ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σημειώσεις – Μη Γραμμική δυναμική στο επίπεδο

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μη-γραμμική δυναμική – 1D

Χάος   **Φράκταλς**

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

- τάση προς ισορροπία
- κυκλική εξέλιξη
- κάτι πιο περίπλοκο

μαθηματική θεωρία της αλλαγής, εξέλιξη ενός <u>συστήματος</u> στον χρόνο

με την έννοια των ΔΣ, όχι με την κλασική έννοια του συνόλου κάποιων εξισώσεων

'Ενοποίηση' διαφορετικών επιστημονικών περιοχών
- ΔΕ, μηχανική, σχετικότητα, κοσμολογία, χημική κινητική, βιολογία πληθυσμών κ.α.

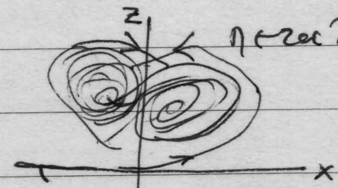
<u>Ιστορική αναδρομή</u>

- <u>Newton</u> ~ 1680 : πρόβλημα δύο σωματιδίων
- Πρόβλημα τριών σωμάτων : Άλυτο με παραδοσιακές μεθόδους
- <u>Poincaré</u> ~1900 : <u>Ποιοτική προσέγγιση</u>, <u>γεωμετρική θεμελίωση</u> (για το Π.Τ.Σ.)
  - → Σύγχρονη θεωρία των δυναμικών συστημάτων, χάος.

: "Είναι το Ηλιακό σύστημα σταθερό; Ή τελικά οι πλανήτες απομακρύνονται στο άπειρο;"

→ Ντετερμινιστικά συστήματα που δείχνουν απεριοδική συμπεριφορά & ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες : Αδύνατη η <u>μακροπρόθεσμη πρόβλεψη</u> της εξέλιξης του συστήματος (χάος).

- <u>1960</u> : ↔ <u>Μη γραμμικοί ταλαντωτές</u>
  (Andronov, van der Pol, Smale...)
  ↔ Κλασσική μηχανική
  (KAM)
- Χάος & μετεωρολογία : <u>Lorentz 1963</u>
  - Χρήση Η/Υ
  - Παράξενοι ελκυστές, μη προβλεψιμότητα
  - 'Τάξη στο χάος' : τροχιές σαν πεταλούδα



- <u>Ruelle & Takens 1971</u> : στροβιλώδης ροή
- Feigenbaum : 'universality' σε αλλαγές φάσης
- May που οδηγούν σε χαοτική συμπεριφορά.
- <u>Mandelbrot 1960-70s</u> : Φράκταλς
- <u>1970 - 2010</u> : Κοσμολογία, σχετικότητα, Hamiltonian systems, variations, ∞ - dim systems

<u>Λογική δομή της δυναμικής</u>

συνεχής χρόνος — 'ΔΕ' — <u>ODE</u>, <u>PDE</u>

Διακριτός χρόνος — 'Απεικονίσεις'

$\boxed{\text{Γραμμικές \& μη - γραμμικές}}$

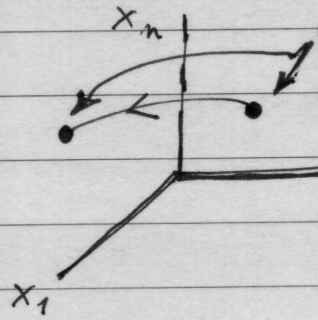
μπορούν να διασπαστούν σε απλά μέρη

δεν διασπώνται όπως τα γραμμικά.

<u>Μέθοδοι μελέτης</u>: Αναλυτικές, Γεωμετρικές

συν/νες χ.Φ.

$x_1, x_2, \dots, x_n$



<u>χώρος φάσεων</u>, <u>τροχιά</u>

- Η λύση του συστήματος αντιστοιχεί στην 'κίνηση' ενός σημείου στον χώρο φάσεων

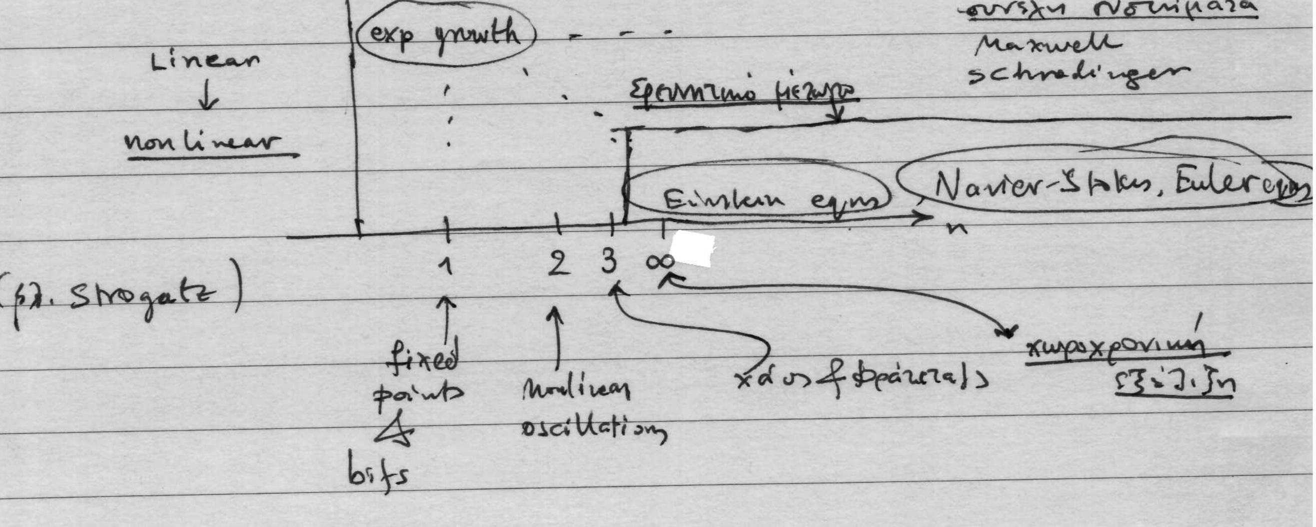
$\boxed{\text{Δοθέντος συστήματος}}$

↓ <u>χωρίς να λύσουμε το σύστημα</u>

Λύσεις
Τροχιές

n : διάσταση του συστήματος & του χώρου των φάσεων.

- Θα ασχοληθούμε με <u>αυτόνομα</u>, μη-γραμμικά συστήματα ΔΕ (μη-αυτόνομα συστήματα γίνονται αυτόνομα αυξάνοντας την διάσταση του χ.Φ.)



Μη-γραμμικές εξισώσεις $1^{ης}$ τάξης

Το γενικό ΔΣ η διάστασης (η-διάστατος χ.φ.) είναι:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

και οι λύσεις του είναι τροχιές στο χ.φ.. Για $n=1$ έχουμε το μονοδιάστατο "σύστημα":

$$\boxed{\dot{x} = f(x)} . \qquad (1)$$

Ο σκοπός μας είναι να οδηγηθούμε σε μια ερμηνεία της (1) ως διανυσματικό πεδίο. Αυτή είναι η γεωμετρική προσέγγιση στις ΔΕ και τα ΔΣ. Για παράδειγμα, η ΔΕ

$$\dot{x} = \sin x,$$

έχει λύση σε πεπλεγμένη μορφή:

$$t = \ln \left| \frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot t} \right| ,$$

η οποία είναι δύσκολο να ερμηνευθεί. Π.χ.

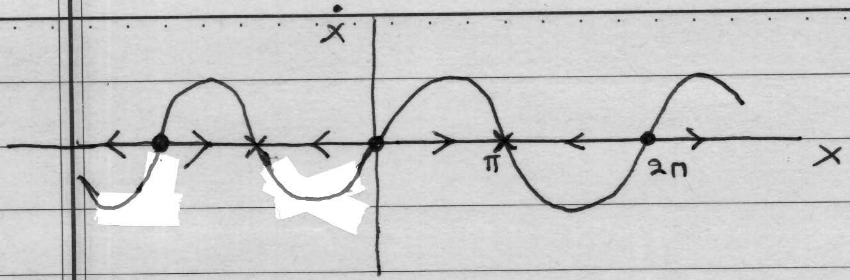
ΕΡ 1: Ποιά είναι τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της λύσης $x(t)$, γιά όλα τα $t>0$, η οποία διέρχεται από το σημείο (αρχική συνθήκη) $x_0 = \pi/4$; Τί συμβαίνει καθώς $t \to \infty$;

ΕΡ 2: Για αυθαίρετη Α.Σ. x_0, ποιά είναι η συμπεριφορα της $x(t)$ καθώς $t \to \infty$;

Εισάγουμε τώρα την απόλυτη

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

για την εξίσωση $\dot{x} = \sin x$.



Ο χ.φ. είναι 1-διάστατος, η ευθεία των πραγματικών αριθμών, t είναι ο χρόνος και x η θέση του (φανταστικού) σημείου που κινείται στον χ.φ., $\dot{x}$ είναι η ταχύτητα του σημείου. Τότε η ΔΕ $\dot{x} = \sin x$ δίνει ένα διανυσματικό πεδίο, την ταχύτητα $\dot{x}$ σε κάθε θέση x. Τα βέλη δείχνουν προς τα δεξιά (αριστερά) όταν $\dot{x} > 0$ (< 0).

$\dot{x}$ = Ταχύτητα
διανυσματικό πεδίο
ροή

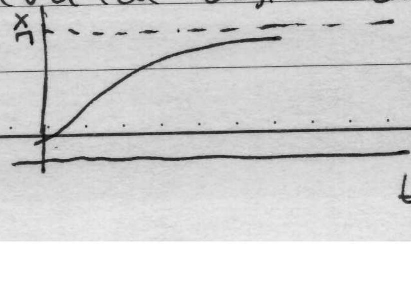
Όταν $\dot{x} = 0$, δεν υπάρχει ροή. Σημεία x με
$\dot{x} = 0$
ονομάζονται σημεία ισορροπίας της ροής: Δύο ειδών

× : ευσταθή σ.ι. ή ελκυστές

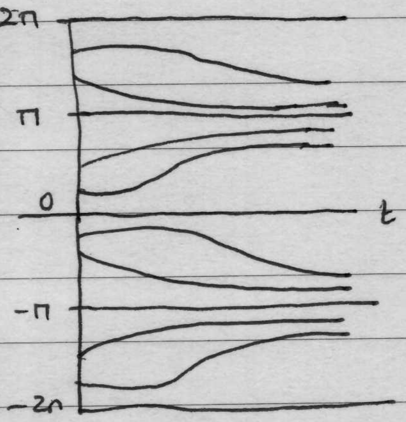
● : ασταθή σ.ι.

* Το πρόβλημα μελέτης της συμπεριφοράς των λύσεων της $\dot{x} = \sin x$ γίνεται αυτό της ανάλυσης της κίνησης του σημείου x_0 καθώς αυτό μεταφέρεται με την ροή:

– Ξεκινώντας από τη θέση $x_0 = \pi/4$, αρχικά πιο γρήγορα και μετά την $x = \pi/2$ πιο αργά, κινείται δεξιά και προσεγγίζει το ευσταθές σ.ι. $x = \pi$ από τα αριστερά.



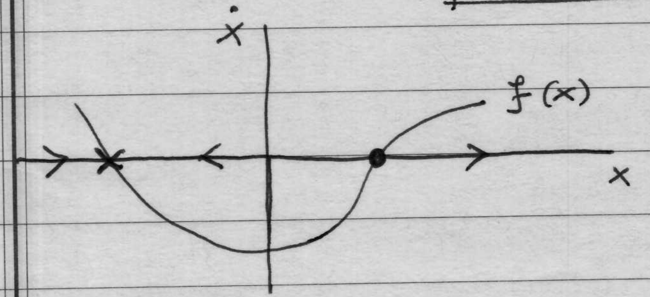
- Για τυχούσα θέση x, αν $\dot{x}>0$ αρχικά, τότε το σημείο κινείται προς τα δεξιά (αριστερά) και προσεγγίζει το πλησιέστερο ευσταθές σ.ι. Αν $\dot{x}=0$ το x παραμένει στη θέση του για κάθε χρόνο.



Αυτά είναι ποιοτικά χαρακτηριστικά της κίνησης. Ποσοτικά χαρακτηριστικά όπως π.χ. πότε η ταχύτητα $|\dot{x}|$ είναι μέγιστη, δεν προκύπτουν από αυτή την επιχειρηματολογία.

Αντίστοιχα μελετούμε την γενική περίπτωση

$$\boxed{\dot{x} = f(x)}$$



Κίνηση προς τα δεξιά (αριστερά) αν $\dot{x}>0$ (<0). Το φασικό σημείο μεταφέρεται με την ροή κατά μήκος του x-άξονα, μέσω της συνάρτησης $x(t)$.

- Πορτρέτο φάσεων: το σύνολο όλων των τροχιών, βέλη, σ.ι. στον χώρο φάσεων.

- Σημείο ισορροπίας x^*:

$$\boxed{f(x^*) = 0}$$

- Ευστάθεια : Μικρές διαταραχές αποσβένουν με τον χρόνο. (Γραμμική ευστάθεια)

- Ευσταθές (ασταθές) σ.ι.

Μέθοδος γραμμικής ευστάθειας ενός σ.ι. x^*

$$\dot{x} = f(x) \ , \ x \in \mathbb{R}.$$

- x^* : σ.ι. ($: f(x^*) = 0$)
- $\eta(t)$: μικρή διαταραχή (ή διακύμανση) του x^*:

$$\boxed{\eta(t) = x(t) - x^*} \iff x = x^* + \eta .$$

- Παραγωγίζοντας

$$\dot{\eta} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + \eta)$$

- Taylor την f:

$$f(x^*+\eta) = f(x^*) + \eta f'(x^*) + O(\eta^2)$$

- Επειδή $f(x^*) = 0$, έπεται αγνοώντας όρους $\propto \eta^2$,

$$\boxed{\dot{\eta} \cong \eta f'(x^*)}$$ ← γραμμική 1ης τάξης για το η.

γραμμικοποίηση γύρω από το x^*

- Η διαταραχή: $\eta(t)$
  - αυξάνει εκθετικά αν $f'(x^*) > 0$
  - αποσβένει αν $f'(x^*) < 0$

- <u>Παρατήρηση</u> : Αν $f'(x^*) = 0$, τότε απαιτείται ανάλυση <u>μη-γραμμικής ευστάθειας</u>: Μέσω θεωρίας διακλαδώσεων.
- <u>Συμπέρασμα</u>: <u>Βασικό αντικείμενο ευστάθειας: $f'(x^*)$</u>

$$\text{Πρόσ}(f'(x^*)) \longleftrightarrow \text{ευστάθεια}$$

$$|f'(x^*)| \longleftrightarrow$$ <u>Πόσο</u> ευσταθές είναι το σ.ι.

$$\frac{1}{|f'(x^*)|}$$: <u>χαρακτηριστική χρονική κλίμακα</u> μεταβολής του $x(t)$ στη γειτονιά του x^*.

Έχουμε υποθέσει σιωπηρά:

- ύπαρξη λύσεων τοπικά
- Μοναδικότητα λύσεων
- ύπαρξη λύσεων καθολικά

Εντούτοις, υπάρχουν δυναμικά συστήματα τα οποία δεν ικανοποιούν κάποιες από αυτές τις τρεις συνθήκες. Γενικά αυτές ισχύουν μόνο κάτω από 'αρκετή' παραγωγισιμότητα του πεδίου $f(x)$.

- Το δ.π.

$$\dot{x} = x^{1/3}$$

παρουσιάζει έλλειψη μοναδικότητας. (Φροντ)

- Το δ.π.

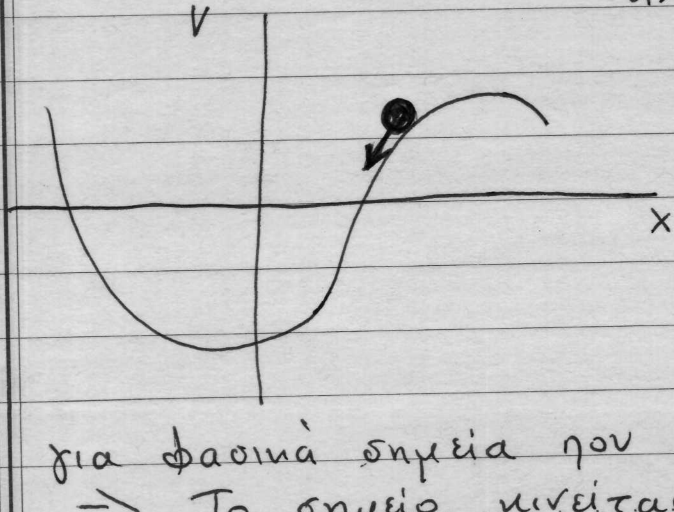
$$\dot{x} = x^2$$

αποκλίνει στο ∞ σε πεπερασμένο χρόνο. (Φροντ)

Εναλλακτική περιγραφή της δυναμικής

- Χρήση του δυναμικού $V = V(x)$:

Αν $f(x) = -\dfrac{dV}{dx}$, τότε $\dot{x} = -\dfrac{dV}{dx}$.



Άρα

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0.}$$

Δηλ. το $V(x)$ μειώνεται για φασικά σημεία που βρίσκονται πάνω σε τροχιές.

$\Rightarrow$ Το σημείο κινείται πάντοτε προς περιοχές μικρότερου δυναμικού.

- Σε σ.ι. : $\frac{dV}{dx} = 0$ και άρα $V(x) =$ σταθ.

- Τοπικά ελάχιστα του $V \longleftrightarrow$ ευσταθή σ.ι.
- — " — μέγιστα $\longrightarrow$ $\longleftrightarrow$ ασταθή σ.ι.

<u>Πρακτικός σχεδιασμός πορτρέτων φάσεων</u>

- Μέσω μιας εφαρμογής π.χ., <u>Phaser</u>
- Σχεδιασμός πεδίου κλίσεων : $\forall\,(t, x)$ η

$$\dot{x} = f(x)$$

δίνει την κλίση dx/dt της λύσης που διέρχεται από το εν λόγω σημείο. Σχεδιάζουμε μικρά ευθ. τμήματα

- Σχεδιάζουμε καμπύλες <u>πάντοτε</u> εφαπτόμενες στην τοπική κλίση

~ • ~