ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική ΙΙ

Σημειώσεις – Ηλεκτροστατική ΙΙΙ

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

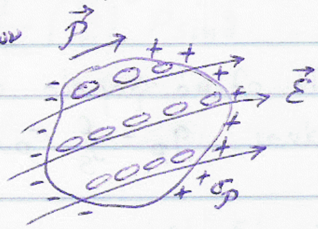
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

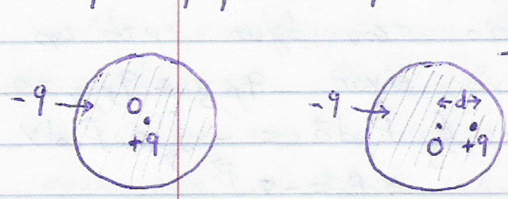
Διηλεκτρικά

Τα μονωτικά υλικά παρουσία εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου πολώνονται, δηλαδή τα άτομα του (μη-πολικά) ή τα μόρια (πολικά ή όχι) γίνονται ή είναι ηλεκτρικά δίπολα που προσανατολίζονται κατά τη διεύθυνση του τοπικού $\vec{E}$ (διηλεκτρικά υλικά). Η πόλωση προκαλεί την εμφάνιση καθαρού θετικού φορτίου στη μία πλευρά του υλικού και αρνητικού στην αντίθετη πλευρά, με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_p. Έτσι, το κομμάτι της ύλης γίνεται ένα μεγάλο ηλεκτρικό δίπολο που τείνει επομένως να κινηθεί κατά τη φορά αύξησης του πεδίου $\vec{E}$. Στο εσωτερικό των διηλεκτρικών το $\vec{E}$ εξασθενεί (στους αγωγούς η εξασθένηση είναι πλήρης, $\vec{E}=0$).



Παράδειγμα

Στο άτομο θεωρούμε ότι ο πυρήνας έχει εντοπισμένο φορτίο $+q$ που περιβάλλεται από ομοιόμορφο σφαιρικό νέφος φορτίου $-q$ εντός ακτίνας a. Παρουσία $\vec{E}$ το $+q$ μετατοπίζεται προς την κατεύθυνση του $\vec{E}$, ενώ το νέφος αντίθετα. Στη θέση ισορροπίας η δύναμη από το φορτίο $-q$ στο $+q$ είναι $F=\frac{qqd}{4\pi\epsilon_0 a^3}$ και ισούται με qE.



Άρα $\frac{qqd}{4\pi\epsilon_0 a^3} = qE \Rightarrow qd = 4\pi\epsilon_0 a^3 E \Rightarrow p_1 = 3\epsilon_0 v E$, $v=\frac{4}{3}\pi a^3$

$\Rightarrow p_1 = \alpha E$, $\alpha = 3\epsilon_0 v$ "ατομική πολωσιμότητα"

Σε ένα κομμάτι υλικού η πόλωση είναι $P = n p_1 = 3\epsilon_0 (nv) E$ και αν τα άτομα είναι το ένα δίπλα στο άλλο χωρίς να αφήνουν κενά, τότε $nv=1$ ($N=nV=nNv$), άρα $P=3\epsilon_0 E$.

Για μόρια εντός $\vec{E}$ είναι εν γένει $p_{1i} = \sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}E_j$, α_{ij} τανυστής πολωσιμότητας

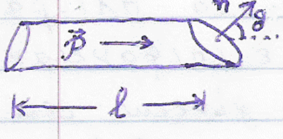
Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα πολωμένο υλικό πόλωσης $\vec{P}$ ταυτίζεται με το πεδίο που δημιουργείται από μία "δέσμια" επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\underline{\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}}$ στην επιφάνεια του υλικού συν μια "δέσμια" χωρική πυκνότητα φορτίου $\underline{\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P}}$ στον όγκο του υλικού

Πράγματι, η διπολική ροπή σ' έναν όγκο dV του υλικού είναι $d\vec{p} = \vec{P}dV$ άρα το αντίστοιχο δυναμικό $d\phi = \frac{d\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{R})}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{R}|^3} = \frac{\vec{P}\cdot(\vec{r}-\vec{R})}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{R}|^3}dV$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \int d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\vec{P}\cdot(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \vec{P}\cdot\nabla_R\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\left(\nabla_R\cdot\frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{R}|} - \frac{\nabla_R\cdot\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{R}|}\right)dV$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\vec{P}\cdot\hat{n}}{|\vec{r}-\vec{R}|}da - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\nabla_R\cdot\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_p(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|}da + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_p(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV$$

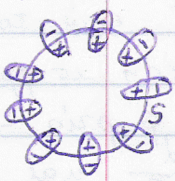
Το ίδιο αποτέλεσμα για την επιφανειακή πυκνότητα σ_p μπορούμε να το πάρουμε αν θεωρήσουμε έναν κύλινδρο του υλικού παράλληλο προς το $\vec{P}$, οπότε αν S είναι η διατομή του κυλίνδρου (κάθετη στο $\vec{P}$) τότε



$$P(S\ell) = \text{ολική διπολική ροπή} =$$
$$= Q_p \ell = \left(\sigma_p \frac{S}{\cos\vartheta}\right)\ell$$
$$\Rightarrow P = \frac{\sigma_p}{\cos\vartheta} \Rightarrow \sigma_p = P\cos\vartheta \Rightarrow \sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$$

Το ολικό φορτίο στην επιφάνεια του διηλεκτρικού λόγω πόλωσης $\vec{P}$ είναι $q_p = \oint_S \sigma_p\, da = \oint_S \vec{P}\cdot\hat{n}\,da = \oint_S \vec{P}\cdot d\vec{a}$

Το αποτέλεσμα για την χωρική πυκνότητα ρ_p προκύπτει και αν θεωρήσουμε μια τοπική διάταξη όπως στο σχήμα, οπότε το επιφανειακό

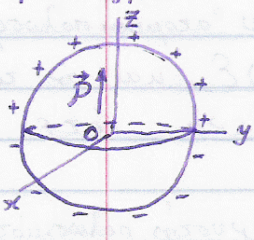


φορτίο $q_{p,S}$ και το φορτίο στον όγκο εντός της επιφάνειας $q_{p,V}$ οφείλουν να είναι $q_{p,S} + q_{p,V} = 0$.

Άρα $q_{p,V} = \int_V \rho_p\, dV = -q_{p,S} = -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{a} = -\int_V \nabla\cdot\vec{P}\,dV$

$$\Rightarrow \rho_p = -\nabla\cdot\vec{P}$$

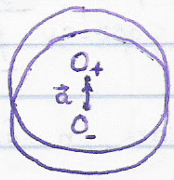
<u>Παράδειγμα</u> Πεδίο ομοιόμορφα πολωμένης σφαίρας ακτίνας R, πόλωσης $\vec{P} = P\hat{z}$.



Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = P\cos\vartheta$, άρα είναι θετική στο άνω ημισφαίριο, αρνητική στο κάτω και μηδέν στον κύκλο με $z=0$. Επίσης $\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = 0$.

Αν $p_1 = qa$ είναι η διπολική ροπή ενός διπόλου ($a \ll R$) τότε $P = np_1 = nqa$, ο αριθμός διπόλων είναι $N = nV = \frac{4}{3}\pi R^3 n$, ενώ η συνολική διπολική ροπή είναι $p = VP = \frac{4}{3}\pi R^3 nqa = Nqa = Np_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 P$.

Θεωρούμε δύο σφαίρες ακτίνας R με φορτία $Q_+ = -Q_- = Nq = \frac{4}{3}\pi R^3 nq = Q$ που η Q_+ είναι μετατοπισμένη κατά $\vec{a} = a\hat{z}$ ως προς το Q_-. Άρα είναι $p = Qa$. Το σύστημα των δύο αυτών σφαιρών προφανώς είναι ισοδύναμο με την πολωμένη σφαίρα. Αν $\vec{r}, \vec{r}\,'$ είναι τα διανύσματα θέσης κάποιου σημείου ως προς τα κέντρα των κατανομών Q_+, Q_- αντίστοιχα, τότε για το εσωτερικό της σφαίρας είναι



$$\vec{E}_{in} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} - \frac{Q\vec{r}\,'}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{Q(\vec{r}\,'-\vec{r})}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{Q\vec{a}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$ (ομογενές πεδίο)

$\mathcal{E}_{in,r} = -\mathcal{E}_{in}\cos\vartheta = -\frac{P}{3\epsilon_0}\cos\vartheta$, $\mathcal{E}_{in,\vartheta} = \mathcal{E}_{in}\sin\vartheta = \frac{P}{3\epsilon_0}\sin\vartheta$

Επίσης $\phi_{in} = \frac{P}{3\epsilon_0} z = \frac{P}{3\epsilon_0} r\cos\vartheta$.

Για το εξωτερικό, $\vec{\mathcal{E}}_{out} = \vec{\mathcal{E}}_{Q_+ \text{ στο } O_+} + \vec{\mathcal{E}}_{Q_- \text{ στο } O_-} = \vec{\mathcal{E}}_{\vec{p}=Q\vec{a}}$

$$\Rightarrow \phi_{out} = \frac{\vec{p}\cdot\hat{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3\vec{P}\cdot\hat{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2 R\cos\vartheta$$

$$\phi_{out}(R) = \frac{P}{3\epsilon_0}R\cos\vartheta = \frac{Pz}{3\epsilon_0}$$

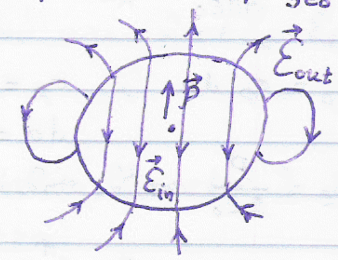
$$\mathcal{E}_{out,r} = \frac{2p\cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3 P\cos\vartheta \quad , \quad \mathcal{E}_{out,\vartheta} = \frac{p\sin\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3 P\sin\vartheta$$

$$\mathcal{E}_{out,r}(R) = \frac{2}{3\epsilon_0}P\cos\vartheta \quad , \quad \mathcal{E}_{out,\vartheta}(R) = \frac{1}{3\epsilon_0}P\sin\vartheta$$

Εξάλλου, το εσωτερικό πεδίο θα μπορούσε να προκύψει και ως εξής χρησιμοποιώντας το εξωτερικό:

Λόγω συνέχειας του ϕ στο R είναι $\phi_{in}(R) = \phi_{out}(R) = \frac{Pz}{3\epsilon_0}$. Εξάλλου η συνάρτηση $\phi_{in} = \frac{Pz}{3\epsilon_0} = \frac{P}{3\epsilon_0}r\cos\vartheta$ ικανοποιεί $\nabla^2\phi_{in} = (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\phi_{in} = 0$ και λόγω της μοναδικότητας της λύσης της $\nabla^2\phi_{in}=0$ με δεδομένη συνοριακή συνθήκη στο R, άρα η λύση στο εσωτερικό είναι $\phi_{in} = \frac{P}{3\epsilon_0}r\cos\vartheta$

Επίσης, μπορούμε να επαληθεύσουμε τις συνθήκες συνέχειας/ασυνέχειας του $\vec{\mathcal{E}}$:



$$\mathcal{E}_{out,\vartheta}(R) - \mathcal{E}_{in,\vartheta} = \frac{P}{3\epsilon_0}\sin\vartheta - \frac{P}{3\epsilon_0}\sin\vartheta = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{out,\parallel}(R) = \mathcal{E}_{in,\parallel}$$

$$\mathcal{E}_{out,r}(R) - \mathcal{E}_{in,r} = \frac{2P}{3\epsilon_0}\cos\vartheta - \frac{-P}{3\epsilon_0}\cos\vartheta = \frac{P}{\epsilon_0}\cos\vartheta = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathcal{E}_{out,\perp}(R) - \mathcal{E}_{in,\perp} = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}.$$

Άλλος τρόπος: Η συνάρτηση $\phi(r,\vartheta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r\cos\vartheta , & r \le R \\ \frac{P}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\cos\vartheta , & r \ge R \end{cases}$ θα δείξουμε ότι ικανοποιεί την $\nabla^2\phi = 0$.

Είναι $\nabla^2 f(r,\vartheta) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$, άρα για $r \le R$ είναι

$\frac{3\epsilon_0}{P}\nabla^2\phi = \frac{\cos\vartheta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2) - \frac{r}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta) = \frac{2\cos\theta}{r} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r\sin\theta} = 0$, ενώ για

$r \ge R$ είναι $\frac{3\epsilon_0}{P}\nabla^2\phi = \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r^4\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta) = 2\frac{\cos\theta}{r^4} - \frac{2\cos\theta}{r^4} = 0$

Επίσης θα δείξουμε ότι η ϕ ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$\vec{E}_{out}\big|_R - \vec{E}_{in}\big|_R = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}\hat{n} \Leftrightarrow -\nabla\phi_{out}\big|_R + \nabla\phi_{in}\big|_R = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}\hat{e}_r$$

Είναι $\nabla f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi$, άρα

$$\nabla\phi_{in} = \frac{P}{3\epsilon_0}\cos\theta\,\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{P}{3\epsilon_0}r\sin\theta\,\hat{e}_\theta = \frac{P}{3\epsilon_0}\left(\cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta\right)$$

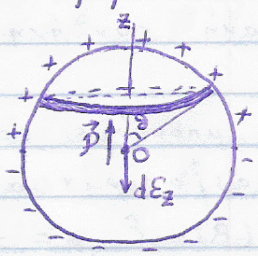
Θεωρώντας το επίπεδο των $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ ως επίπεδο xz, έχουμε
$\hat{e}_r = \hat{x}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta$, $\hat{e}_\theta = \hat{x}\cos\theta - \hat{z}\sin\theta$, άρα $\cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta = \hat{z}$,
απ' όπου $\nabla\phi_{in} = \frac{P}{3\epsilon_0}\hat{z}$

Επίσης $\nabla\phi_{out} = -\frac{2P}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3\cos\theta\,\hat{e}_r - \frac{P}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3\sin\theta\,\hat{e}_\theta = -\frac{P}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left(2\cos\theta\,\hat{e}_r + \sin\theta\,\hat{e}_\theta\right)$

Άρα πράγματι $-\nabla\phi_{out}\big|_R + \nabla\phi_{in}\big|_R = \frac{P}{3\epsilon_0}3\cos\theta\,\hat{e}_r = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}\hat{e}_r$, άρα τελικά η ϕ είναι η λύση του προβλήματος.

Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο της σφαίρας με απευθείας ολοκλήρωση του επιφανειακού φορτίου

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq_p}{R^2}\cos\theta$$



$dq_p = \sigma_p\, da$, $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = P\cos\theta$

$da = 2\pi(R\sin\theta)(R\,d\theta) = 2\pi R^2\sin\theta\, d\theta$

$$dE_z = \frac{P}{2\epsilon_0}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$E_z = \int dE_z = \frac{P}{2\epsilon_0}\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = -\frac{P}{2\epsilon_0}\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^\pi = \frac{P}{3\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{in} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

<u>Ορισμός</u> $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ "ηλεκτρική μετατόπιση", $[D] = \frac{Cb}{m^2}$

(όπου $\vec{E}$ είναι το συνολικό πεδίο μέσα στο διηλεκτρικό, τόσο το εξωτερικό όσο και αυτό που παράγεται από την πόλωση)

Ο νόμος Gauss για τα διηλεκτρικά διατυπώνεται συναρτήσει του $\vec{D}$ και του ελεύθερου φορτίου

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f$$

διότι $\nabla\cdot\vec{D} = \nabla\cdot(\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \epsilon_0\nabla\cdot\vec{E} + \nabla\cdot\vec{P} = \rho - \rho_p = \rho_f$

Η παραπάνω διατύπωση είναι πολύ βολική διότι περιέχει μόνο το ελεύθερο φορτίο το οποίο εν γένει έχουμε υπό έλεγχο, σε αντίθεση προς το δέσμιο φορτίο που γεννιέται από την πόλωση και η οποία οφείλεται στα ελεύθερα φορτία.

$\Phi_D = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{a} = q_f$ (φορτίο εντός της S)

διότι $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{a} = \int_V \nabla\cdot\vec{D}\, dV = \int_V \rho_f\, dV = q_f$

Η επιφανειακή πυκνότητα σ_f ελεύθερου φορτίου στην επιφάνεια αγωγού που βρίσκεται εντός διηλεκτρικού είναι $\sigma_f = -\vec{D}\cdot\hat{n}$, $\hat{n}$: από διηλεκτρικό προς αγωγό

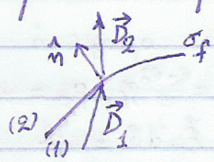
διότι στην επιφάνεια αγωγού είναι $-\epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{n} = \sigma = \sigma_f + \sigma_p = \sigma_f + \vec{P}\cdot\hat{n}$
$\Rightarrow \sigma_f = -(\epsilon_0\vec{E} + \vec{P})\cdot\hat{n} \Rightarrow \sigma_f = -\vec{D}\cdot\hat{n}$

Παρά την ύπαρξη του παραπάνω νόμου Gauss για το $\vec{D}$, ωστόσο δεν υπάρχει νόμος Coulomb μεταξύ $\rho_f, \vec{D}$, επίσης το $\vec{D}$ έχει $\nabla\times\vec{D} = \nabla\times\vec{P} \neq 0$ και άρα δεν υπάρχει δυναμικό για το $\vec{D}$.

Οι συνθήκες ασυνέχειας του $\vec{D}$ διαμέσου μιας επιφάνειας είναι

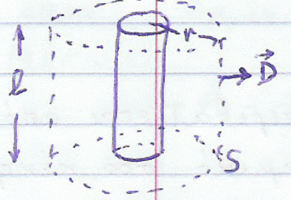
$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\hat{n} = D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_f$$

$$\hat{n}\times(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \hat{n}\times(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$



διότι $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{a} = q_f \Leftrightarrow \vec{D}_2\cdot\hat{n}\,\Delta a + \vec{D}_1\cdot(-\hat{n})\,\Delta a = \sigma_f\,\Delta a$, ενώ από $\hat{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ προκύπτει η δεύτερη.

Παράδειγμα Σύρμα ακτίνας a με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ περιβάλλεται από μονωτή. Να βρεθεί το $\vec{D}$ για $r>a$



Από την εξίσωση $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{a} = q_f \Leftrightarrow D\, 2\pi r \ell = \lambda \ell \Leftrightarrow$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

Για τα λεγόμενα γραμμικά διηλεκτρικά ισχύει $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$, όπου $\vec{E}$ είναι το ολικό πεδίο λόγω των ελεύθερων φορτίων και της πόλωσης και χ_e "ηλεκτρική επιδεκτικότητα" (αδιάστατος αριθμός, συνήθως θετικός).
Πιο γενικά (π.χ. κρύσταλλος) ισχύει $P_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \chi_{eij} E_j$, όπου χ_{eij} ο τανυστής ηλεκτρικής επιδεκτικότητας.

$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$, $\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e)$ "διηλεκτρική σταθερά μέσου" "διαπερατότητα"

Εν γένει είναι $\chi_e(\vec{r})$, $\epsilon(\vec{r})$, π.χ. με επαφή δύο ομογενών διηλεκτρικών.

αφού $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\vec{E} + \epsilon_0\chi_e\vec{E} = \epsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{P} = \epsilon\vec{E} - \epsilon_0\vec{E} = (\epsilon-\epsilon_0)\vec{E}$

$\underline{\vec{D} = \epsilon_r\epsilon_0\vec{E}}$, $\underline{\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\vec{E}}$, $\underline{\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1+\chi_e}$ "σχετική διηλεκτρική σταθερά" "σχετική διαπερατότητα"

Επομένως, για γραμμικά διηλεκτρικά οι διάφορες εξισώσεις γράφονται συναρτήσει των $\epsilon, \vec{E}$:

$\sigma_p = (\epsilon-\epsilon_0)\vec{E}\cdot\hat{n} = \frac{\epsilon_0-\epsilon}{\epsilon}\sigma_f$, $\rho_p = -\nabla\cdot[(\epsilon-\epsilon_0)\vec{E}]$

$\nabla\cdot(\epsilon\vec{E}) = \rho_f$, $\oint_S \epsilon\vec{E}\cdot d\vec{a} = q_f$, $\sigma_f = -\epsilon\vec{E}\cdot\hat{n}$

$(\epsilon_2\vec{E}_2 - \epsilon_1\vec{E}_1)\cdot\hat{n} = \epsilon_2 E_{2\perp} - \epsilon_1 E_{1\perp} = \sigma_f$, $\hat{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$

Συνεχίζει να είναι $\nabla\times\vec{D}\neq 0$ στα γραμμικά διηλεκτρικά, π.χ. για την καμπύλη C τριγύρω από τη συνοριακή επιφάνεια ενός πολωμένου διηλεκτρικού σε επαφή με το κενό είναι $\oint_C \vec{D}\cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{P}\cdot d\vec{l} \neq 0$

Ομογενές ονομάζεται ένα διηλεκτρικό όταν τα χ_e, ϵ είναι σταθερά ανεξάρτητα της θέσης. Για τα ομογενή διηλεκτρικά είναι

$\sigma_p = (\epsilon-\epsilon_0)\vec{E}\cdot\hat{n} = \frac{\epsilon_0-\epsilon}{\epsilon}\sigma_f$, $\rho_p = -(\epsilon-\epsilon_0)\nabla\cdot\vec{E} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}-1\right)\rho_f = -\frac{\chi_e}{1+\chi_e}\rho_f$

$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$, $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_f}{\epsilon}$, $\sigma_f = -\epsilon\vec{E}\cdot\hat{n}$

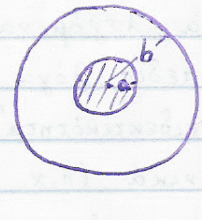
$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\hat{n} = E_{2\perp} - E_{1\perp} = \frac{\sigma_f}{\epsilon}$, $\hat{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$

$\nabla\times\vec{D} = 0$, $\oint_C \vec{D}\cdot d\vec{l} = 0$; $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_r}\vec{E}_{vac}$

διότι $\nabla\cdot\vec{E}_{vac} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0\nabla\cdot\vec{E}_{vac} = \epsilon\nabla\cdot\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\vec{E}_{vac} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_r}\vec{E}_{vac}$.

Δηλαδή σε ομογενές διηλεκτρικό το ηλεκτρικό πεδίο ελαττώνεται κατά $\frac{1}{\epsilon_r}$ ως προς το πεδίο αγνοώντας το διηλεκτρικό, π.χ. για σημειακό φορτίο εντός διηλεκτρικού $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{e}_r$, $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$, $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2}$.

<u>Παράδειγμα</u> Μεταλλική σφαίρα ακτίνας a και φορτίου Q περιβάλλεται από μονωτικό υλικό ϵ έως την ακτίνα b. Να βρεθεί το δυναμικό στο κέντρο της σφαίρας και το επιφανειακό φορτίο πόλωσης.



Για $r>a$ είναι $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{a} = q_f = Q \Rightarrow D\cdot 4\pi r^2 = Q$
$\Rightarrow D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$

Για $r<a$, $E=0$, $P=0$ $\Rightarrow D(r)=0$.

Η ασυνέχεια του D στην επιφάνεια της σφαίρας

είναι $D(a^+) - D(a^-) = \frac{Q}{4\pi a^2} - 0 = \sigma_f$

Είναι $D = \epsilon E \Rightarrow E = \frac{D}{\epsilon} \Rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r>b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}, & a<r<b \\ 0, & r<a \end{cases}$

Άρα $\phi(0) = \int_0^\infty \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{r} = \int_0^a 0\, dr + \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\, dr + \int_b^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, dr =$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b} + \frac{1}{\epsilon_0 b}\right)$$

Η πόλωση του διηλεκτρικού είναι

$$P = \epsilon_0 \chi_e \mathcal{E} = \epsilon_0\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1\right)\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}$$

και το επιφανειακό φορτίο λόγω πόλωσης (δέσμιο) έχει πυκνότητα

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = \begin{cases} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\frac{Q}{4\pi b^2}, & r = b \\ -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\frac{Q}{4\pi a^2}, & r = a \end{cases}$$

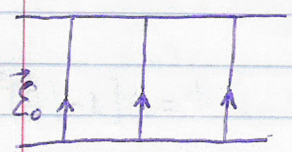
ενώ η πυκνότητα του δέσμιου φορτίου εντός του διηλεκτρικού είναι $\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = 0$

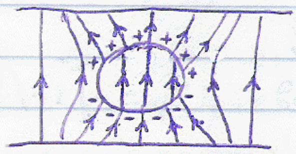
Τα ολικά φορτία λόγω πόλωσης για $r=a$, $r=b$ είναι

$$Q_p(r=a) = \oint_S \sigma_p(r=a)\, da = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)Q$$

$$Q_p(r=b) = \oint_S \sigma_p(r=b)\, da = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)Q$$

<u>Παράδειγμα</u> Μια σφαίρα ομογενούς γραμμικού διηλεκτρικού υλικο τοποθετείται εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\mathcal{E}}_0$. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο μέσα και έξω από τη σφαίρα.





Είναι $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 + \vec{\mathcal{E}}_p$, $\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}$

όπου $\vec{\mathcal{E}}_{p,in} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$, $\mathcal{E}^{(out)}_{p,r} = \frac{2}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3 P\cos\theta$, $\mathcal{E}^{(out)}_{p,\theta} = \frac{1}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3 P\sin\theta$

Μέσα:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{\mathcal{E}}_0 - \frac{\epsilon_r - 1}{3}\vec{\mathcal{E}} \Rightarrow \left(1 + \frac{\epsilon_r - 1}{3}\right)\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = \frac{3}{2+\epsilon_r}\vec{\mathcal{E}}_0 = \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\vec{\mathcal{E}}_0$$

Για $\epsilon_r > 1 \Rightarrow \mathcal{E} < \mathcal{E}_0$ (εξασθένηση)

$$\phi = -\mathcal{E}z = -\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\mathcal{E}_0 r\cos\theta$$

$$\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \frac{3}{\epsilon_r + 2}\vec{\mathcal{E}}_0 = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\vec{\mathcal{E}}_0 = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\vec{\mathcal{E}}_0$$

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = P\cos\theta = 3\epsilon_0\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\mathcal{E}_0\cos\theta$$

Έξω: $\mathcal{E}^{(out)}_{p,r} = \frac{2\epsilon - 2\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \mathcal{E}_0\cos\theta$, $\mathcal{E}^{(out)}_{p,\theta} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \mathcal{E}_0 \sin\theta$

$\mathcal{E}_{0,r} = \mathcal{E}_0\cos\theta$, $\mathcal{E}_{0,\theta} = -\mathcal{E}_0\sin\theta$

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_{p,r} + \mathcal{E}_{0,r} = \left[\frac{2\epsilon-2\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3+1\right]\mathcal{E}_0\cos\theta$$

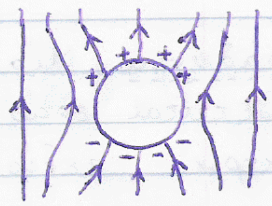
$$\mathcal{E}_\theta = \mathcal{E}_{p,\theta} + \mathcal{E}_{0,\theta} = \left[\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3-1\right]\mathcal{E}_0\sin\theta$$

Είναι $\vec{\mathcal{E}}_p = -\nabla\phi_p$, $\phi_p = \frac{P}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2 R\cos\theta = \frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2\mathcal{E}_0 R\cos\theta$

$\vec{\mathcal{E}}_0 = -\nabla\phi_0$, $\phi_0 = -\mathcal{E}_0 r\cos\theta$

άρα $\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\phi$, $\phi = \phi_p + \phi_0 = \left[\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3-1\right]\mathcal{E}_0 r\cos\theta$.

Ο αγωγός είναι τέλειο διηλεκτρικό, δηλαδή μπορούμε να πάρουμε τη λύση του προβλήματος μιας μεταλλικής σφαίρας μέσα σε ομογενές πεδίο $\vec{\mathcal{E}}_0$ ξεκινώντας από την παραπάνω λύση και θέτοντας $\epsilon_r \to \infty$ $\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\to\infty,\ \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\to 0\right)$. Αυτό θα μπορούσε να εφαρμοστεί και σε άλλα προβλήματα αγωγών, όπου η αντικατάσταση τους από διηλεκτρικό αποτελεί ένα είδος regulator και αποτελεί μια εναλλακτική τεχνική επεξεργασίας των αγωγών.



Επομένως, στο εσωτερικό του αγωγού προκύπτει:

$\vec{\mathcal{E}} = 0$

$\vec{P} = 3\epsilon_0\frac{1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon}}{1+2\frac{\epsilon_0}{\epsilon}}\vec{\mathcal{E}}_0 = 3\epsilon_0\vec{\mathcal{E}}_0 \Rightarrow \sigma = \vec{P}\cdot\hat{n} = 3\epsilon_0\mathcal{E}_0\cos\theta$

Στο εξωτερικό του αγωγού

$\mathcal{E}_r = \left[1+2\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\mathcal{E}_0\cos\theta$, $\mathcal{E}_\theta = -\left[1-\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\mathcal{E}_0\sin\theta$, $\phi = -\left[1-\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\mathcal{E}_0 r\cos\theta$

$\mathcal{E}_r|_R = 3\mathcal{E}_0\cos\theta = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, $\mathcal{E}_\theta|_R = 0$ (κάθετο στον αγωγό)

Για γραμμικό διηλεκτρικό η ηλεκτροστατική ενέργεια είναι $\underline{U = \frac{1}{2}\int_{V_\infty}\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{D}\,dV}$ και η πυκνότητα ενέργειας $u_E = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{D} = \frac{\epsilon}{2}\mathcal{E}^2$.

Πράγματι, καθώς προσθέτουμε ελεύθερο φορτίο ρ_f σιγά-σιγά, αυξάνουμε την ενέργεια του συστήματος και συγχρόνως λαμβάνεται αυτόματα υπόψη η αντίδραση του διηλεκτρικού (δέσμιο φορτίο και πόλωση). Είναι

$\delta U = \int\phi\,\delta\rho_f\,dV$, αλλά $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \Rightarrow \nabla\cdot\delta\vec{D} = \delta\rho_f$, άρα

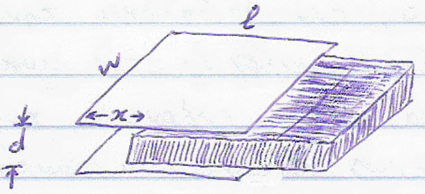
$$\delta U = \int_{V_\infty}\phi\,\nabla\cdot\delta\vec{D}\,dV = \int_{V_\infty}\left[\nabla\cdot(\phi\,\delta\vec{D}) - \nabla\phi\cdot\delta\vec{D}\right]dV = \cancelto{0}{\oint_{S_\infty}\phi\,\delta\vec{D}\cdot d\vec{a}} + \int_{V_\infty}\vec{\mathcal{E}}\cdot\delta\vec{D}\,dV$$

Για γραμμικό διηλεκτρικό $\frac{1}{2}\delta(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{D}) = \frac{1}{2}\delta(\epsilon\,\mathcal{E}^2) = \epsilon\,\vec{\mathcal{E}}\cdot\delta\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}\cdot\delta\vec{D}$, άρα

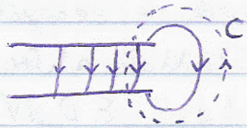
$$\delta U = \delta\left(\frac{1}{2}\int_{V_\infty}\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{D}\,dV\right) \Rightarrow U = \frac{1}{2}\int_{V_\infty}\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{D}\,dV$$

Η ενέργεια του διηλεκτρικού μπορεί να γραφεί ως $U = U_f + U_p + U_{\pi\alpha\rho}$, όπου $U_{\pi\alpha\rho}$ είναι η ενέργεια παραμόρφωσης των μορίων του διηλεκτρικού. Αλλά $U_p + U_{\pi\alpha\rho} = 0$ καθώς το δέσμιο φορτίο είναι πάντα σε ισορροπία, άρα τελικά $U = U_f$ όπως υπολογίσαμε προηγουμένως. Επίσης η εξίσωση $U = \frac{1}{2}\int \phi \rho \, dV$ είναι σωστή, ενώ η $U = \frac{1}{2}\int \phi \rho_f \, dV$ όχι. Τέλος η έκφραση $\frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 dV = U_f + U_p$ λαμβάνει υπόψη τη μεταφορά όλων των φορτίων (ελεύθερων και δέσμιων), δεν λαμβάνει όμως υπόψη την πόλωση του διηλεκτρικού, επομένως δεν αποτελεί τη σωστή έκφραση ενέργειας.

Παράδειγμα Δύναμη σε διηλεκτρικό.



Αν τραβήξουμε το διηλεκτρικό κατά dx έξω από τον πυκνωτή με δύναμη F_1, το έργο της F_1 ισούται με την αύξηση της ενέργειας του πυκνωτή



$dU = W_{F_1} = F_1 dx = -F dx = -W_F$, όπου F είναι η x-συνιστώσα της ανομοιογενούς δύναμης στα άκρα του πυκνωτή και την οποία θα υπολογίσουμε ενεργειακά.

Είναι $F = -\frac{dU}{dx}$ όπου $U = \frac{Q^2}{2C}$ και το φορτίο Q (ελεύθερο φορτίο στις πλάκες του πυκνωτή) παραμένει σταθερό. Άρα $F = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx}$.
Αλλά $C = \frac{\epsilon_0 w x}{d} + \frac{\epsilon w(l-x)}{d} = \frac{\epsilon_0 w}{d}(\epsilon_r l - \chi_e x)$, άρα $F = -\frac{Q^2 \chi_e d}{2\epsilon_0 w(\epsilon_r l - \chi_e x)^2} < 0$, δηλαδή το διηλεκτρικό έλκεται πρός τα μέσα, αφού η ενέργεια του πυκνωτή αυξάνει όσο το διηλεκτρικό εξέρχεται $\left(U = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 w(\epsilon_r l - \chi_e x)}\right)$.
Δηλαδή το έργο που παράγουμε εμείς, αποθηκεύεται ως ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή. Προφανώς η διαφορά δυναμικού ϕ μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή δεν παραμένει σταθερή, $\phi = \frac{1}{C}Q$ αφού $C = C(x)$.
Επομένως θα ήταν λάθος αν είχαμε θεωρήσει το ϕ σταθερό και χρησιμοποιήσει τη σχέση $F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}C\phi^2\right) = -\frac{1}{2}\phi^2\frac{dC}{dx} = -\frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx}$ θα έβγαινε λάθος πρόσημο.

Αν αντί να διατηρήσουμε το ελεύθερο φορτίο Q σταθερό, διατηρούσαμε την τάση ϕ σταθερή τότε πέραν του έργου που παράγει η F_1, επίσης παράγει έργο η μπαταρία αφού κινείται ελεύθερο φορτίο από/προς τους οπλισμούς για να διατηρηθεί το ϕ σταθερό. Μάλιστα αναμένουμε καθώς εξέρχεται το διηλεκτρικό το φορτίο των οπλισμών να ελαττώνεται (αφού ελαττώνεται το δέσμιο φορτίο χρειάζεται λιγότερο Q για να διατηρείται το ϕ σταθερό), δηλαδή το έργο της μπαταρίας $\phi dQ < 0$, δηλαδή ενέργεια μεταφέρεται από τον πυκνωτή στη μπαταρία. Έχουμε

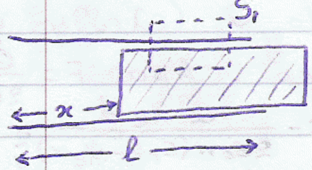
$$dU = F_1 dx + \phi\, dQ = -F dx + \phi\, dQ = -F dx + \phi\, d(C\phi) = -F dx + \phi^2 dC$$

$$\Rightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx} + \phi^2 \frac{dC}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} C \phi^2\right) + \phi^2 \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2}\phi^2 \frac{dC}{dx} + \phi^2 \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}\phi^2 \frac{dC}{dx} < 0,$$

δηλαδή πάλι ελκτική δύναμη. Τελικά

$$F = -\frac{\epsilon_0 w \chi_e}{2d}\phi^2 = -\frac{w(\epsilon-\epsilon_0)}{2d}\phi^2 .$$

Μια παρατήρηση σχετικά με τη δύναμη F. Αν θεωρήσουμε την καμπύλη C που φαίνεται στο σχήμα, οφείλει $\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = 0$. Αφού υπάρχει θετική συνεισφορά στο ολοκλήρωμα από το τμήμα της καμπύλης εντός του πυκνωτή, άρα πρέπει να υπάρχει μια αντίθετη συνεισφορά από το "εξωτερικό" τμήμα, που υποδηλώνει την ύπαρξη του εξωτερικού ανομοιογενούς πεδίου. Επειδή η ενέργεια του πυκνωτή $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}C\phi^2$ που χρησιμοποιήθηκε εκφράζει την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου εντός του πυκνωτή, επομένως η ενέργεια αυτή αυξήθηκε κατά την κίνηση του διηλεκτρικού, ενώ η ενέργεια του εξωτερικού ανομοιογενούς πεδίου δεν μεταβλήθηκε. Εξάλλου αξίζει να ελέγξουμε π.χ. στην περίπτωση με Q=σταθ. ότι η έκφραση $\frac{1}{2}\int_{V_{inside}} \mathcal{E} D\, dV$ είναι πράγματι την ενέργεια $\frac{Q^2}{2C}$ του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του πυκνωτή.

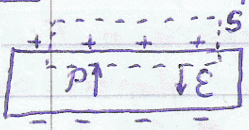


Αν εφαρμόσουμε το νόμο Gauss για την επιφάνεια S_1 έχουμε $\oint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{a} = q_f \Leftrightarrow D \cdot A = \sigma_f A \Leftrightarrow D = \sigma_f \Leftrightarrow \epsilon \mathcal{E} = \sigma_f \Leftrightarrow \mathcal{E} = \frac{\sigma_f}{\epsilon}$, όπου σ_f η πυκνότητα ελεύθερου φορτίου στο τμήμα του οπλισμού με το διηλεκτρικό. Εξάλλου στο κενό τμήμα είναι $\mathcal{E}' = \frac{\sigma_f'}{\epsilon_0}$. Εξαιτίας της συνέχειας των $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ διηλεκτρικού και κενού, άρα $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ παντού, άρα $\sigma_f' = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\sigma_f$. Το ολικό φορτίο του πυκνωτή είναι $Q = \sigma_f' w x + \sigma_f w(\ell - x) = \frac{\sigma_f w}{\epsilon}[\epsilon_0 x + \epsilon(\ell - x)] = \frac{\sigma_f C d}{\epsilon}$.

Εξάλλου $\frac{1}{2}\int_{V_{inside}} \mathcal{E} D\, dV = \frac{1}{2}\epsilon_0 \mathcal{E}'^2 w x d + \frac{1}{2}\mathcal{E} D w d(\ell - x) = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 w d[\epsilon_0 x + \epsilon(\ell - x)] = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 d^2 C$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_f}{\epsilon}\right)^2 d^2 C = \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{Cd}\right)^2 d^2 C = \frac{Q^2}{2C}.$$

<u>Άσκηση</u> Πεδίο ομοιόμορφα πολωμένης πλάκας πόλωσης $\vec{P} = P\hat{z}$



Το φορτίο λόγω πόλωσης στην επιφάνεια είναι $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = P$ στην μία επιφάνεια και $-P$ στην άλλη.

Είναι $\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \frac{q_P}{\epsilon_0} \Leftrightarrow -\mathcal{E} A = \frac{\sigma_p A}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \mathcal{E} = -\frac{P}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$.

Το ίδιο παίρνουμε και από

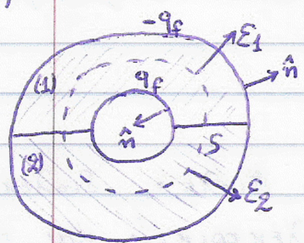
$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{a} = q_f = 0 \Rightarrow D \cdot A = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \epsilon_0 \mathcal{E} + P = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{P}{\epsilon_0}.$$

Άσκηση Διηλεκτρική πλάκα τοποθετείται εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο εντός της πλάκας.

Εντός του πεδίου η πλάκα πολώνεται και $\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}$ όπου $\vec{\mathcal{E}}$ το ζητούμενο ηλεκτρικό πεδίο εντός της πλάκας. Ως συνέπεια αυτής της πόλωσης δημιουργεί η πλάκα το δικό της ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathcal{E}}_p = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = -(\epsilon_r - 1)\vec{\mathcal{E}}$. Το συνολικό πεδίο εντός είναι $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 + \vec{\mathcal{E}}_p = \vec{\mathcal{E}}_0 - (\epsilon_r - 1)\vec{\mathcal{E}} \Rightarrow \vec{\mathcal{E}}_0 = \epsilon_r \vec{\mathcal{E}} \Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{\epsilon_r}\vec{\mathcal{E}}_0 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\vec{\mathcal{E}}_0$, δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο ελαττώνεται.

Ως συνέπεια του παραπάνω, αν σε έναν επίπεδο πυκνωτή με φορτίο q_f, διαφορά δυναμικού ϕ_0 και χωρητικότητα $C_0 = \frac{q_f}{\phi_0} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ βάλουμε διηλεκτρικό διατηρώντας το φορτίο q_f σταθερό, τότε το ηλεκτρικό πεδίο ελαττώνεται $\mathcal{E} = \frac{1}{\epsilon_r}\mathcal{E}_0$, η διαφορά δυναμικού ελαττώνεται $\phi = \mathcal{E}d = \frac{1}{\epsilon_r}\mathcal{E}_0 d$ και άρα η χωρητικότητα αυξάνει $C = \frac{q_f}{\phi} = \epsilon_r \frac{q_f}{\mathcal{E}_0 d} = \epsilon_r \frac{q_f}{\phi_0} = \epsilon_r C_0 = \epsilon \frac{S}{d}$.

Άσκηση Μεταξύ δύο σφαιρικών αγώγιμων φλοιών υπάρχουν δύο διηλεκτρικά όπως στο σχήμα. Να βρεθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή.



Δίνονται $R_1 < R_2$, ϵ_1, ϵ_2

Λόγω συμμετρίας τα ηλεκτρικά πεδία $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ είναι σφαιρικώς συμμετρικά, δηλ. $\mathcal{E}_1(r)$, $\mathcal{E}_2(r)$. Επιπλέον στην επαφή των δύο διηλεκτρικών οι εφαπτομενικές συνιστώσες είναι ίσες, δηλ. $\mathcal{E}_1(r) = \mathcal{E}_2(r) = \mathcal{E}(r)$

Είναι $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{a} = q_f \Leftrightarrow \oint_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{a} + \oint_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{a} = q_f \Leftrightarrow \epsilon_1 \mathcal{E}(r) 2\pi r^2 + \epsilon_2 \mathcal{E}(r) 2\pi r^2 = q_f$

$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{E}}(r) = \frac{q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)r^2}\hat{e}_r$

Άρα $\vec{P}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0)\vec{\mathcal{E}} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)r^2}\hat{e}_r$ και $\vec{P}_2 = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)r^2}\hat{e}_r$

$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{\mathcal{E}} = \frac{\epsilon_1 q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)r^2}\hat{e}_r$, $\vec{D}_2 = \frac{\epsilon_2 q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)r^2}\hat{e}_r$

Η επιφανειακή πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων είναι

$\sigma_{1f}(R_1) = -\vec{D}_1(R_1)\cdot\hat{n} = D_1(R_1) = \frac{\epsilon_1 q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)R_1^2}$, $\sigma_{2f}(R_1) = D_2(R_1) = \frac{\epsilon_2 q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)R_1^2}$

$\sigma_{1f}(R_2) = -\vec{D}_1(R_2)\cdot\hat{n} = -D_1(R_2) = -\frac{\epsilon_1 q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)R_2^2}$, $\sigma_{2f}(R_2) = -D_2(R_2) = -\frac{\epsilon_2 q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)R_2^2}$

Προφανώς $\int \sigma_{1f}(R_1)\,da + \int \sigma_{2f}(R_1)\,da = q_f$, $\int \sigma_{1f}(R_2)\,da + \int \sigma_{2f}(R_2)\,da = -q_f$

Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι

$$\sigma_{1p}(R_1) = \vec{P}_1(R_1)\cdot\hat{n} = -P_1(R_1) = -\frac{(\epsilon_1-\epsilon_0)q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)R_1^2}, \quad \sigma_{2p}(R_1) = -P_2(R_1) = -\frac{(\epsilon_2-\epsilon_0)q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)R_1^2}$$

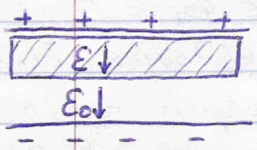
$$\sigma_{1p}(R_2) = \vec{P}_1(R_2)\cdot\hat{n} = P_1(R_2) = \frac{(\epsilon_1-\epsilon_0)q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)R_2^2}, \quad \sigma_{2p}(R_2) = P_2(R_2) = \frac{(\epsilon_2-\epsilon_0)q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)R_2^2}$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι

$$\phi(R_1) - \phi(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{r} = \frac{q_f}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

και η χωρητικότητα του πυκνωτή $C = \dfrac{q_f}{\phi(R_1)-\phi(R_2)} = \dfrac{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$

<u>Άσκηση</u> Επίπεδος πυκνωτής γεμίζεται μερικώς με διηλεκτρικό όπως στο σχήμα. Ποια η σχέση των ηλεκτρικών πεδίων εντός και εκτός του διηλεκτρικού?



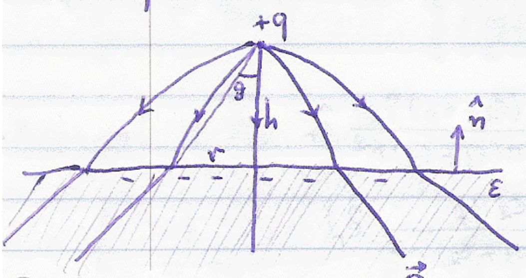
Εντός του διηλεκτρικού έχουμε

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{a} = q_f \Rightarrow D\cdot A = \sigma_f A \Rightarrow D = \sigma_f \Rightarrow \epsilon\mathcal{E} = \sigma_f \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\sigma_f}{\epsilon}$$

Εκτός του διηλεκτρικού είναι $\mathcal{E}_0 = \dfrac{\sigma_f}{\epsilon_0}$, που προκύπτει είτε από $\oint \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \dfrac{q_f}{\epsilon_0}$ είτε διότι στην επιφάνεια μεταξύ διηλεκτρικού και κενού δεν υπάρχει ελεύθερο φορτίο, άρα D συνεχές, άρα $D = \epsilon_0 \mathcal{E}_0 \Rightarrow \sigma_f = \epsilon_0\mathcal{E}_0 \Rightarrow \mathcal{E}_0 = \dfrac{\sigma_f}{\epsilon_0}$.

Τελικά $\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \dfrac{\epsilon_0}{\epsilon} = \dfrac{1}{\epsilon_r} \Rightarrow \mathcal{E} = \dfrac{1}{\epsilon_r}\mathcal{E}_0$.

<u>Άσκηση</u> Φορτίο q βρίσκεται σε απόσταση h από άπειρο διηλεκτρικό. Ποιο το κάθετο ηλεκτρικό πεδίο μόλις εντός και εκτός του διηλεκτρικού και ποια η επιφανειακή πυκνότητα του δέσμιου φορτίου?



Το ηλεκτρικό πεδίο του φορτίου q δημιουργεί πόλωση $\vec{P}$ στο διηλεκτρικό και επιφανειακό δέσμιο φορτίο πυκνότητας σ_p. Είναι $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = P_\perp = \epsilon_0\chi_e\mathcal{E}_\perp$, όπου $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}' + \vec{\mathcal{E}}_p$, $\vec{\mathcal{E}}' = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2+h^2)}\hat{e}_r$ το πεδίο Coulomb του q και $\vec{\mathcal{E}}_p$ το πεδίο του ίδιου του πολωμένου διηλεκτρικού. Είναι $\mathcal{E}_\perp = \mathcal{E}'_\perp + \mathcal{E}_{p,\perp}$, όπου $\mathcal{E}'_\perp = \mathcal{E}'\cos\theta = -\dfrac{qh}{4\pi\epsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}$. Λίγο μέσα από την επιφάνεια του διηλεκτρικού το πεδίο $\vec{\mathcal{E}}_p$ οφείλεται στο σ_p και άρα $\mathcal{E}^{(in)}_{p,\perp} = -\dfrac{\sigma_p}{2\epsilon_0}$. Τελικά

$$\sigma_p = \epsilon_0\chi_e\left(-\frac{qh}{4\pi\epsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}} - \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0}\right) \Rightarrow \sigma_p = -\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\,\frac{qh}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}} = -\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\,\frac{qh}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}}$$

Άρα το κάθετο ηλεκτρικό πεδίο μόλις μέσα από το διηλεκτρικό είναι

$$\mathcal{E}_{\perp}^{(in)} = -\frac{qh}{4\pi\epsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}} + \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\frac{qh}{4\pi\epsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}} = -\frac{2}{\epsilon_r+1}\frac{qh}{4\pi\epsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}$$

Μόλις έξω από το διηλεκτρικό είναι $\mathcal{E}_{p,\perp}^{(out)} = \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0} = -\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\frac{qh}{4\pi\epsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}$
άρα το κάθετο ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\mathcal{E}_{\perp}^{(out)} = \mathcal{E}_{\perp}' + \mathcal{E}_{p,\perp}^{(out)} = -\frac{qh}{4\pi\epsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}} - \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\frac{qh}{4\pi\epsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}} = -\frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r+1}\frac{qh}{4\pi\epsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}$$

Επειδή η επιφάνεια δεν έχει ελεύθερο φορτίο, οφείλει
$D_{\perp}^{(in)} = D_{\perp}^{(out)} \Leftrightarrow \epsilon\,\mathcal{E}_{\perp}^{(in)} = \epsilon_0\,\mathcal{E}_{\perp}^{(out)} \Leftrightarrow \mathcal{E}_{\perp}^{(out)} = \epsilon_r\,\mathcal{E}_{\perp}^{(in)}$ που συμφωνεί με τα παραπάνω αποτελέσματα και θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί απευθείας για τον υπολογισμό του $\mathcal{E}_{\perp}^{(out)}$.