_{r=2}^{p+1} \binom{p+1}{r} 2^{p+1-r}$$

$$\vdots$$

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = (p+1)\,n^p + \sum_{r=2}^{p+1} \binom{p+1}{r} n^{p+1-r}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές παίρνουμε

$$(n+1)^{p+1} - 1 = (p+1)\left(1^p + 2^p + \dots + n^p\right) + \sum_{r=2}^{p+1} \binom{p+1}{r} \left(1^{p+1-r} + 2^{p+1-r} + \dots + n^{p+1-r}\right)$$

$$\Rightarrow (n+1)^{p+1} - 1 = (p+1) \sum_{k=1}^{n} k^p + \sum_{r=2}^{p+1} \binom{p+1}{r} \sum_{k=1}^{n} k^{p+1-r}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} \sum_{r=2}^{p+1} \binom{p+1}{r} \sum_{k=1}^{n} k^{p+1-r}$$

Έχουμε υποθέσει ότι η αρχική σχέση ισχύει για τις τιμές του p: $0, 1, \dots, p-1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για την τιμή p.

Επομένως, αφού $p+1-r = 0, 1, \dots, p-1$, άρα οι ποσότητες $\sum_{k=1}^{n} k^{p+1-r}$ θα εκφράζονται ως άθροισμα δυνάμεων του n με μέγιστη δύναμη το n^p.

Απ' την άλλη $(n+1)^{p+1} = n^{p+1} + \dots$ δυνάμεις του $n \dots$ $(n^r, r \le p)$

Τελικά $\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \dots$ δυνάμεις του $n \dots$ $(n^r, r \le p)$,

δηλαδή αποδείχθηκε η σχέση για την τιμή p.

Από την αρχή της πλήρους επαγωγής θα ισχύει η σχέση $\forall p \in \mathbb{N}$.

Άσκηση Υπολογίστε τα $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+\cdots+(2n-1)$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$$

Είναι $1+3+\cdots+(2n-1) = 1+2+3+\cdots+2n - 2(1+2+\cdots+n)$

$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)}{2} = n^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Επίσης $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n)^2 - [2^2+4^2+\cdots+(2n)^2]$

$$= 1^2+2^2+\cdots+(2n)^2 - 4(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

Άσκηση $\sum_{k=1}^{n}k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+\cdots+n)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$$

- Για $n=1$ ισχύει $\sum_{k=1}^{1}k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

Έστω ότι ισχύει η πρώτη σχέση για n. Τότε

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^2 = 1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2 = (1^2+2^2+\cdots+n^2)+(n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right] = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

δηλαδή ισχύει η σχέση για $n+1$.

Άρα, από την αρχή της επαγωγής ισχύει η σχέση $\forall n$

Μπορούμε και από μόνοι μας να υπολογίσουμε σε κλειστή μορφή την έκφραση χωρίς να μας την δώσουνε.

Είναι $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$

Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή για $k=1,2,\ldots,n$, οπότε

$$2^3-1^3 = 3\cdot1^2+3\cdot1+1$$

$$3^3-2^3 = 3\cdot2^2+3\cdot2+1$$

$$\vdots$$

$$(n+1)^3-n^3 = 3\cdot n^2+3\cdot n+1$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές παίρνουμε

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2+2^2+\cdots+n^2) + 3(1+2+\cdots+n) + n$$

$$\Rightarrow 3(1^2+2^2+\cdots+n^2) = (n+1)^3 - 1 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right] = (n+1)\left(n^2+\frac{n}{2}\right) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

– Για $n=1$ ισχύει $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$

Έστω ότι ισχύει η δεύτερη σχέση για n. Τότε

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = (1+2+\cdots+n+1)^2 = [(1+2+\cdots+n)+(n+1)]^2 =$$

$$= (1+2+\cdots+n)^2 + 2(1+2+\cdots+n)(n+1) + (n+1)^2 =$$

$$= 1^3+2^3+\cdots+n^3 + 2\,\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2 =$$

$$= 1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3,$$

δηλαδή ισχύει η σχέση και για $n+1$. Τελικά ισχύει $\forall n$.

Όμοια με προηγουμένως είναι $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3+6k^2+4k+1$.

Άρα, για $k=1,2,\ldots,n$

$$2^4 - 1^4 = 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1$$

$$\vdots$$

$$(n+1)^4 - n = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

και προσθέτοντας κατά μέλη

$$(n+1)^4 - 1 = 4(1^3+\cdots+n^3) + 6(1^2+\cdots+n^2) + 4(1+\cdots+n) + n$$

$$\Rightarrow 4(1^3+\cdots+n^3) = (n+1)^4 - (n+1) - 6\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right]$$

$$= (n+1)\left[(n+1)^3 - (n+1) - 2n(n+1)\right]$$

$$= (n+1)^2\left[(n+1)^2 - 1 - 2n\right] = n^2(n+1)^2$$

Άσκηση $\sum_{k=0}^{n} r^k = 1+r+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, $r \neq 1$ (γεωμετρική πρόοδος)

- Μέσω επαγωγής: Για $n=0$ ισχύει $1 = \frac{1-r}{1-r}$. Για $n=1$ ισχύει $1+r = \frac{1-r^2}{1-r}$

Έστω ότι ισχύει η σχέση για n. Τότε

$$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = 1+r+\cdots+r^{n+1} = (1+r+\cdots+r^n)+r^{n+1} = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}+r^{n+1} =$$
$$= \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r} = \frac{1-r^{n+2}}{1-r}$$

- Απευθείας υπολογισμός: Αν $S \equiv 1+r+\cdots+r^n \Rightarrow rS = r+r^2+\cdots+r^{n+1}$

$$\Rightarrow rS - S = (r+r^2+\cdots+r^n+r^{n+1}) - (1+r+\cdots+r^n) = r^{n+1}-1$$
$$\Rightarrow S = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

Άσκηση $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

- Είναι $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$ και άρα για $k=1,2,\dots,n$

$$1-\frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 2}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Προσθέτοντας έχουμε $1-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

- $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, άρα για $k=1,2,\dots,n$

$$1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{1^2\cdot 2^2}, \quad \frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2} = \frac{5}{2^2\cdot 3^2}, \dots, \quad \frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Άσκηση $(1+x)^n < 1+3^n x$, $0<x<1$, $n \in \mathbb{N}^*$

Για $n=1$ ισχύει $1+x<1+3x \Leftrightarrow x>0$

Έστω ότι ισχύει η ανισότητα για n. Τότε

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) < (1+3^n x)(1+x) = 1+(3^n x+3^n+1)x <$

$< 1+(3^n+3^n+3^n)x = 1+3^{n+1}x$,

δηλαδή ισχύει η ανισότητα για $n+1$.

Τελικά ισχύει $\forall n$.

Άσκηση $n! > 3^n$, $n \geq 7$

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040
3^n	3	9	27	81	243	729	2187

Για $n=7$ ισχύει $7!>3^7$

Έστω ότι ισχύει η ανισότητα για n. Τότε

$(n+1)! = (n+1)\,n! > (n+1)\,3^n > 7\cdot 3^n > 3\cdot 3^n = 3^{n+1}$,

δηλαδή ισχύει η ανισότητα για $n+1$. Τελικά ισχύει $\forall n$.

Πρόταση (ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου)

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad , \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0 \; , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Η ισότητα ισχύει ανν $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

Απόδειξη

Για $n=1$ ισχύει η ισότητα της πρότασης.

Για $n>1$ και ένα τουλάχιστον από τα a_i μηδέν, ισχύει η πρότασ

Για $n>1$ και $a_1 = \cdots = a_n > 0$ ισχύει η ισότητα της πρότασης.

Αρκεί να δείξουμε την πρόταση για $n>1$ και $a_1, \ldots, a_n > 0$ όχι όλο ίσοι, π.χ. $a_1 < a_n$.

Θέτουμε $\gamma = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$, $\beta_i = \frac{a_i}{\gamma}$.

Είναι $\beta_1, \ldots, \beta_n > 0$, $\beta_1 \cdots \beta_n = 1$, $\beta_1 < \beta_n \Rightarrow \beta_1 + \cdots + \beta_n > n$

$$\Rightarrow \frac{a_1+\cdots+a_n}{\gamma} > n \Rightarrow \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

Χρησιμοποιήσαμε τον εξής ισχυρισμό:

$n>1$, $\beta_1, \ldots, \beta_n > 0$ όχι όλοι ίσοι, $\beta_1 \cdots \beta_n = 1 \Rightarrow \beta_1 + \cdots + \beta_n > n$

Πράγματι, για $n=2$ είναι $0 < (\sqrt{\beta_1} - \sqrt{\beta_2})^2 = \beta_1 + \beta_2 - 2\sqrt{\beta_1 \beta_2} = \beta_1 + \beta_2 - 2$

$\Rightarrow \beta_1 + \beta_2 > 2$

Έστω ότι ισχύει ο ισχυρισμός για n. Θα τον δείξουμε για $n+1$.

Θεωρούμε τους $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1} > 0$ όχι όλοι ίσοι, με $\gamma_1 \cdots \gamma_{n+1} = 1$.

Σίγουρα ένας τουλάχιστον από τους γ_i είναι μικρότερος του 1 και ένας τουλάχιστον μεγαλύτερος του 1, αφού το γινόμενο του κάνει 1. Έστω $\gamma_1 < 1$, $\gamma_{n+1} > 1$ (έτσι ώστε το $\gamma_1 \gamma_{n+1}$ να μην συμπίπτει με τα $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ στην περίπτωση που αυτά είναι ίσα).

Είναι $(\gamma_1 \gamma_{n+1}) \gamma_2 \cdots \gamma_n = 1$, όπου $\gamma_1 \gamma_{n+1}, \gamma_2, \ldots, \gamma_n > 0$ όχι όλοι ίσοι, άρα $\gamma_1 \gamma_{n+1} + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n > n$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad \gamma_1 + \cdots + \gamma_{n+1} &= \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n + \gamma_{n+1} \\ &= (\gamma_1 \gamma_{n+1} + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n) + 1 + (\gamma_{n+1} - 1)(1 - \gamma_1) \\ &> n + 1 + (\gamma_{n+1} - 1)(1 - \gamma_1) > n+1 \end{aligned}$$

δηλαδή εδείχθη η πρόταση για $n+1$. Άρα από την αρχή της επαγωγής ισχύει ο ισχυρισμός $\forall n > 1$.

Σημείωση: Ειδικά για $\gamma_1 < 1$, $\gamma_{n+1} = \frac{1}{\gamma_1} > 1$, $\gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 1$ είναι $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{n+1} = 1$, αλλά $\gamma_1 \gamma_{n+1} = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 1$, ωστόσο και εδώ $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{n+1} =$

$$= \gamma_1 + \frac{1}{\gamma_1} + n - 1 = \frac{1+\gamma_1^2}{\gamma_1} + n - 1 > 2 + n - 1 = n+1$$