ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σημειώσεις – Διδιάστατα γραμμικά συστήματα (Μέρος Γ)

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η μη-ομογενής εξίσωση $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}$:
Γραμμικά συστήματα με εξαναγκασμό

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}$$

(περιλαμβάνεται και η $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f$
ως παράδειγμα.)

6. Γραμμικά συστήματα με εξαναγκασμό.

Τό σύστημα

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1 \qquad (1)$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2$$

ονομάζεται το πλήρες σύστημα (ή μη-ομογενές) σε αντίθεση μέ το ομογενές σύστημα όπου $f_i = 0$. Θέτοντας

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

το (1) γράφεται,

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{f}} \qquad (2)$$

ενώ το ομογενές είναι το

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}. \qquad (3)$$

Υποθέτουμε ότι $f: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής ~~(και ότι πούμε ισχύουν για ένα οποιοδήποτε διάστημα $I \subset (-\infty, \infty)$ στο οποίο η f είναι συνεχής)~~. Η μελέτη του (2) θα γίνει με την εισαγωγή του λεγόμενου συμβολισμού πίνακα-διανύσματος ο οποίος μας επιτρέπει να μελετήσουμε το (2) με την ίδια ευκολία που μελετούμε την βαθμωτή εξίσωση,

$$\dot{x} = ax + f: \qquad (4)$$

Απλ., εδώ έχουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{-at}:

$$e^{-at}\left(\dot{x}(t) - ax(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-at}x(t)\right) = e^{-at}f(t),$$

και η γενική λύση της μη ομογενούς πλήρους εξίσωσης (4) είναι,

$$x(t) = ce^{at} + e^{at}\int_0^t e^{-as} f(s)\, ds. \qquad (5)$$

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Θα ορίσουμε τον εκθετικό πίνακα e^{-At} και θα δείξουμε ότι είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας του (3). Λέμε ότι ο πίνακας A είναι μη-ιδιόμορφος αν:

$$A\underline{x} = 0 \implies \underline{x} = 0. \qquad (\det A \neq 0)$$

Η ορίζουσα του A συμβολίζεται με

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Λέμε ότι ο A έχει <u>αντίστροφο</u> αν υπάρχει πίνακας A^{-1} ε/ω:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I,$$

και ο A^{-1} ονομάζεται ο αντίστροφος του A. Ο A^{-1} είναι <u>μοναδικός</u>:
Πράγματι, έστω ότι ο A^* είναι και αυτός αντίστροφος. Τότε:

$$A^* = A^*(AA^{-1}) = (A^*A)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}.$$

Επίσης ισχύει ότι:

<u>Λήμμα</u>

Ο πίνακας A είναι μη-ιδιόμορφος αν και μόνο αν έχει αντίστροφο.

<u>Απόδειξη</u>

($\Leftarrow$) Έστω ότι ο A έχει αντίστροφο. Τότε

$$A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow A^{-1}(A\underline{x}) = \underline{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A^{-1}A)\underline{x} = I\underline{x} = x = 0.$$

($\Rightarrow$) Ο A είναι μη-ιδιόμορφος αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$ (*). Άρα αν ο A είναι μη-ιδιόμορφος, τότε δοθέντος $\underline{y}$ το σύστημα

$$\underline{y} = A\underline{x},$$

έχει μοναδική λύση:

$$\underline{x} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \underset{\sim}{y} = B\underset{\sim}{y}.$$

Σε η διαστάσεις:

$$\left[B = \text{trans}\left(\frac{(-1)^{i+j}\det(A_{ij})}{\det(A)} \right) \right]$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$AB = BA = I,$$

δηλ., $B = A^{-1}$. ☒

(*) Από την λύση γραμμικών συστημάτων.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ

Έστω η συνάρτηση $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε να είναι $X = (x_{ij})$ <u>με τιμές πίνακες</u>, που ορίζεται από τη σχέση:

$$X(t) = \left(x_{ij}(t)\right) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Φανταζόμαστε την X σαν ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^4$ δηλ., ένα 4-διάνυσμα. Οι έννοιες και πράξεις για συναρτήσεις-πίνακες είναι οι ίδιες με εκείνες των διανυσματικών συναρτήσεων:

1) X συνεχής στο $I \subset \mathbb{R}$ αν κάθε x_{ij} είναι συνεχής στο I

2) $\dot{X}(t) = \left(\dot{x}_{ij}(t)\right)$. ← (*)

3) $\displaystyle\int_a^b X(t)\,dt = \left(\int_a^b x_{ij}(t)\,dt\right)$.

4) $\dfrac{d}{dt}(XY) = \dot{X}Y + X\dot{Y}$.

5) $\dfrac{d}{dt}(X\underline{v}) = \dot{X}\underline{v} + X\dot{\underline{v}}$.

<u>Υπόδειξη:</u>

Οι (4), (5) αποδεικνύονται δείχνοντας ότι τα δύο μέλη κάθε ισότητας δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. ☒

Έστω τώρα η διαφορική εξίσωση πινάκων: $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

$$\boxed{\dot{X} = AX,} \qquad (7)$$

όπου A είναι ένας σταθερός πίνακας. Επειδή

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

έπεται ότι η (7) γράφεται <u>ισοδύναμα</u> ως:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{21} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{22} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Δηλ. ο πίνακας X είναι λύση της (7) αν και μόνο αν τα διανύσματα-στήλες της X είναι λύσεις της διανυσματικής

$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$

διαφορικής εξίσωσης

$$\boxed{\underline{\dot{x}} = A\,\underline{x}} \qquad (10)$$

Αυτός ακριβώς είναι ο λόγος που εισάγαμε την εξίσωση πινάκων: Είναι μια βολική γλώσσα για να μιλάμε για <u>δύο</u> λύσεις της (10) (ή (n) λύσεις n γραμμικών Δ.Ε. στην n-διάστατη περίπτωση). Οι λύσεις που μας ενδιαφέρουν είναι εκείνες οι λύσεις της (10) που ικανοποιούν τις Αρχικές Συνθήκες:

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Τέτοιες λύσεις $\underline{x}(t)$ της (10) ονομάζονται <u>πρωταρχικές λύσεις</u> της (10)* (Βλ. άσκηση). Η <u>πρωταρχική λύση-πίνακας</u> της (7) είναι η $P(t)$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$P(0) = I,$$

έτσι ώστε οι στήλες της $P(t)$ να είναι οι πρωταρχικές λύσεις της (10). Δηλαδή υπάρχει η αντιστοιχία:

$$\begin{pmatrix} \text{Λύσεις} \\ \text{της} \\ (7) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{Ζεύγη λύσεων} \\ \text{της } (10) \end{pmatrix},$$

και έτσι: <u>δοθέντος ενός σταθερού πίνακα X_0 υπάρχει μοναδική λύση $X(t)$ της (7) που ικανοποιεί: $X(0) = X_0$</u> (από το θεώρημα <u>ύπαρξης-μονοσημάντου της (10)!</u>).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα ύπαρξης-μονοσημάντου για την (7) θα δείξουμε ότι η πρωταρχική λύση-πίνακας έχει τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης.

Κατ' αρχήν, εξ' ορισμού έχουμε:

$$\dot{P}(t) = A\,P(t), \qquad (11)$$

και

$$P(0) = I. \qquad (12)$$

Η πρωταρχική λύση-πίνακας $P(t)$ ικανοποιεί <u>τον νόμο των εκθετών</u>:

Δηλ., δύο λύσεις $\underset{\sim}{x}^1, \underset{\sim}{x}^2$ της $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ ονομάζονται <u>πρωταρχικές λύσεις</u> της $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ αν ικανοποιούν:

$$\underset{\sim}{x}^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{x}^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε έχουμε:

<u>Πρόταση</u>

Η γενική λύση της $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ γράφεται:

$$\underset{\sim}{x} = c_1 \underset{\sim}{x}^1 + c_2 \underset{\sim}{x}^2,$$

όπου $\underset{\sim}{x}^1, \underset{\sim}{x}^2$ είναι δύο πρωταρχικές λύσεις.

<u>Απόδειξη</u>

Από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για τις λύσεις της $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ έπεται ότι οι $\underset{\sim}{x}^1(t), \underset{\sim}{x}^2(t)$ υπάρχουν για κάθε t και είναι οι μοναδικές λύσεις οι οποίες ικανοποιούν τις δοθείσες αρχικές συνθήκες.

Θέλουμε κατ' αρχάς να δείξουμε ότι οι λύσεις

$$\underset{\sim}{x}^1(t) \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{x}^2(t)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, δηλ., αν

$$c_1 \underset{\sim}{x}^1(t) + c_2 \underset{\sim}{x}^2(t) = \underset{\sim}{0}, \qquad (10a)$$

τότε $c_1 = c_2 = 0$. Για $t=0$, η (10a) μας λέει ότι

$$c_1 \underset{\sim}{x}^1(0) + c_2 \underset{\sim}{x}^2(0) = \underset{\sim}{0},$$

ή

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{0},$$

και άρα

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Απομένει να δείξουμε ότι κάθε λύση της (10) γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\underset{\sim}{x}^1(t), \underset{\sim}{x}^2(t)$.

Αν θεωρήσουμε ένα τυχόν δισδιάστατο διάνυσμα $\underset{\sim}{\psi}(t)$, <u>λύση της (10)</u>, και θέσουμε την τιμή του $\underset{\sim}{\psi}(0) = \underset{\sim}{c}$, όπου

$$\underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

τότε μπορούμε με αυτές τις σταθερές c_1, c_2 να κατασκευάσουμε την συνάρτηση

$$\underset{\sim}{\phi}(t) = c_1 \underset{\sim}{x}^1(t) + c_2 \underset{\sim}{x}^2(t).$$

Αυτή θα είναι λύση του (10), ως γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων $\underset{\sim}{x}^1(t)$ και $\underset{\sim}{x}^2(t)$. Επιπλέον,

$$\underset{\sim}{\phi}(0) = c_1 \underset{\sim}{x}^1(0) + c_2 \underset{\sim}{x}^2(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{\psi}(0).$$

Τότε από το Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας έπεται ότι επειδή οι $\psi(t)$ και $\phi(t)$ είναι δύο λύσεις της (10) που έχουν την ίδια αρχική τιμή,

$$\underset{\sim}{\phi}(0) = \underset{\sim}{\psi}(0),$$

θα πρέπει να ταυτίζονται, δηλ.,

$$\underset{\sim}{\psi}(t) \equiv \underset{\sim}{\phi}(t) = c_1 \underset{\sim}{x}^1(t) + c_2 \underset{\sim}{x}^2(t).$$

ο.ε.δ. $\boxtimes$

Γιατί λοιπόν θέλουμε να ομιλούμε για δύο λύσεις της ΔΕ $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ αντί για μία (την γενική λύση); Η απάντηση είναι ότι λόγω της παραπάνω πρότασης αν έχουμε δύο πρωταρχικές λύσεις της $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε κάθε άλλη λύση της επιλέγοντας κατάλληλες τιμές για τις δύο σταθερές c_1, c_2 στον γραμμικό συνδυασμό

$$\underset{\sim}{x}(t) = c_1 \underset{\sim}{x}^1(t) + c_2 \underset{\sim}{x}^2(t).$$

Δεν θα ομιλούμε για δύο οποιεσδήποτε λύσεις της $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$, αλλά πάντοτε για δύο πρωταρχικές λύσεις αυτής, το οποίο όπως είδαμε είναι με την σειρά του ισοδύναμο με την γενική λύση της $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$.

Θεώρημα (Νόμος εκθετών.)

Για κάθε $t, \tau \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$P(t)\,P(\tau) = P(t+\tau). \qquad (13)$$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση πίνακας Y που ορίζεται από την σχέση

$$Y(t) = P(t+\tau) \quad , \ \tau \in \mathbb{R}.$$

Τότε η παράγωγος της $Y(t)$ ικανοποιεί:

$$\dot{Y}(t) = \frac{d}{dt}\left(P(t+\tau)\right) = \dot{P}(t+\tau) = A\left(P(t+\tau)\right) = A\,Y(t),$$

δηλ, η $Y(t)$ είναι η λύση της (7) που ικανοποιεί την Α.Σ. $Y(0) = P(\tau)$. Έστω επιπλέον η συνάρτηση-πίνακας $Z(t)$:

$$Z(t) = P(t)\,P(\tau).$$

Τότε η παράγωγος της $Z(t)$ ικανοποιεί:

$$\dot{Z}(t) = \left(P(t)\,P(\tau)\right)^{\cdot} = \dot{P}(t)\,P(\tau) = A\,P(t)\,P(\tau) = A\,Z(t),$$

και επιπλέον,

$$Z(0) = P(0)\,P(\tau) = I\ P(\tau) = P(\tau).$$

Άρα από το θεώρημα ύπαρξης-μονοσημάντου της (7) έπεται ότι

$$Y(t) = Z(t),$$

δηλ.,

$$P(t)P(\tau) = P(t+\tau). \quad \boxtimes$$

Από τις (11)–(13) έπεται ότι μπορούμε να γράψουμε:

$$\boxed{P(t) = e^{At}} \quad : \quad \text{εκθετικός πίνακας},$$

και η (13) γράφεται

$$e^{At}\,e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}.$$

Τότε έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση

Ο πρωταρχικός πίνακας-λύση $P(t) = e^{At}$ είναι μη-ιδιόμορφος για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έχουμε:

1ο Παράδειγμα

Εύρεση πρωταρχικού πίνακα

$$e^{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda_1 x\\ \dot{y} &= \lambda_2 y\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$A = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \Rightarrow$ γενική λύση, $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ $\quad y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$

$c_1 = 1, \; c_2 = 0$

$x_1(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0, \quad x_2(0) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow c_1' = 0, c_2' = 1$

$\Rightarrow \underset{\sim}{x}^1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}\\ 0\end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{x}^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$

Άρα: **1ο** βρίσκω την γενική λύση του $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$

2ο Θέτω $\underset{\sim}{x}^1(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{x}^2(0) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ και βρίσκω τις σταθερές στις πρωταρχικές λύσεις

3ο Αντικαθιστώ στην γενική λύση και βρίσκω την μορφή των δύο πρωταρχικών λύσεων $\underset{\sim}{x}^1(t)$, $\underset{\sim}{x}^2(t)$, ως διανύσματα.

4ο Γράφω $P(t) = \begin{pmatrix}\underset{\sim}{x}^1(t) & \underset{\sim}{x}^2(t)\end{pmatrix}$

2ο παράδειγμα

$$\begin{vmatrix}\lambda-\mu & 0\\ 1 & \lambda-\mu\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-\mu)^2 = 0$$

$\mu = \lambda$

$$e^{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}t} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}.$$

Σύστημα: $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x\\ \dot{y} &= x + \lambda y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= c_1 e^{\lambda t}\\ \dot{y} &= c_1 e^{\lambda t} + \lambda y\end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$$\dot{y} - \lambda y = c_1 e^{\lambda t}$$

$$p = -\lambda$$

$$P = \int p = -\lambda t \rightarrow \text{o.п.}; \quad e^{P(t)} = e^{-\lambda t}$$

$$\left(e^{-\lambda t} y(t)\right)^{\cdot} = e^{-\lambda t} c_1 e^{\lambda t} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} y(t) - y(0) = c_1 t$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\lambda t} y(0) + e^{\lambda t} c_1 t$$

$$y(t) = (c_2 + c_1 t) e^{\lambda t}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1 e^{\lambda t} \\ y &= (c_2 + c_1 t) e^{\lambda t} \end{aligned}\right\}$$

2°

$$\underset{\sim}{x}^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \cancel{c_1 = 1} \quad \cancel{c_2 = 1}, \cancel{c_1 = 1}$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$$

$$\underset{\sim}{x}^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

3°

$$\underset{\sim}{x}^1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ t e^{\lambda t} \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{x}^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

4°

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ t e^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At}e^{-At} = P(t)\,P(-t) = P(t+(-t)) = P(-t+t) =$$
$$= P(-t)\,P(t) = e^{-At}\,e^{At} = P(0) = I,$$

δηλ., ο e^{-At} είναι ο αντίστροφος του e^{At}, και άρα από το Λήμμα έπεται το αποτέλεσμα. ⊠

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1°, 2°

– Θέτουμε $P^{-1}(t) = e^{-At}$.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΕ

Τώρα είναι εύκολο να λύσουμε την (2): Κατ' αρχάς, χρειαζόμαστε την παράγωγο:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\right) = \frac{d}{dt}P(-t) = -\dot{P}(-t) = -AP(-t) = -Ae^{-At},$$

και έτσι μαντεύουμε ότι, κατ' αναλογία με την 1-διάστατη περίπτωση, ο e^{-At} είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της (2). Χρειαζόμαστε επιπλέον το ακόλουθο.

Λήμμα

Οι πίνακες A και e^{-At} αντιμετατίθενται δηλ.,

$$Ae^{-At} = e^{-At}A.$$

Απόδειξη.

Θέτουμε,

$$Y(t) = Ae^{-At}, \quad Z(t) = e^{-At}A.$$

Τότε

$$\dot{Y}(t) = -A^2e^{-At} = -AY(t),$$

και

$$\dot{Z}(t) = -Ae^{-At}A = -AZ(t).$$

Αφού $Y(0) = Z(0) = A$, έπεται πάλι από το επιχείρημα μοναδικότητας ότι $Y = Z$ δηλ. $Ae^{-At} = e^{-At}A$. ⊠

Ας έρθουμε τώρα στην επίλυση μέσω του ολοκλ. παράγοντα. Πράγματι, ο e^{-At} είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της (2):

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\underline{x}(t)\right) = e^{-At}\dot{\underline{x}}(t) - \underbrace{Ae^{-At}}\underline{x}(t) \overset{\text{Λήμμα}}{=} e^{-At}\dot{\underline{x}}(t) - \underbrace{e^{-At}A}\underline{x}(t) =$$
$$= e^{-At}\left(\dot{\underline{x}}(t) - A\underline{x}(t)\right),$$

και άρα αν $\underline{x}(t)$ είναι μία λύση της (2) που ικανοποιεί $\underline{x}(0) = \underline{c}$, τότε πολ/ζοντας όπως και στην 1-διάστατη περίπτωση, βρίσκουμε:

$$e^{-At}\left(\dot{\underline{x}}(t) - A\underline{x}(t)\right) = e^{-At}\underline{f}(t),$$

ή,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\underline{x}(t)\right) = e^{-At}\underline{f}(t).$$

Άρα έχουμε, ολοκληρώνοντας κατά t μέλη από 0 έως t:

$$e^{-At}\underline{x}(t) - \underline{x}(0) = \int_0^t e^{-As}\underline{f}(s)\,ds,$$

και θέτοντας $\underline{x}(0)=\underline{c}$,

$$\boxed{\underline{x}(t) = e^{At}\underline{c} + \int_0^t e^{A(t-s)}\underline{f}(s)\,ds.} \qquad (14)$$

Αντιστρόφως, η (14) είναι λύση της (2) με αρχική συνθήκη $\underline{x}(0)=\underline{c}$, και άρα η (14) είναι η γενική λύση της (2).

Ο όρος:

$$e^{At}\underline{c}, \qquad (15)$$

είναι η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}, \qquad (16)$$

και ο όρος

$$e^{At}\int e^{-As}\underline{f}(s)\,ds, \qquad (17)$$

είναι μιά ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (2) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\underline{x}(0)=\underline{0}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(1)

Έστω ο αρμονικός ταλαντωτής με περιοδική δύναμη εξαναγκασμού, χωρίς απόσβεση:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{\sin\omega t}_{f(t)}, \quad \omega_0 \neq 0,\ \omega \neq 0. \qquad (18)$$

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στον ελεύθερο $(f(t)=0)$ ταλαντωτή, η φυσική συχνότητα ω_0 (ή κυκλική συχνότητα $(\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T})$) είναι η συχνότητα της ταλάντωσης. Όταν όμως υπάρχει δύναμη εξαναγκασμού (όπως εδώ), η απόκριση του σώματος στην f εξαρτάται από την σχέση μεταξύ της φυσικής συχνότητας ω_0 και της συχνότητας ω της εξωτερικής δυνάμεως (εξωτερική συχνότητα). Η περίπτωση όπου

$$\omega = \omega_0 ,$$

ονομάζεται συντονισμός. Θα δείξουμε ότι καθώς $\omega \to \omega_0$, το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται άπειρο. (Για πραγματικούς ταλαντωτές με απόσβεση, το πλάτος γίνεται πολύ μεγάλο όταν $\omega=\omega_0$ αλλά πεπερασμένο, και αυτή η κατάσταση μεγίστου πλάτους λέγεται συντονισμός.) Η φυσική ερμηνεία του άπειρου πλάτους είναι ότι η εξωτερική δύναμη δίνει συνεχώς ενέργεια στο σύστημα χωρίς καθόλου από αυτήν να χάνεται. ⊠

Ενα ισοδύναμο σύστημα του (18) είναι το

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x + \sin\omega t \end{aligned}\right\}, \quad (19)$$

Εδώ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\omega t \end{pmatrix}.$$

Οι πρωταρχικές λύσεις του ομογενούς συστήματος είναι ((βλ. (6.45)):

$$\underline{x}^1 = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t \\ -\omega_0 \sin\omega_0 t \end{pmatrix}, \quad \underline{x}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ \cos\omega_0 t \end{pmatrix},$$

και άρα η πρωταρχική λύση-πίνακας είναι:

$$P(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t & \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ -\omega_0 \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t \end{pmatrix}.$$

Άρα χρησιμοποιώντας την (14) βρίσκουμε:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t & \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ -\omega_0 \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} \cos\omega_0(t-s) & \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0(t-s) \\ -\omega_0 \sin\omega_0(t-s) & \cos\omega_0(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\omega s \end{pmatrix} ds$$

Εδώ ενδιαφερόμαστε μόνο για την λύση του x, και άρα:

$$x(t) = c_1 \cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} c_2 \sin\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \sin\omega_0(t-s)\sin\omega s \, ds. \quad (19)$$

Άρα όταν $\omega \neq \omega_0$,

$$x(t) = c_1 \cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} c_2 \sin\omega_0 t - \frac{\omega}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)} \sin\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t \quad (20) \; (*)$$

$$= k_1 \cos\omega_0 t + k_2 \sin\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t.$$

Αν $\omega = \omega_0$ (συντονισμός),

$$x(t) = K_1 \cos\omega_0 t + K_2 \sin\omega_0 t - \frac{1}{2\omega_0} t \cos\omega_0 t \quad (21) \; (**)$$

Από την (20) έπεται ότι ο τελευταίος όρος τείνει στο άπειρο καθώς $\omega \to \omega_0$ και άρα $x(t) \to \infty$, ενώ οι ταλαντώσεις είναι φραγμένες για όλα τα t και ω. Στον συντονισμό ($\omega=\omega_0$) το $\lim_{t\to\infty} x(t)$ δεν υπάρχει. ⊠

<u>Σχόλιο</u>. Η θεωρία των <u>ταλαντωτών</u> είναι μια πολύ ευρεία περιοχή έρευνας. Το παράδειγμα του ταλαντωτή με απόσβεση και εξαναγκασμό που μελετούμε στην επόμενη παράγραφο

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f \quad (22)$$

b, c : σταθ., $f = f(t)$, αποτελεί την απλούστερη περίπτωση του προβλήματος

$$\ddot{x} + g(\dot{x}, x) = f(t). \quad (23)$$

που ονομάζεται ο <u>μη-γραμμικός ταλαντωτής ενός βαθμού ελευθερίας</u>.
Παραδείγματα αυτού αποτελούν:

1. <u>Ο ταλαντωτής του Van der Pol</u>:

$$\ddot{x} + \alpha\phi(x)\dot{x} + x = \beta p(t) \qquad (24)$$

Τέτοιοι ταλαντωτές μοντελοποιούν φαινόμενα όπως:

α) Ηλεκτρικά κυκλώματα με τριοδική βαλβίδα
β) Ταλαντώσεις σε κτίρια λόγω του ανέμου απο στρόβιλους
γ) Αεροδυναμικές δονήσεις
δ) Ευστάθεια ερπυστριοφόρων ή μη οχημάτων

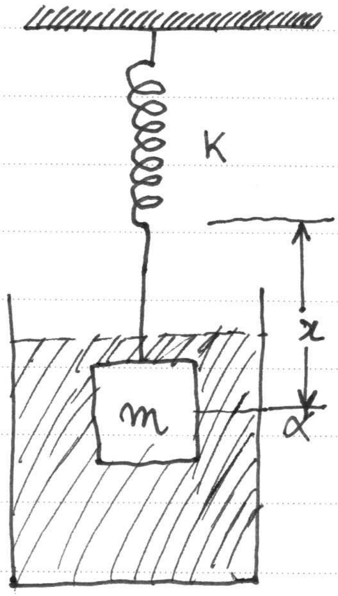
κ.λ.π.

2. <u>Ο ταλαντωτής του Duffing</u>

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = \gamma\cos\omega t$$

που μοντελοποιεί φαινόμενα σκλήρυνσης ελατηρίων, αρθρωτών γεφυρών κλπ.

Βεβαίως το τυπικό παράδειγμα <u>γραμμικού</u> ταλαντωτή με απόσβεση και εξαναγκασμό είναι μια μάζα m προσαρτημένη σε ένα <u>ελαστικό</u> ελατήριο με <u>απόσβεση</u> λόγω ύπαρξης <u>ιξώδους τριβής</u> (βλ. σχήμα)



$$\boxed{\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f}$$

<u>ιξώδης απόσβεση</u> | <u>ελαστικότητα</u> | <u>δύναμη εξαναγκασμού</u>

ΘΕΜΑ
SUBJECT

ΗΜ/ΝΙΑ
DATE

(*)

$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

και άρα:

$$\int \sin \omega_0(t-s) \sin \omega s = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t - \omega_0 s - \omega s) - \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t - \omega_0 s + \omega s)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \cos[\omega_0 t - (\omega_0+\omega)s] - \int \cos[\omega_0 t + (\omega-\omega_0)s]\right)$$

~~και άρα~~ Επειδή

$$\frac{1}{2}\int \cos[-(\omega_0+\omega)s + \omega_0 t]\, ds = \frac{1}{-2(\omega_0+\omega)} \sin\left(-(\omega_0+\omega)s + \omega_0 t\right)\Big|_0^t$$

$$= -\frac{1}{2(\omega_0+\omega)}\left(\sin(-\omega t) - \sin\omega_0 t\right) = \boxed{\frac{\sin\omega t + \sin\omega_0 t}{2(\omega_0+\omega)}}$$

ενώ,

$$\frac{1}{2}\int \cos(\omega_0 t + (\omega-\omega_0)s)\, ds = \frac{1}{2(\omega-\omega_0)} \sin\left((\omega-\omega_0)s + \omega_0 t\right)\Big|_0^t$$

$$= \boxed{\frac{1}{2(\omega-\omega_0)}\left(\sin\omega t - \sin\omega_0 t\right)},$$

έχουμε:

$$\cancel{\int_0^t \sin \omega_0(t-s) \sin \omega s\, ds = \frac{1}{2(\omega+\omega_0)}}$$

$$\int_0^t \sin\omega_0(t-s)\sin\omega s\,ds =$$

$$= \frac{1}{2(\omega+\omega_0)}(\sin\omega t + \sin\omega_0 t) - \frac{1}{2(\omega-\omega_0)}(\sin\omega t - \sin\omega_0 t)$$

$$= \frac{\omega-\omega_0}{2(\omega^2-\omega_0^2)}(\sin\omega t + \sin\omega_0 t) - \frac{\omega+\omega_0}{2(\omega^2-\omega_0^2)}(\sin\omega t - \sin\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{2(\omega^2-\omega_0^2)}\left[\begin{array}{l}\omega\,\cancel{\sin\omega t} + \omega\sin\omega_0 t - \omega_0\sin\omega t - \omega_0\cancel{\sin\omega_0 t} \\ -\,\omega\,\cancel{\sin\omega t} + \omega\sin\omega_0 t - \omega_0\sin\omega t + \omega_0\cancel{\sin\omega_0 t}\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\omega\sin\omega_0 t - \omega_0\sin\omega t\right)$$

$$= \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\omega_0\sin\omega t - \omega\sin\omega_0 t\right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{\omega_0}\int_0^t \sin\omega_0(t-s)\sin\omega s\,ds = \frac{1}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)}\left(\omega_0\sin\omega t - \omega\sin\omega_0 t\right)$$

$$= \frac{\sin\omega t}{\omega_0^2-\omega^2} - \frac{\omega\sin\omega_0 t}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)}.$$

$$\int \sin\omega_0(t-s)\sin\omega_0 s\,ds = \int \frac{1}{2}\cos\left(\omega_0(t-s)-\omega_0 s\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\omega_0(t-s)+\omega_0 s\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int\cos(\omega_0 t - 2\omega_0 s) - \frac{1}{2}\int \cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\int_0^t \cos\omega_0(t-2s) - \frac{1}{2}t\cos\omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-2\omega_0}\sin\omega_0(t-2s)\Big|_0^t\right) \qquad -\frac{1}{2}t\cos\omega_0 t$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4\omega_0}\left(\sin(-\omega_0 t) - \sin(-\omega_0 t)\right)}_{=0} - \frac{1}{2\omega_0}\left(\sin\omega_0 t\right) - \frac{1}{2}t\cos\omega_0 t$$

Ασκ I: $0 = \frac{d}{dt}(I) = \frac{d}{dt}(x^{-1}x) = \frac{d}{dt}(x^{-1})x + x^{-1}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(x^{-1}) = -x^{-1}\frac{dx}{dt}x^{-1}$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-2\omega_0)}\left[\sin\omega_0(-t) - \sin\omega_0 t\right] - \frac{1}{2}t\cos\omega_0 t$$

$$= -\frac{1}{4\omega_0}\left(-\sin\omega_0 t - \sin\omega_0 t\right) - \frac{1}{2}t\cos\omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{1}{2}t\cos\omega_0 t.$$

$\Rightarrow$ Πολλαπλασιάζω με $+\frac{1}{\omega_0}$ για το τελικό αποτέλεσμα.

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

1. Αποδείξτε ότι

$$\frac{d}{dt}X^{-1} = -X^{-1}\left(\frac{dX}{dt}\right)X^{-1}.$$

2. Αποδείξτε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

τότε ο e^{At} είναι αντίστοιχα:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \dfrac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

3. Λύσατε:

a. $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - 2y + e^{t} \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = y(0) = 0,$

b. $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x + t e^{-t} \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

4. Αποδείξτε ότι:

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n .$$