ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σημειώσεις – Διδιάστατα γραμμικά συστήματα (Μέρος Β)

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

1. Βρείτε την λύση του δυναμικού συστήματος

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -2x - 3y$$

έτσι ώστε να ισχύει $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

2. Λύσατε :

a) $\dot{x}_1 = -3x_1$, $\dot{x}_2 = 2x_2$, b) $\dot{x}_1 = -2x_1$, $\dot{x}_2 = x_1 - x_2$ c) $\dot{x}_1 = -2x_1$, $\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2$

d) $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x\\ \dot{y} &= x - y\end{aligned}\right\} x(\sqrt{2}) = 5,\ y(\sqrt{2}) = -7$

e) $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + a_{12} x_2$, $\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$, f) $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1$, $\dot{x}_2 = a_{21} x_1 + \lambda_2 x_2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

3. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των εξής πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 13 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Η πιθανότητα $p_n(t)$ ώστε ακριβώς n πυρηνικά σωμάτια να "χτυπήσουν" έναν μετρητή στο χρονικό διάστημα $(0, t)$ δίνεται από:

$$p_0(t) = 1 - a \int_0^t p_0(\tau)\, d\tau$$

$$p_1(t) = -a \int_0^t \left[p_1(\tau) - p_0(\tau)\right] d\tau$$

$$\vdots$$

$$p_n(t) = -a \int_0^t \left[p_n(\tau) - p_{n-1}(\tau)\right] d\tau$$

όπου a : σταθερά. Βρείτε τον τύπο που δίνει το $p_n(t)$ και αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1 \quad , \text{ γιά κάθε } t.$$

Σπύρος Κωτσάκης

2^{ης} τάξης γραμμικές ΔΕ με σταθερούς συντελεστές : Ο ταλαντωτής με απόσβεση

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

Ο Ταλαντωτής με απόσβεση

Ένα επιπλέον παράδειγμα διδιάστατου γραμμικού συστήματος προκύπτει από την γραμμική, δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f \qquad (31)$$

όπου b, c δοθείσες σταθερές και $f(t)$ δοθείσα συνάρτηση. Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε την περίπτωση $f=0$ δηλ., μόνο την ομογενή εξίσωση,

$$\boxed{\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0} \qquad (32)$$

Θέτοντας $\dot{x} = y$, παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -cx - by . \end{aligned} \qquad (33)$$

Το (33) είναι ισοδύναμο με την (32) υπό την έννοια ότι αν $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ είναι μία λύση του (33), τότε η x είναι μία λύση του (32) και αντιστρόφως, δηλ., υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των λύσεων των εξισώσεων (32) και (33).

Κατά τα γνωστά, λύνουμε το γραμμικό σύστημα (33): Εδώ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix},$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -c & -b-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

με χαρακτηριστικές ρίζες

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-b + \sqrt{b^2-4c}\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-b - \sqrt{b^2-4c}\right),$$

και έτσι από τις (19a) και (28a) βρίσκουμε ότι η γενική λύση της (32) είναι (γράφουμε μόνο τη $x(t)$ αφού $y = \dot{x}$):

$$(a_{12}=1)$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \text{αν } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ \text{και} \quad x(t) &= (c_1 t + c_2) e^{\lambda t}, \quad \text{αν } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Όπως πρίν με $\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, αυτές είναι οι γενικές λύσεις για μιγαδικές συναρτήσεις, ενώ εμείς στο εξής ενδιαφερόμαστε για πραγματικές λύσεις (δηλ. λύσεις που εκφράζονται μέσω συναρτήσεων πραγματικών τιμών) και πραγματικά συστήματα (δηλ., $b, c \in \mathbb{R}$, όπου ο πίνακας των συντελεστών, A, είναι πραγματικός). Εξετάζουμε στο υπόλοιπο του κεφαλαίου την συμπεριφορά των πραγματικών λύσεων πραγματικών 2-διάστατων γραμμικών συστημάτων, δηλ. πραγματικές λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2, \end{aligned} \quad (35)$$

ή σε διανυσματική μορφή,

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

όπου ο πίνακας A είναι πραγματικός (δηλ. $a_{ij} \in \mathbb{R}$). Εν γένει, η λύση του (36) είναι μιγαδική και γιαυτό γράφουμε

$$\underline{x} = \underline{u} + i \underline{v}, \quad (37)$$

όπου οι $\underline{u}, \underline{v}$ είναι πραγματικές καμπύλες του επιπέδου, $\underline{u}, \underline{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Αφού ο A είναι πραγματικός, τα $A\underline{u}$ και $A\underline{v}$ είναι και αυτά πραγματικά (διανύσματα) και άρα,

$$\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{u}} + i \dot{\underline{v}} = A(\underline{u} + i \underline{v}) = A\underline{u} + i A\underline{v},$$

και εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη βρίσκουμε,

$$\dot{\underline{u}} = A \underline{u}, \quad \dot{\underline{v}} = A \underline{v}, \quad (38)$$

δηλ., τα πραγματικά και φανταστικά μέρη μιάς λύσης του (36) είναι και αυτά λύσεις της (36).

Υποθέσατε τώρα ότι για μια λύση $\underline{x} = \underline{u} + i\underline{v}$, η αρχική συνθήκη $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ είναι πραγματική. Τότε $\underline{v}(t_0) = \underline{0}$ και επειδή η $\dot{\underline{v}} = A\underline{v}$ με αρχική συνθήκη $\underline{v}(t_0) = \underline{v}_0$ έχει μοναδική λύση, έπεται ότι $\underline{v}(t) = \underline{0}$ για κάθε χρονική στιγμή t. Δηλ., δείξαμε ότι:

Λήμμα

Αν ο A είναι πραγματικός και αν μία λύση του $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ είναι πραγματική σε μία χρονική στιγμή t_0, τότε η $\underline{x}(t)$ είναι πραγματική για όλα τα t. $\boxtimes$

Θυμίζουμε ότι:

Το θεώρημα μοναδικότητας για το σύστημα $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ (A: μιγαδικός) που αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι:

Θεώρημα

Για $t_0 \in \mathbb{R}$ και $\underline{x}_0$ ένα πραγματικό διάνυσμα ($\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$) η εξίσωση $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ έχει μοναδική λύση στο $(-\infty, \infty)$ που ικανοποιεί: $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$.

Το Λήμμα και το παραπάνω θεώρημα μοναδικότητας δίνουν το θεώρημα μοναδικότητας των λύσεων της (32) που ικανοποιούν αρχικές συνθήκες.

Θεώρημα

Δοθέντων x_0, y_0, t_0, υπάρχει μία και μόνο μία λύση της ΔΕ $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = y_0$. Αν τα $b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, τότε η λύση της $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x(t_0) = x_0$ $\dot{x}(t_0) = y_0$ είναι πραγματική για κάθε t.

Έτσι, δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι η <u>γενική πραγματική λύση</u> της $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ είναι:

Αν λ_1 και λ_2 είναι <u>πραγματικές</u>, τότε

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \tag{39}$$

και

$$x(t) = (c_1 t + c_2)\, e^{\lambda t}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(εξισώνοντας πραγμ. με πραγμ. και φανταστικά με φανταστικά μέρη) $\Rightarrow \operatorname{Im} c_i = 0$.

Αν λ_1 και λ_2 είναι <u>μιγαδικές</u> τότε

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \quad \text{και}$$

$$x(t) = \operatorname{Re}\left(c_1 e^{\lambda_1 t}\right) \tag{40}$$

όπου $c_1 \in \mathbb{C}$.

Στην περίπτωση <u>μιγαδικών</u> ριζών ($\lambda_1 = \beta + i\omega$, $\lambda_2 = \beta - i\omega$), η γενική λύση εκφράζεται στην μορφή,

$$x(t) = e^{\beta t}\left(a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t\right), \tag{41}$$

ή στην μορφή,

$$x(t) = A e^{\beta t} \cos(\omega t + \delta), \tag{42}$$

όπου a_1, a_2, A και δ είναι πραγματικοί αριθμοί (<u>Άσκηση</u>). (βλ. άλλη σελίδα)

<u>Παράδειγμα</u>

Βρείτε όλες τις πραγματικές λύσεις του <u>απλού αρμονικού ταλαντωτή</u> (χωρίς απόσβεση ή εξαναγκασμό)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 \neq 0, \ \omega_0 \in \mathbb{R}.$$

(<u>φυσική</u> συχνότητα ταλάντωσης ή ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή)

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση προσεγγίζει την κίνηση του απλού αρμονικού ταλαντωτή για μικρές γωνίες (ή γενικότερα μικρά πλάτη ταλάντωσης). Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

και άρα $\lambda_1 = i\omega_0$, $\lambda_2 = -i\omega_0$. Η γενική λύση είναι (από την (34a)),

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$$

ενώ η γενική <u>πραγματική</u> λύση είναι

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(c_1 e^{i\omega_0 t}\right), \qquad (43)$$

Θέτοντας $c_1 = a_1 - ib_1$, η (43) γράφεται

$$x(t) = a_1 \cos\omega_0 t + b_1 \sin\omega_0 t,$$

ή

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \delta) \qquad (44)$$

όπου $a e^{i\delta} = a_1 - ib_1$. Π.χ., η $x(t) = \cos\omega_0 t$ είναι η λύση που ικανοποιεί τις Α.Σ. $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$, ενώ η $x(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t$ εκείνη που ικανοποιεί, $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$. (45)

Παράδειγμα

Βρείτε όλες τις λύσεις του αντεστραμμένου ταλαντωτή

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \text{ αν } \begin{array}{l} a)\ x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0 \\ b)\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1 \end{array}$$

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$ δίνει $\lambda_1 = \omega_0$, $\lambda_2 = -\omega_0$, και έτσι η γενική λύση είναι:

$$x(t) = c_1 e^{\omega_0 t} + c_2 e^{-\omega_0 t}.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} x(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ \dot{x}(0) = \omega_0 c_1 - \omega_0 c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = \tfrac{1}{2},$$ και έτσι η λύση

που ικανοποιεί την Α.Σ. (a) είναι η:

$$x(t) = \frac{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}{2} = \cosh\omega_0 t$$

b) $$\left.\begin{array}{l} x(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ \dot{x}(0) = \omega_0 c_1 - \omega_0 c_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = -c_2 = \frac{1}{2\omega_0},$$ και άρα:

$$x(t) = \frac{e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}}{2\omega_0} = \frac{1}{\omega_0}\sinh\omega_0 t.$$

$\circledast$

Ας δούμε πρώτα τις σταθερές. Αν λοιπόν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, τότε $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ και

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\bar{\lambda}_1 t}. \qquad \circledast$$

Θέτοντας $t=0$,

$$x(0) = c_1 + c_2, \text{ και άρα } \operatorname{Im}(c_1+c_2) = 0$$

διότι από το Λήμμα η $x(0)$ είναι $\in \mathbb{R}$. Θέτοντας

$$c_1 = a+ib$$
$$c_2 = c+id,$$

η συνθήκη $\operatorname{Im}(c_1+c_2)=0$ μας λέει ότι:

$$d=-b. \qquad (1)$$

Επιπλέον παραγωγίζοντας την $\circledast$,

$$\dot{x} = \lambda c_1 e^{\lambda t} + \bar{\lambda} c_2 e^{\bar{\lambda} t}$$

και άρα

$$\mathbb{R} \ni \dot{x}(0) = \lambda c_1 + \bar{\lambda} c_2 = (\beta+i\omega)c_1 + (\beta-i\omega)c_2 =$$
$$= (\beta+i\omega)(a+ib) + (\beta-i\omega)(c-ib) =$$
$$= \beta a - \omega b + \beta c - \omega b + i[\beta b + \omega a - \beta b - \omega c]$$
$$= \beta(a+c) - 2\omega b + i\omega(a-c)$$

από το οποίο προκύπτει ότι επειδή $\omega \neq 0$,

$$a=c \qquad (2)$$

Από τις (1), (2) έπεται ότι

$$c_2 = \bar{c}_1$$

και έτσι η $\circledast$ γράφεται:

<u>1η μορφή</u>

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{\lambda t} + \bar{c}_1 e^{\bar{\lambda} t}}$$

Θέτοντας $\lambda = \beta + i\omega$, οδηγούμαστε στην εξής εναλλακτική γραφή της 1ης μορφής της λύσης της 2ης τάξης, γραμμικής, ομογενούς ΔΕ:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + \bar{c}_1 e^{\bar{\lambda} t} = e^{\beta t}(c_1 e^{i\omega t} + \bar{c}_1 e^{-i\omega t}) =$$
$$= e^{\beta t}\left(c_1 e^{i\omega t} + \overline{c_1 e^{i\omega t}}\right) \Rightarrow$$

<u>2η μορφή</u>

$$\boxed{x(t) = 2 e^{\beta t} \operatorname{Re}(c_1 e^{i\omega t})}$$

Θέτοντας περαιτέρω $c_1 = a + ib$, έχουμε

$$c_1 e^{i\omega t} = (a+ib)(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$
$$= a\cos\omega t - b\sin\omega t + i\,(a\sin\omega t + b\cos\omega t)$$

και άρα από την $2^{η}$ μορφή βρίσκουμε ότι

$$c_1 e^{i\omega t} + \overline{[c_1 e^{i\omega t}]} = 2a\cos\omega t - 2b\sin\omega t$$

δηλ.,

<u>$3^{η}$ μορφή</u>

$$\boxed{x(t) = e^{\beta t}(a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t)}$$

όπου: $a_1 = 2a$, $a_2 = -2b$.

Μπορούμε να γράψουμε την $2^{η}$ μορφή και ως εξής:

Αν θέσουμε
$$c_1 = A\,e^{i\delta}$$

τότε
$$c_1 e^{i\omega t} = A\,e^{i(\delta+\omega t)}$$

δηλ.
$$\mathrm{Re}\,c_1 e^{i\omega t} = A\cos(\omega t + \delta)$$

και η $2^{η}$ μορφή γράφεται ως

<u>$4^{η}$ μορφή</u>

$$\boxed{x(t) = a\,e^{\beta t}\cos(\omega t + \delta)},$$

όπου $a = 2A$.

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

1. Λύσατε:

a. $\ddot{x} - x = 0$, b. $\ddot{x} + x = 0$, c. $\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x = 0$

d. $\ddot{x} + 4x = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 10$

e. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$

2. Θέτοντας $y(\tau) = x(e^{\tau})$ ανάγετε το πρόβλημα της λύσης της

$$\ddot{x}(t) + \frac{b}{t}\dot{x}(t) + \frac{c}{t^2}x(t) = 0$$

σε αυτό της λύσης της γραμμικής ομογενούς εξίσωσης

$$\ddot{y} + (b-1)\dot{y} + cy = 0 .$$

3. Λύσατε τις

(a) $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$, δοθέντος ότι

$L = 100 \times 10^{-6}$, $R = 30 \times 10^{2}$, $C = 100 \times 10^{-12}$

$q(0) = 100 \times 10^{-10}$, $\dot{q}(0) = 0$.

(b) $2\ddot{x} - \dot{x} - 3x = 0$

4. Αν $b>0$ και $c>0$, αποδείξτε ότι οι χαρακτηριστικές τιμές της εξίσωσης

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Τι σημαίνει αυτό για την συμπεριφορά των λύσεων καθώς $t \to \infty$; ($\underset{\sim}{0}$ ασυμπ. ευσταθές.
Σημ: το $\underset{\sim}{0}$ είναι το μοναδικό σ.ισ. γιατί $\det A \neq 0$.)

5. Συζητείστε την ισοδυναμία μεταξύ των πραγματικών λύσεων του συστήματος $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ και των λύσεων της $\dot{z} + iz = 0$.

Θέσατε $z = x + iy$ και βρείτε τις πραγματικές λύσεις του συστήματος.

$b^2 > 4$

$$\lambda_{1,2} = \left(-b \pm \sqrt{b^2-4c}\right)^2 = b^2 + (b^2-4c) \mp 2b\sqrt{b^2-4c} = \begin{cases} \lambda_1 & 2b^2-4c-2b\sqrt{b^2-4c} \\ \lambda_2 & 2b^2-4c+2b\sqrt{b^2-4c} \end{cases}$$

0) $b^2 = 4c \Rightarrow \lambda_{1,2} = -b < 0$.

1) $b^2 - 4c > 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 = -b \;\Rightarrow\; Re(\lambda+\bar\lambda)$.

$\lambda_1 \lambda_2 = c$

$Re\lambda = \frac{1}{2}(\lambda+\bar\lambda) = \frac{1}{2}(-b) = -\frac{b}{2}$

$Re = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2) = -\frac{1}{2} b$

2) $b^2 < 4c \quad Re\,\lambda_{1,2} = -b < 0$

$$y(\tau) = x(e^\tau), \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau}\cancel{\frac{d\tau}{dt}}\frac{de^\tau}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau}\cancel{\frac{1}{t}} e^\tau$$

$$t = e^\tau \Rightarrow \tau = \ln t, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$y' = x'$$

$$x(t) = y(\tau), \quad t = e^\tau$$

$$\dot x = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \dot y\, t$$

$$\ddot x = \frac{d}{dt}(\dot y t) = \ddot y t + \dot y$$

$$\ddot x + \frac{b}{t}\dot x + \frac{c x}{t^2} = \ddot y t + \dot y + \frac{b \cancel{t} \dot y}{\cancel{t}} + \frac{c}{t^2} y = \dot y t + \dot y(1+b) + \frac{c}{t^2} y =$$

$=$

$$y'(\tau) = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \dot y t = \dot x t (e^\tau)'$$

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{d\tau} = t\frac{d}{dt} \Rightarrow (\,')= t\,\dot{}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(t\frac{d}{d\tau}\right) = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{d\tau} + t\frac{d^2}{d\tau^2} = t\frac{d}{d\tau} + t\frac{d^2}{d\tau}$$

$''$

$= t(\,' + '')$

Παράδειγμα: Ειδύλλια

Θέτουμε:

$R(t)$: αγάπη/μίσος του Ρωμαίου προς την Ιουλιέτα την στιγμή t

$J(t)$: αγάπη/μίσος της Ιουλιέττας — τον Ρωμαίο.

Η ιστορία αγάπης έχει ως εξής: Η J είναι άστατος χαρακτήρας όσον αφορά τις σχέσεις, και ο R όσον περισσότερο την αγαπά τόσο η J θέλει να φύγει. Αλλά όταν ο R αποθαρρύνεται και κάνει πίσω, η J αρχίζει να τον βρίσκει παράξενα ελκυστικό. Ο R όμως αντιδρά διαφορετικά: όταν η J τον αγαπά αυτός αναθερμαίνεται, ενώ 'κρυώνει' όταν τον μισεί.

Όταν $R, J > 0$ έχουμε αγάπη, ενώ όταν $R, J < 0$ έχουμε μίσος. Τότε το μοντέλο της παραπάνω ιστορίας είναι:

$$\left.\begin{aligned} \dot{R} &= aJ \\ \dot{J} &= -bR \end{aligned}\right\} , \quad a, b > 0 .$$

Μια άλλη παραλλαγή είναι (διάφορες επιλογές προσήμων των a, b):

<u>R + 'παγοκολώνα'</u>:

$$\left.\begin{aligned} \dot{R} &= 0 \\ \dot{J} &= aR + bJ \end{aligned}\right\} ,$$

και μιά άλλη:

<u>'Φωτιά + νερό'</u>

$$\left.\begin{aligned} \dot{R} &= aR + bJ \\ \dot{J} &= -bR - aJ \end{aligned}\right\} \quad \text{('τα στερνά ... έρχονται;')}$$

Μπορείτε κι εσείς να δώσετε ονόματα στις τρείς περιπτώσεις που απομένουν για τα πρόσημα των a, b:

$$\dot{R} = aR + bJ .$$

Άσκηση

Λύσατε την εξίσωση:

$$\ddot{R} - \dot{R} + R = 0$$

και βρείτε την λύση $[R(t), J(t)]$ που ικανοποιεί $R(0)=1$, $J(0)=0$.