ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σημειώσεις – Γραμμικοί Χώροι

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

<u>Ορισμός:</u> Λέμε ότι το σύνολο V είναι γραμμικός χώρος (ή διανυσματικός) (vector space, linear space) πάνω σ' ένα σώμα F (V_F) όταν υπάρχει

μία εσωτερική πράξη $+ : V\times V \to V : (v,u) \to v+u$ ("πρόσθεση")

και μία εξωτερική πράξη $\cdot : F\times V \to V : (\lambda, v) \to \lambda\cdot v \equiv \lambda v$ ("εξωτερικός πολ/σμός βαθμωτών")

έτσι ώστε

*) $v+(u+w)=(v+u)+w, \quad \forall v,u,w\in V$

$v+u=u+v$

$\exists\, 0\in V : v+0=v, \quad \forall v\in V$

$\forall v\in V, \exists -v\in V : v+(-v)=0$ ($\uparrow$ $(V,+)$ αβελιανή ομάδα)

*) $\lambda(v+u)=\lambda v+\lambda u, \quad \forall \lambda\in F, \ \forall v,u\in V$

$(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v, \quad \forall \lambda,\mu\in F, \ \forall v\in V$

$(\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$

$1v=v, \quad \forall v\in V$

($v, u, w, \dots$ "διανύσματα", $\lambda, \mu, \nu, \dots$ "συντελεστές" ή "βαθμωτά")

Όλους αυτούς τους κανόνες τους έχουμε χρησιμοποιήσει στις πράξεις μας με τα συνήθη διανύσματα $\vec{v}, \vec{u}, \dots$ του $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ καθώς επίσης και στις πράξεις μας με τις συναρτήσεις.

$0v=0$, $\lambda 0=0$, $\lambda v=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $v=0$, $\lambda(-v)=(-\lambda)v=-(\lambda v)\equiv -\lambda v$

Από $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$, θέτοντας $\lambda=0$ έχουμε $\mu v=0v+\mu v \Rightarrow 0v=0$.

Από $\lambda(v+u)=\lambda v+\lambda u$, θέτοντας $u=0$ έχουμε $\lambda v=\lambda v+\lambda 0 \Rightarrow \lambda 0=0$.

Αν $\lambda v=0 \Rightarrow \lambda=0$ ή $\lambda\neq 0$. Για $\lambda\neq 0$ είναι $0=\lambda^{-1}0=\lambda^{-1}(\lambda v)=(\lambda^{-1}\lambda)v=1v=v$ $\Rightarrow v=0$. Το αντίστροφο προφανές.

Από $(\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$, θέτοντας $\mu=-1$ έχουμε $(-\lambda)v=\lambda(-v)$, ενώ θέτοντας $\lambda=-1$ έχουμε $(-\mu)v=-(\mu v) \Rightarrow (-\lambda)v=-(\lambda v)$.

<u>Παραδείγματα</u>

1) $(F,+,\cdot)$ σώμα $\Rightarrow$ $(F_F,+,\cdot)$ δ.χ. Δηλαδή, αν ο πολ/σμός του σώματος θεωρηθεί ως βαθμωτός πολ/σμός, τότε το σώμα γίνεται δ.χ. Άρα, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Q}}$ δ.χ., $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}$ δ.χ., $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ δ.χ.

2) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ δ.χ. Εδώ $\lambda(x+iy)=\lambda x+i(\lambda y)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Το $\mathbb{R}_{\mathbb{C}}$ όχι δ.χ. $\lambda x=(a+ib)x\notin\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}, x\in\mathbb{R}$

3) $F^N=F\times\dots\times F=\{(a_1,\dots,a_N),\ a_i\in F\}$ δ.χ. στο F με πράξεις

$(a_1,\dots,a_N)+(b_1,\dots,b_N)=(a_1+b_1,\dots,a_N+b_N)$

$\lambda(a_1,\dots,a_N)=(\lambda a_1,\dots,\lambda a_N), \quad \lambda\in F$

Άρα, $\mathbb{Q}^N$ δ.χ. στο $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^N$ δ.χ. στο $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}^N$ δ.χ. στο $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$ όχι δ.χ. στο $\mathbb{C}$.

(Στην πραγματικότητα, για $N=1$ αναγόμαστε στο παράδειγμα 1).

Οι χώροι $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ περιέχονται εδώ.

4) $\mathcal{F} = \{f : S \to F\}$ δ.χ. στο F με πράξεις

$(f+g)(s) = f(s) + g(s)$, $s \in S$ ("χώροι συναρτήσεων")

$(\lambda f)(s) = \lambda f(s)$, $\lambda \in F$, $s \in S$

Άρα, $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ δ.χ. στο $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$ δ.χ. στο $\mathbb{C}$.

Παρατήρηση Ισχύει $nv = (\mathrm{sgn}\, n)\underbrace{(v + \cdots + v)}_{|n| \text{ φορές}}$, $n \in \mathbb{Z}$,

δηλαδή υπάρχει συμβατότητα του συμβολισμού για τον βαθμωτό πολ/σμό με $\lambda = n \in \mathbb{Z}$, με το εσωτερικό άθροισμα $v + \cdots + v$ ($2v = v + v$ ισχύει, δεν είναι συμβολισμός).

Πράγματι, $nv = (\mathrm{sgn}\, n)\, |n|\, v = (\mathrm{sgn}\, n)\underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{|n| \text{ φορές}} v = (\mathrm{sgn}\, n)(1v + \cdots + 1v) =$

$= (\mathrm{sgn}\, n)(v + \cdots + v)$.

Άσκηση Το αξίωμα $v + u = u + v$ είναι περιττό (προκύπτει από τα άλλα).

Πράγματι $(1+1)(v+u) = (1+1)v + (1+1)u = 1v + 1v + 1u + 1u = v + v + u + u$

$= 1(v+u) + 1(v+u) = 1v + 1u + 1v + 1u = v + u + v + u$ $\Big\} \Rightarrow$

$v + v + u + u = v + u + v + u \Rightarrow v + u = u + v$

Άσκηση Το αξίωμα $1v = v$ δεν είναι περιττό, δηλαδή μπορεί να βρεθεί παράδειγμα όπου ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα, εκτός τού $1v = v$.

Πράγματι, στο F^2 ορίζουμε την πρόσθεση $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ και τον βαθμωτό πολ/σμό $\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, 0)$, $\lambda \in F$.

Τότε μπορούμε να ελέγξουμε ότι ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα,

π.χ. $\lambda[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] = \lambda(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (\lambda(a_1 + b_1), 0) = (\lambda a_1 + \lambda b_1, 0)$

$= (\lambda a_1, 0) + (\lambda b_1, 0) = \lambda(a_1, a_2) + \lambda(b_1, b_2)$

εκτός από το $1(a_1, a_2) = (1a_1, 0) = (a_1, 0) \neq (a_1, a_2)$.

Ορισμός Το $W \subseteq V$ λέγεται υπόχωρος τού V όταν το ίδιο το W με τις πράξεις του V είναι γραμμικός χώρος.
Συμβολίζουμε $W \leq V$ (ή ακόμα $W < V$ όταν $W \leq V$, $W \neq V$).

$$W \leq V \Leftrightarrow \begin{array}{l} v+u \in W, \ \forall v, u \in W \\ \lambda v \in W, \ \forall \lambda \in F, \forall v \in W \end{array} \Leftrightarrow \lambda v + \mu u \in W, \ \forall \lambda, \mu \in F, \ \forall v, u \in W$$

(W "κλειστό" ως προς $+, \cdot$)

Πράγματι, αν $W \leq V$ τότε το W δ.χ., άρα W κλειστό ως προς τις πράξεις. Αντίστροφα, αν W κλειστό ως προς τις πράξεις, τότε για $\lambda = -1 \in F$, $v \in W$ είναι $(-1)v \in W \Rightarrow -v \in W$. Εξάλλου για $\lambda = 0 \in F$, $v \in W$ είναι $0v \in W \Rightarrow 0 \in W$. (Το ίδιο βγαίνει και από $v \in W \Rightarrow -v \in W \Rightarrow v + (-v) \in W \Rightarrow 0 \in W$). Επομένως το W περιέχει το ουδέτερο 0 και το αντίθετο $-v$ κάθε $v \in W$. Επιπλέον, ως υποσύνολο του V, θα ικανοποιεί τα αξιώματα με τις πράξεις άρα W δ.χ. Άρα $W \leq V$.
Η δεύτερη ισοδυναμία είναι προφανής και αποτελεί συντόμευση του δεύτερου.

Παραδείγματα

1) $0 = \{0\} \leq V$ "τετριμμένος χώρος" ή "μηδενικός χώρος"

2) $W = \{(a_1, \ldots, a_{N-1}, 0), \ a_i \in F\} < F^N$

Άρα $\{(x,0), \ x \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^2$ "άξονας x", $\{(0,y), \ y \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^2$ "άξονας y", $\{(x,y,0), \ x,y \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^3$ "επίπεδο xy"

Ευθείες γραμμές ή επίπεδα του $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ που δεν περνούν από το 0 δεν είναι υπόχωροι, αφού δεν περιέχουν το 0 ("σύμπλοκα").

3) $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ συνεχής}\} < \mathcal{F}(\mathbb{R})$ διότι αν f, g συνεχείς τότε $f+g$ συνεχής, λf συνεχής ($\lambda \in \mathbb{R}$).

$C_1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ παραγωγίσιμη}\} < C_0(\mathbb{R}) < \mathcal{F}(\mathbb{R})$ διότι κάθε f παραγωγίσιμη είναι και συνεχής, ενώ το άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, και το γινόμενο παραγωγίσιμης συνάρτησης με $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

$$W_1, W_2 \leq V \Rightarrow W_1 \cap W_2 \leq V$$

Πράγματι, αν $v, u \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow v, u \in W_1, \ v, u \in W_2 \Rightarrow \lambda v + \mu u \in W_1, \ \lambda v + \mu u \in W_2, \ \lambda, \mu \in F$
$\Rightarrow \lambda v + \mu u \in W_1 \cap W_2, \ \lambda, \mu \in F \Rightarrow W_1 \cap W_2 \leq V$

$W_1, W_2 \leq V. \quad W_1 \cup W_2 \leq V \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2$ ή $W_2 \subseteq W_1$

Πράγματι, έστω $W_1 \cup W_2 \leq V$. Υποθέτουμε ότι κανένα από τα W_1, W_2 δεν είναι το ένα υποσύνολο του άλλου. Τότε θα βγεί άτοπο, που θα σημαίνει ότι ισχύει $W_1 \subseteq W_2$ ή $W_2 \subseteq W_1$. Πράγματι, αφού κανένα από τα W_1, W_2 δεν είναι υποσύνολο του άλλου, άρα $W_1 \not\subseteq W_2 \Rightarrow \exists v \in W_1,\ v \notin W_2 \Rightarrow v \in W_1 \cup W_2$. Είναι $\forall u \in W_2 \Rightarrow$

$$u \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow v+u \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow \begin{cases} v+u \in W_1 \Rightarrow v+u+(-v) \in W_1 \Rightarrow u \in W_1 \Rightarrow \underset{\text{άτοπο}}{W_2 \subseteq W_1} \\ \text{ή} \\ v+u \in W_2 \Rightarrow v+u+(-u) \in W_2 \Rightarrow v \in W_2 \text{ άτοπο} \end{cases}$$

Αντίστροφα, αν $\begin{cases} W_1 \subseteq W_2 \\ \text{ή} \\ W_2 \subseteq W_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_1 \cup W_2 = W_2 \leq V \\ W_1 \cup W_2 = W_1 \leq V \end{cases} \Rightarrow W_1 \cup W_2 \leq V$

Άσκηση $W_1, W_2 \leq V$, $W_1 \cup W_2 = V \Rightarrow W_1 = V$ ή $W_2 = V$

Πράγματι, αφού $W_1 \cup W_2 = V \leq V \Rightarrow W_1 \subseteq W_2$ ή $W_2 \subseteq W_1 \Rightarrow$
$W_1 \cup W_2 = W_2$ ή $W_1 \cup W_2 = W_1 \Rightarrow V = W_2$ ή $V = W_1$

$S, T \subseteq V. \quad S+T \equiv \{v+u,\ v \in S,\ u \in T\}$ "άθροισμα των S, T"

$W_1, W_2 \leq V \Rightarrow W_1, W_2 \leq W_1 + W_2 \leq V$

Πράγματι, αν $v_1 \in W_1$ τότε επειδή $0 \in W_2$, άρα $v_1 + 0 \in W_1 + W_2 \Rightarrow v_1 \in W_1 + W_2 \Rightarrow W_1 \subseteq W_1 + W_2$. Όμοια $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.
Εξάλλου, αν $v_1 + v_2,\ u_1 + u_2 \in W_1 + W_2$ με $v_1, u_1 \in W_1$, $v_2, u_2 \in W_2$ τότε
$(v_1+v_2)+(u_1+u_2) = (v_1+u_1)+(v_2+u_2) \in W_1+W_2$, αφού $v_1+u_1 \in W_1$, $v_2+u_2 \in W_2$.
Όμοια, $\lambda(v_1+v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 \in W_1 + W_2$, αφού $\lambda v_1 \in W_1$, $\lambda v_2 \in W_2$.

Επομένως, ενώ η ένωση υπόχωρων εν γένει δεν είναι υπόχωρος, ωστόσο το άθροισμα υπόχωρων είναι υπόχωρος.

Γενικεύοντας για το άθροισμα περισσότερων υποσυνόλων του V ή περισσότερων υπόχωρων του V έχουμε $W_1 + \cdots + W_k \equiv \{v_1 + \cdots + v_k,\ v_i \in W_i\}$

Παράδειγμα

$W_1 = \{(a_1, a_2, 0),\ a_1, a_2 \in F\}$, $W_2 = \{(0, b_1, b_2),\ b_1, b_2 \in F\}$

Είναι $W_1 < F^3$, $W_2 < F^3$, $F^3 = W_1 + W_2$. Παρατηρούμε ότι $W_1 \cap W_2 = \{(0, a, 0),\ a \in F\}$. Το W_1 είναι το επίπεδο xy (π.χ. των $\mathbb{R}^3$), το W_2 είναι το επίπεδο yz. Προφανώς η τομή $W_1 \cap W_2$ είναι ο άξονας y.
Εξάλλου, αν $(x, y, z) \in F^3$ και $y_1 \in F$ τότε $(x,y,z) = (x, y_1, 0) + (0, y - y_1, z) \in W_1 + W_2$.
Προφανώς, η ανάπτυξη του (x,y,z) στα W_1, W_2 δεν είναι μοναδική, αφού το y_1 είναι αυθαίρετο. Αυτό είναι και γεωμετρικώς προφανές.

$W_1, W_2 \leq V$, $W_1 \cap W_2 = 0$, $W_1 + W_2 \equiv W_1 \oplus W_2$ "ευθύ άθροισμα"

Προκειμένου για περισσότερα $W_1, \dots, W_k \leq V$, το άθροισμα $W_1 + \dots + W_k$ λέγεται ευθύ (και γράφουμε $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$) όταν κάθε W_i έχει τετριμμένη τομή με το άθροισμα των υπολοίπων. Αυτή η διατύπωση είναι διαφορετική από το να πούμε ότι η τομή των W_i ανά δύο είναι η τετριμμένη. Πράγματι, αν $W_1 = \{(a,0,0), a \in F\} < F^3$, $W_2 = \{(0,a,0), a \in F\} < F^3$, $W_3 = \{(a,a,b), a, b \in F\} < F^3$, τότε $W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = 0$. Αν $(a,b,c) \in F^3$ τότε $(a,b,c) = (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c) \in W_1 + W_2 + W_3 \Rightarrow F^3 = W_1 + W_2 + W_3$.
Αλλά $W_3 \ni (1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0) \in W_1 + W_2 \Rightarrow (1,1,0) \in (W_1 + W_2) \cap W_3$ $\Rightarrow (W_1 + W_2) \cap W_3 \neq 0 \Rightarrow W_1 + W_2 + W_3$ όχι ευθύ άθροισμα, παρότι οι τομές των W_i ανά δύο είναι τετριμμένη.

Άσκηση $V = W_1 \oplus W_2$, $W_1 \leq W \leq V \Rightarrow W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2)$

Πράγματι, αν $v \in W \Rightarrow v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2 \Rightarrow v_2 = v - v_1$.
Είναι $v_1 \in W_1 = W \cap W_1 \Rightarrow v_1 \in W \cap W_1$
Αλλά $v_1 \in W_1 \leq W \Rightarrow v_1 \in W \Rightarrow v - v_1 \in W \Rightarrow v_2 \in W \Rightarrow v_2 \in W \cap W_2$.
Άρα $v_1 + v_2 \in (W \cap W_1) + (W \cap W_2) \Rightarrow v \in (W \cap W_1) + (W \cap W_2) \Rightarrow W \leq (W \cap W_1) + (W \cap W_2)$
Εξάλλου, αν $v \in (W \cap W_1) + (W \cap W_2) \Rightarrow v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W \cap W_1 \leq W, v_2 \in W \cap W_2 \leq W$ $\Rightarrow v \in W \Rightarrow (W \cap W_1) + (W \cap W_2) \leq W$. Τελικά $W = (W \cap W_1) + (W \cap W_2)$.
Αλλά $(W \cap W_1) \cap (W \cap W_2) = W_1 \cap (W \cap W_2) = W \cap (W_1 \cap W_2) = W \cap \emptyset = \emptyset$.
Άρα $W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2)$

$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow \forall v \in W_1 + W_2, \exists! \, v_1 \in W_1, v_2 \in W_2 : v = v_1 + v_2$

Πράγματι, έστω $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$. Τότε $W_1 \cap W_2 = 0$. Αν $v \in W_1 + W_2$ τότε $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$. Θα δείξουμε ότι τα v_1, v_2 είναι μοναδικά.
Αν $\exists \, u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$ με $v = u_1 + u_2 \Rightarrow v_1 + v_2 = u_1 + u_2 \Rightarrow v_1 - u_1 = u_2 - v_2$ με $v_1 - u_1 \in W_1$, $u_2 - v_2 \in W_2 \Rightarrow v_1 - u_1, u_2 - v_2 \in W_1 \cap W_2 = 0 \Rightarrow u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.
Αντίστροφα, έστω ότι η ανάλυση του τυχόντος $v \in W_1 + W_2$ στα W_1, W_2 είναι μοναδική. Αυτό γράφεται ως εξής: $\forall v \in W_1 + W_2$, $\exists! \, v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$: $v = v_1 + v_2$. Θα δείξουμε ότι $W_1 \cap W_2 = 0$, δηλαδή ότι $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$. Έστω $u \in W_1 \cap W_2 \leq W_1, W_2 \leq W_1 + W_2$ $\Rightarrow u \in W_1 + W_2 \Rightarrow u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$. Αλλά $u = u + 0$ με $u \in W_1$, $0 \in W_2$, άρα $u_1 = u$, $u_2 = 0$. Επίσης $u = 0 + u$ με $0 \in W_1$, $u \in W_2$, άρα $u_1 = 0$, $u_2 = u$.
Επομένως, $u = 0 \Rightarrow W_1 \cap W_2 = 0$.

Προκειμένου για περισσότερα W_i στο άθροισμα έχουμε την πρόταση
$W_1 + \dots + W_k = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \Leftrightarrow \forall v \in W_1 + \dots + W_k$, $\exists! \, v_i \in W_i$: $v = v_1 + \dots + v_k$

Παρατήρηση Αν $V_1, \dots, V_N$ είναι δ.χ., ορίζουμε

$$V_1 \times \dots \times V_N \equiv \{ (v_1, \dots, v_N),\ v_i \in V_i \}$$ "(ευθύ) γινόμενο"

του είναι δ.χ. με τις πράξεις

$$(v_1, \dots, v_N) + (v_1', \dots, v_N') = (v_1 + v_1', \dots, v_N + v_N')$$

$$\lambda (v_1, \dots, v_N) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_N)$$

Ορισμός Αν $V = W_1 \oplus W_2$, $W_1, W_2 \leq V$, οι W_1, W_2 λέγονται "συμπληρωματικοί"

Ορισμός Αν $S \subseteq V$, ονομάζεται γραμμική θήκη τού S (ή υπόχωρος παραγόμενος από το S) ο υπόχωρος

$$\langle S \rangle \equiv \{ \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k ,\ \lambda_i \in F,\ s_i \in S,\ k \in \mathbb{N} \}$$

Κάθε στοιχείο της μορφής $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$ λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $s_1, \dots, s_k$.

Είναι πράγματι $\langle S \rangle \le V$, διότι αν $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$, $\mu_1 s_1', \dots, \mu_\nu s_\nu' \in \langle S \rangle$, τότε $(\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k) + (\mu_1 s_1' + \dots + \mu_\nu s_\nu') = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k + \mu_1 s_1' + \dots + \mu_\nu s_\nu' \in \langle S \rangle$

$$\lambda(\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k) = (\lambda\lambda_1) s_1 + \dots + (\lambda\lambda_k) s_k \in \langle S \rangle.$$

Άρα $\langle S \rangle$ κλειστό ως προς τις πράξεις, άρα υπόχωρος.

$$\underline{\langle S \rangle = \cap \{ W : S \subseteq W \le V \}}$$

Πράγματι, έστω $A \equiv \cap \{ W : S \subseteq W \le V \}$. Προφανώς, το A ως τομή υποχώρων του V, είναι υπόχωρος του V. Θα δείξουμε ότι $\langle S \rangle = A$. Επειδή $S \subseteq \langle S \rangle$ και $\langle S \rangle \le V$, άρα το $\langle S \rangle$ είναι ένα από τα W του A, άρα $A \le \langle S \rangle$. Έστω $v \in \langle S \rangle \Rightarrow v = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$, $\lambda_i \in F$, $s_i \in S$. Αφού $S \subseteq W \Rightarrow s_i \in W \le V \Rightarrow \lambda_i s_i \in W \Rightarrow \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k \in W$ $\Rightarrow v \in W$ και αυτό ισχύει για κάθε W με $S \subseteq W \le V$, άρα $v \in A \Rightarrow$ $\langle S \rangle \le A$. Τελικά $\langle S \rangle = A$.

Σχόλια

(1) Αν $V = \langle S \rangle$, λέμε ότι ο V παράγεται από το S ή λέμε ότι το S είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V.

2) Αν $S = \{ s_1, \dots, s_n \}$ πεπερασμένο, τότε χρησιμοποιούμε για το $\langle S \rangle$ και τους εξής συμβολισμούς $\langle S \rangle \equiv \langle s_1, \dots, s_n \rangle \equiv L(s_1, \dots, s_n)$

3) Αν $V = \langle S \rangle$, S πεπερασμένο τότε λέμε ότι ο V είναι πεπερασμένα παραγόμενος

4) Αν $v \in V$, τότε $\langle v \rangle = \{ \lambda v,\ \lambda \in F \}$

5) Αν $W \le V$, τότε $\langle W \rangle = W$.

Παραδείγματα

1) Αν $S = \{ f_n : f_n(x) = x^n,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$.
Τότε $\langle S \rangle$ = υπόχωρος πολυωνύμων του $\mathbb{R}$ $= \mathcal{P}(\mathbb{R})$

2) Αν $S = \{ e^x, e^{2x} \} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$, τότε $\langle S \rangle = \{ \lambda e^x + \mu e^{2x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} = \langle e^x, e^{2x} \rangle$

3) $V = F^N = \langle e_1, \dots, e_N \rangle$, $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{1}, 0, \dots, 0)$.

Πράγματι, $F^N \ni (a_1, \dots, a_N) = a_1 e_1 + \dots + a_N e_N$.
Άρα ο $\mathbb{R}^3$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος, από τα $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

$S, S' \subseteq V \Rightarrow \langle S\rangle + \langle S'\rangle = \langle S\cup S'\rangle$

Πράγματι, αν $v \in \langle S\rangle + \langle S'\rangle \Rightarrow v = u+u'$, $u\in\langle S\rangle$, $u'\in\langle S'\rangle$
$\Rightarrow v = (\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_\kappa s_\kappa) + (\lambda_1' s_1' + \dots + \lambda_\nu' s_\nu')$, $s_i \in S$, $s_i' \in S'$
$\Rightarrow v = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_\kappa s_\kappa + \lambda_1' s_1' + \dots + \lambda_\nu' s_\nu'$, $s_i, s_i' \in S\cup S'$
$\Rightarrow v \in \langle S\cup S'\rangle \Rightarrow \langle S\rangle + \langle S'\rangle \subseteq \langle S\cup S'\rangle$
Αν $v\in\langle S\cup S'\rangle \Rightarrow v = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_\kappa s_\kappa + \lambda_1' s_1' + \dots + \lambda_\nu' s_\nu'$, $s_i\in S$, $s_i'\in S'$
$\Rightarrow v = u+u'$, $u = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_\kappa s_\kappa \in \langle S\rangle$, $u' = \lambda_1' s_1' + \dots + \lambda_\nu' s_\nu' \in \langle S'\rangle$
$\Rightarrow v \in \langle S\rangle + \langle S'\rangle \Rightarrow \langle S\cup S'\rangle \subseteq \langle S\rangle + \langle S'\rangle$.
Τελικά $\langle S\rangle + \langle S'\rangle = \langle S\cup S'\rangle$.

$\langle v_1, \dots, v_n\rangle = \langle v_1\rangle + \dots + \langle v_n\rangle$

(άμεση συνέπεια του προηγουμένου, ισχύει ακόμα και όταν δεν είναι όλα τα v_i διαφορετικά).

$W_1, W_2 \leq V \Rightarrow W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2\rangle$

(διότι $\langle W\rangle = W$).

Άσκηση $F^N = \langle e_1\rangle \oplus \dots \oplus \langle e_N\rangle$, $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{1}, 0, \dots, 0)$

Πράγματι, $F^N = \langle e_1, \dots, e_N\rangle = \langle e_1\rangle + \dots + \langle e_N\rangle$.
Περαιτέρω, ένα στοιχείο του $\langle e_1\rangle + \dots + \langle e_{i-1}\rangle + \langle e_{i+1}\rangle + \dots + \langle e_N\rangle$ είναι της μορφής $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{i-1} e_{i-1} + \lambda_{i+1} e_{i+1} + \dots + \lambda_N e_N = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_N)$
ενώ ένα στοιχείο του $\langle e_i\rangle$ είναι της μορφής $\lambda_i e_i = (0, \dots, 0, \lambda_i, 0, \dots, 0)$.
Επομένως $(\langle e_1\rangle + \dots + \langle e_{i-1}\rangle + \langle e_{i+1}\rangle + \dots + \langle e_N\rangle) \cap \langle e_i\rangle = 0$ $\forall i = 1, \dots, N$
άρα $\langle e_1\rangle + \dots + \langle e_N\rangle = \langle e_1\rangle \oplus \dots \oplus \langle e_N\rangle \Rightarrow F^N = \langle e_1\rangle \oplus \dots \oplus \langle e_N\rangle$.

<u>Ορισμός</u> Το $S \subseteq V$ λέγεται γραμμικώς εξαρτημένο αν υπάρχουν $s_1, \dots, s_k \in S$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0)$ έτσι ώστε $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k = 0$.
Το S λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο όταν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο, δηλαδή για κάθε $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k = 0$, $s_i \in S$, $\lambda_i \in F \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$
(Λέμε ακόμη ότι τα διανύσματα τού S είναι γραμμικά εξαρτημένα ή ανεξάρτητα).
(Αν ένα διάνυσμα είναι γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων τού S, λέμε ότι το διάνυσμά είναι Γρ. Εξ. από το S).

<u>Παραδείγματα</u>

1) Το $S = \emptyset$ θεωρείται Γρ. Ανεξ. αφού δεν μπορούν να βρεθούν στοιχεία τού S και του F ώστε να ικανοποιείται η σχέση γραμμικής εξάρτησης
2) Το $S = \{0\}$ είναι Γρ. Εξ. διότι $\lambda 0 = 0$ με $\lambda \neq 0$
Το $S = \{s\}$, $s \neq 0$ είναι Γρ. Ανεξ. διότι $\lambda s = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ή $s = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.
3) Αν $V = F^N$, το $S = \{e_1, \dots, e_N\}$, $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{1}, 0, \dots, 0)$ είναι Γρ. Ανεξ.
Πράγματι, αν $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_N e_N = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_N) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$.
4) Αν $V = \mathbb{R}^3$, το $S = \{(1,-1,0), (-1,0,-1), (1,2,3)\}$ είναι Γρ. Εξ., διότι
$2 \cdot (1,-1,0) + 3 \cdot (-1,0,-1) + 1 \cdot (1,2,3) = (0,0,0)$
5) Αν $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, το $S = \{e^x, e^{2x}\}$ είναι Γρ. Ανεξ.
Πράγματι αν $\lambda e^x + \mu e^{2x} = 0 \Rightarrow (\lambda e^x + \mu e^{2x})' = 0 \Rightarrow \lambda e^x + 2\mu e^{2x} = 0$
$\Rightarrow \mu e^{2x} = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \lambda e^x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.
Διαφορετικά, και πιο γενικά, μπορούμε να θεωρήσουμε διάφορα συγκεκριμένα x_i και τότε η εξίσωση $\lambda e^x + \mu e^{2x} = 0$ θα πρέπει να ισχύει για καθένα από αυτά τα x_i, δηλαδή να ισχύει $\lambda e^{x_i} + \mu e^{2x_i} = 0$. Αυτό, ως αλγεβρικό σύστημα για τα λ, μ δίνει $\lambda = \mu = 0$. π.χ. αν πάρουμε $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, οπότε $\lambda + \mu = 0$, $\lambda e + \mu e^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$. Δεν χρειάζεται εδώ να πάρουμε περισσότερα x_i γιατί το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

$S \subseteq S' \subseteq V$. $\quad S$ Γρ. Εξ. $\Rightarrow S'$ Γρ. Εξ.
$\quad S'$ Γρ. Ανεξ. $\Rightarrow S$ Γρ. Ανεξ.

Πράγματι, έστω S Γρ. Εξ. $\Rightarrow \exists\, s_1, \dots, s_k \in S$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$ όχι όλα μηδενικά με $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k = 0$. Αλλά $S \subseteq S' \Rightarrow \exists\, s_1, \dots, s_k \in S'$ με $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k = 0$
$\Rightarrow S'$ Γρ. Εξ.
Αντίστροφα, έστω S' Γρ. Ανεξ. Αν το S ήταν Γρ. Εξ. τότε το $S' \supseteq S$ θα ήταν Γρ. Εξ., άτοπο. Άρα S Γρ. Ανεξ.

<u>Σχόλιο</u> $0 \in S \Rightarrow S$ Γρ. Εξ.
Πράγματι, αν $0 \in S \Rightarrow \{0\} \subseteq S$. Αλλά $\{0\}$ Γρ. Εξ. $\Rightarrow S$ Γρ. Εξ.

$v_1, \dots, v_k \in V$ Γρ. Εξ. $\Leftrightarrow$ $\exists\, v_i$ Γρ. Εξ. από τα υπόλοιπα

Πράγματι, αν $v_1, \dots, v_k$ Γρ. Εξ. $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots \lambda_k \in F$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0)$ με $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$. Αν π.χ. $\lambda_1 \neq 0$ τότε $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} v_k$, άρα το v_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_2, \dots, v_k$, άρα το v_1 είναι Γρ. Εξ. από τα $v_2, \dots, v_k$.

Αντίστροφα, έστω το v_1 είναι Γρ. Εξ. από τα $v_2, \dots, v_k$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \Rightarrow 1 \cdot v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_k v_k = 0$ με
$(1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$ αφού τουλάχιστον $1 \neq 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_k$ Γρ. Εξ.

$v_1, \dots, v_k$ Γρ. Ανεξ. , $u, v_1, \dots, v_k$ Γρ. Εξ. $\Rightarrow u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$

Πράγματι, αφού $u, v_1, \dots, v_k$ Γρ. Εξ. $\Rightarrow \exists\, \mu, \mu_1, \dots, \mu_k \in F$ όχι όλα μηδέν με $\mu u + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k = 0$. Είναι $\mu \neq 0$, διότι αν ήταν $\mu = 0$ τότε θα υπήρχαν $\mu_1, \dots, \mu_k$ όχι όλα μηδέν με $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k = 0$, δηλαδή τα $v_1, \dots, v_k$ θα ήταν Γρ. Εξ. (άτοπο). Αφού $\mu \neq 0$, άρα
$u = -\frac{\mu_1}{\mu} v_1 - \dots - \frac{\mu_k}{\mu} v_k = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$.

$v_1, \dots, v_k$ Γρ. Ανεξ., $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k \Rightarrow \lambda_i = \mu_i$, $\forall i = 1, \dots, k$

(δηλαδή η ανάπτυξη κάποιου διανύσματος σε Γρ. Ανεξ. διανύσματα είναι μοναδική)

Πράγματι, αν $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k \Rightarrow$
$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_k - \mu_k) v_k = 0$. Αλλά $v_1, \dots, v_k$ Γρ. Ανεξ., άρα
$\lambda_i - \mu_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, k \Rightarrow \lambda_i = \mu_i$, $\forall i = 1, \dots, k$.

Βασικό θεώρημα ανεξαρτησίας

$v_1, \dots, v_k \in V \Rightarrow \langle v_1, \dots, v_k \rangle \ni u_1, \dots, u_p$ $(p > k)$ Γρ. Εξ.

Απόδειξη

Αφού $u_1, \dots, u_p \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle \Rightarrow u_i = \lambda_{i1} v_1 + \dots + \lambda_{ik} v_k$, $i = 1, \dots, p > k \Rightarrow u_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} v_j$, $i = 1, \dots, p$

Θεωρούμε το Γραμμικό ομογενές σύστημα $\begin{cases} \lambda_{11} \mu_1 + \dots + \lambda_{p1} \mu_p = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{1k} \mu_1 + \dots + \lambda_{pk} \mu_p = 0 \end{cases}$ με αγνώστους τα $\mu_1, \dots, \mu_p$.

Το σύστημα αυτό έχει k εξισώσεις και $p > k$ αγνώστους, άρα υπάρχει λύση $(\mu_1, \dots, \mu_p) \neq (0, \dots, 0)$

Το σύστημα γράφεται και ως $\lambda_{1j} \mu_1 + \dots + \lambda_{pj} \mu_p = 0$, $j = 1, \dots, k$ ή ακόμα και ως $\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} \mu_i = 0$, $j = 1, \dots, k$. Άρα, με βάση τα παραπάνω $\exists\, (\mu_1, \dots, \mu_p) \neq (0, \dots, 0)$ ώστε $\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} \mu_i = 0$, $j = 1, \dots, k$

Αυτό το $(\mu_1, \dots, \mu_p) \neq (0, \dots, 0)$ ικανοποιεί $\mu_1 u_1 + \dots + \mu_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \mu_i u_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} \mu_i \right) v_j = 0$

άρα τα $u_1, \dots, u_p$ Γρ. Εξ.

Μια πρόταση πιο γενική απ' αυτή είναι το

Λήμμα της ανταλλαγής

$V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq V$ Γρ. Ανεξ. $\Rightarrow$ $k \leq n$

$\langle u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle = V$

εν ανάγκη αλλάζοντας την αρίθμηση των v_i

Απόδειξη

Αφού $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, άρα $u_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Δεν μπορεί όλα τα $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ γιατί τότε $u_1 = 0$, άρα το $\{u_1, \dots, u_k\}$ θα ήταν Γρ. Εξ. Άρα υπάρχει π.χ. $\lambda_1 \neq 0$, οπότε $v_1 = -\frac{1}{\lambda_1} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \Rightarrow v_1 \in \langle u_1, v_2, \dots, v_n \rangle = V$ $\Rightarrow u_2 = \mu_1 u_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$. Δε μπορούν όλα τα $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$, γιατί τότε $u_2 = \mu_1 u_1$ άτοπο. Άρα υπάρχει π.χ. $\mu_2 \neq 0$, οπότε $v_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2} u_1 + \frac{1}{\mu_2} u_2 - \frac{\mu_3}{\mu_2} v_3 - \dots - \frac{\mu_n}{\mu_2} v_n$ $\Rightarrow v_2 \in \langle u_1, u_2, v_3, \dots, v_n \rangle = V$.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία διαπιστώνουμε ότι $k \leq n$ διότι αν $k > n$ τότε θα είχαμε $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = V$ και θα υπήρχαν ακόμη τα $u_{n+1}, \dots, u_k$ με $\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_k\}$ Γρ. Ανεξ. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι αφού $\langle u_1, \dots, u_n \rangle = V$, άρα π.χ. το u_{n+1} θα ήταν γραμμικός συνδυασμός των $u_1, \dots, u_n$. Επομένως καταλήγουμε ότι $k \leq n$ και $\langle u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle = V$.

(Από το λήμμα προκύπτει άμεσα το Βασικό θεώρημα ανεξαρτησίας. Πράγματι, αν $v_1, \dots, v_k \in V$, θεωρώ το $W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ και έστω τα $u_1, \dots, u_p \in W$, $p > k$. Τα $u_1, \dots, u_p$ είναι Γρ. Εξ., διότι αν υποθέσουμε ότι τα $u_1, \dots, u_p$ είναι Γρ. Ανεξ. τότε από το λήμμα θα ήταν $p \leq k$ άτοπο. Άρα δείξαμε ότι αν $u_1, \dots, u_p \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, $p > k$, τότε $u_1, \dots, u_p$ Γρ. Εξ.)

Μέχρι τώρα έχουμε εισάγει δύο έννοιες, της γραμμικής θήκης και της Γραμμικής ανεξαρτησίας. Ο συνδυασμός τους οδηγεί στην έννοια της βάσης.

<u>Ορισμός</u> Το $S \subseteq V$ λέγεται βάση του V όταν $V = \langle S \rangle$ και S Γρ. Ανεξ.

Δηλαδή βάση είναι ένα Γρ. Ανεξ. σύνολο διανυσμάτων που παράγουν το χώρο.

<u>Παραδείγματα</u>

1) Αν $V = F^N$, το $S = \{e_1, \dots, e_N\}$, $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ είναι βάση του F^N ("κανονική βάση")
Πράγματι, έχουμε δει ότι $V = F^N = \langle e_1, \dots, e_N \rangle$ και ότι $\{e_1, \dots, e_N\}$ Γρ. Ανεξ.

2) Το $S = \{(1,1), (-1,2)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.
Θα δείξουμε ότι τα διανύσματα $(1,1)$, $(-1,2)$ είναι Γρ. Ανεξ.
Αν $\lambda(1,1) + \mu(-1,2) = (0,0) \Rightarrow (\lambda - \mu, \lambda + 2\mu) = (0,0) \Rightarrow \lambda - \mu = 0, \lambda + 2\mu = 0$
$\Rightarrow \lambda = \mu = 0$.
Θα δείξουμε ότι τα $(1,1)$, $(-1,2)$ παράγουν το $\mathbb{R}^2$. Αν $v = (x,y)$ τυχόν στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε $(x,y) = \lambda(1,1) + \mu(-1,2) \Leftrightarrow (x,y) = (\lambda - \mu, \lambda + 2\mu) \Leftrightarrow$
$x = \lambda - \mu$, $y = \lambda + 2\mu \Leftrightarrow \lambda = \frac{2x+y}{3}$, $\mu = \frac{y-x}{3}$.

3) Αν $V =$ χώρος πολυωνύμων στο $\mathbb{R}$, τότε το $S = \{f_n : f_n(x) = x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ βάση του V.
Πράγματι, έχουμε δεί και είναι προφανές ότι $V = \langle S \rangle$.
Επιπλέον, S Γρ. Ανεξ., διότι αν $\lambda_n f_n + \lambda_{n-1} f_{n-1} + \dots + \lambda_1 f_1 + \lambda_0 f_0 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_n f_n(x) + \lambda_{n-1} f_{n-1}(x) + \dots + \lambda_1 f_1(x) + \lambda_0 f_0(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\lambda_n x^n + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lambda_1 x + \lambda_0 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$
αφού για κάθε τιμή του x δημιουργείται μία αλγεβρική εξίσωση για τα λ_i, και υπάρχουν άπειρες τιμές του x.

Στο παράδειγμα αυτό η βάση S έχει άπειρο πλήθος στοιχείων, και λαμβάνουμε πεπερασμένα (προφανώς) αθροίσματα. Χώροι που έχουν βάσεις με άπειρο πλήθος στοιχείων λέγονται απειροδιάστατοι (ή καλύτερα λέμε ότι δεν έχουν πεπερασμένη βάση). Επομένως, ο χώρος των πολυωνύμων είναι απειροδιάστατος δ.χ. Διάφορες προτάσεις της παρούσας θεωρίας γραμμικής άλγεβρας (όχι όμως όλες) ισχύουν και για απειροδιάστατους δ.χ.

Υπάρχουν επίσης περιπτώσεις απειροδιάστατων χώρων στο πλαίσιο άλλων μαθήματος (όπου υπάρχει και η έννοια της απόστασης - σύγκλισης) όπου μπορεί κανείς να ορίσει απειροαθροίσματα σ' ένα ανεξάρτητο απαροσύνολο S και έτσι να παράγει τον V (άρα το S να έχει μία διευρυμένη έννοια βάσης και λέγεται πλήρες σύνολο ή ακόμα και βάση). π.χ. συναρτησιακοί χώροι.

Πρόταση

Κάθε πεπερασμένα παραγόμενος δ.χ. έχει βάση.

Απόδειξη

Τούτο είναι ευλογοφανές διότι αν από το υπάρχον πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων που παράγουν τον V πάρουμε ένα ανεξάρτητο υποσύνολο που παράγει τα υπόλοιπα, τότε αυτό το υποσύνολο είναι βάση.

Αν θέλουμε είμαστε και πιο τυπικοί λέγοντας:

αφού V πεπερασμένα παραγόμενος, άρα $\exists\ v_1,\dots,v_n \in V$ με $V=\langle v_1,\dots,v_n\rangle$.

Αν $v_1,\dots,v_n$ Γρ. Ανεξ. τότε $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ βάση του V.

Αν $v_1,\dots,v_n$ Γρ. Εξ. τότε $\exists\ v_k$, $k\in\{1,\dots,n\}$ ώστε $v_k\in\langle v_1,\dots,v_{k-1},v_{k+1},\dots,v_n\rangle$

Έστω για ευκολία, χωρίς βλάβη της γενικότητας (με πιθανή αναδιάταξη των στοιχείων) είναι $k=n$, δηλαδή $v_n\in\langle v_1,\dots,v_{n-1}\rangle$ (π.χ. αν $v_n=0$, τότε $0=v_n=0v_1+\dots+0v_{n-1}$).

Τότε $V=\langle v_1,\dots,v_{n-1}\rangle$ διότι το τυχόν $V\ni v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_{n-1}v_{n-1}+\lambda_nv_n =$

$= \lambda_1v_1+\dots+\lambda_{n-1}v_{n-1}+\lambda_n(\mu_1v_1+\dots+\mu_{n-1}v_{n-1}) = (\lambda_1+\lambda_n\mu_1)v_1+\dots+(\lambda_{n-1}+\lambda_n\mu_{n-1})v_{n-1}$.

Αν $v_1,\dots,v_{n-1}$ Γρ. Ανεξ. τότε το $B=\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$ βάση του V.

Αν $v_1,\dots,v_{n-1}$ Γρ. Εξ. τότε ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία πετώντας κάθε στοιχείο που γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων και καταλήγουμε σ' ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο που παράγει τον V (άρα είναι βάση).

Άσκηση

$\{v_1,\dots,v_n\}$ βάση V, $\{v_1,\dots,v_n\}=\{v_1,\dots,v_k\}\cup\{v_k,\dots,v_n\}$ $(k\le n)$ $\Rightarrow V=\langle v_1,\dots,v_k\rangle\oplus\langle v_{k+1},\dots,v_n\rangle$.

Πράγματι, αφού $\{v_1,\dots,v_n\}$ βάση, άρα $V=\langle v_1,\dots,v_n\rangle=\langle\{v_1,\dots,v_k\}\cup\{v_{k+1},\dots,v_n\}\rangle=$ $\langle v_1,\dots,v_k\rangle+\langle v_{k+1},\dots,v_n\rangle$. Επιπλέον, αν $u\in\langle v_1,\dots,v_k\rangle\cap\langle v_{k+1},\dots,v_n\rangle$ τότε

$u=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_kv_k=\lambda_{k+1}v_{k+1}+\dots+\lambda_nv_n \Rightarrow \lambda_1v_1+\dots+\lambda_kv_k-\lambda_{k+1}v_{k+1}-\dots-\lambda_nv_n=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0 \Rightarrow u=0 \Rightarrow \langle v_1,\dots,v_k\rangle\cap\langle v_{n+1},\dots,v_n\rangle=\phi \Rightarrow V=\langle v_1,\dots,v_k\rangle\oplus\langle v_{k+1},\dots,v_n\rangle$

$\{v_1,\dots,v_n\}$ βάση $V \Rightarrow \forall v\in V$, $\exists!\ \lambda_1,\dots,\lambda_n\in F:\ v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n$ (λ_i "συντεταγμένες" του v στη βάση $\{v_1,\dots,v_n\}$)

$$V=\langle v_1\rangle\oplus\dots\oplus\langle v_n\rangle$$

Πράγματι, αφού $\{v_1,\dots,v_n\}$ βάση του $V \Rightarrow \forall v\in V$, $\exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_n\in F:\ v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n$.

Αλλά $\{v_1,\dots,v_n\}$ Γρ. Ανεξ. $\Rightarrow \lambda_1,\dots,\lambda_n$ μοναδικά. Περαιτέρω, η ανάπτυξη $v=u_1+\dots+u_n$ με $u_i=\lambda_iv_i\in\langle v_i\rangle$ είναι μοναδική, διότι αν υπήρχαν $u_i'\in\langle v_i\rangle$ με $u=u_1'+\dots+u_n'$ τότε $\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n=\mu_1v_1+\dots+\mu_nv_n \Rightarrow \lambda_i=\mu_i$.

Εξάλλου $V=\langle v_1,\dots,v_n\rangle=\langle v_1\rangle+\dots+\langle v_n\rangle$ όπου όπως δείξαμε η ανάπτυξη κάθε $v\in V$ στο $\langle v_1\rangle+\dots+\langle v_n\rangle$ είναι μοναδική, άρα $\langle v_1\rangle+\dots+\langle v_n\rangle=\langle v_1\rangle\oplus\dots\oplus\langle v_n\rangle$, δηλ. $V=\langle v_1\rangle\oplus\dots\oplus\langle v_n\rangle$. Ή αλλιώς είναι φανερό ότι αν $v_1,\dots,v_n$ Γρ. Ανεξ. τότε $\langle v_1\rangle+\dots+\langle v_n\rangle=\langle v_1\rangle\oplus\dots\oplus\langle v_n\rangle$, αφού αν π.χ. $u\in(\langle v_1\rangle+\dots+\langle v_{n-1}\rangle)\cap\langle v_n\rangle$ τότε

$u=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_{n-1}v_{n-1}=\lambda_nv_n \Rightarrow \lambda_1v_1+\dots+\lambda_{n-1}v_{n-1}-\lambda_nv_n=0 \Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0 \Rightarrow u=0 \Rightarrow$

$(\langle v_1\rangle+\dots+\langle v_{n-1}\rangle)\cap\langle v_n\rangle=0$

Θεώρημα

V πεπερασμένα παραγόμενος $\Rightarrow$ κάθε βάση του V έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων

Απόδειξη

Έστω $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{u_1, \dots, u_m\}$ βάσεις τού V. Είναι $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, $\{u_1, \dots, u_m\}$ Γρ. Ανεξ., άρα από το λήμμα της ανταλλαγής είναι $m \leq n$.
Όμοια, $V = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ και $\{v_1, \dots, v_n\}$ Γρ. Ανεξ., άρα $n \leq m$. Τελικά $n = m$

Ορισμός Διάσταση ($\dim V$) ενός πεπερασμένα παραγόμενου δ.χ. V λέγεται το πλήθος των στοιχείων οποιασδήποτε βάσης.

1ο Κριτήριο βάσης

V πεπερασμένα παραγόμενος. $\{v_1, \dots, v_n\}$ βάση $V \Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ Γρ. Ανεξ. και n = μέγιστο

Απόδειξη

Έστω $\{v_1, \dots, v_n\}$ βάση V. Τότε $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ και $\{v_1, \dots, v_n\}$ Γρ. Ανεξ.
Θεωρούμε ένα άλλο Γρ. Ανεξ. σύνολο $\{u_1, \dots, u_m\}$. Από το λήμμα ανταλλαγής είναι $m \leq n \Leftrightarrow n \geq m$. Δηλαδή το $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι μέγιστο Γρ. Ανεξ. σύνολο.
Αντίστροφα, έστω το $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι μέγιστο Γρ. Ανεξ. σύνολο. Τότε, η προσθήκη σ' αυτό οποιουδήποτε ακόμα στοιχείου $u \in V$, κάνει το $\{u, v_1, \dots, v_n\}$ Γρ. Εξ., άρα, ως γνωστόν, το κάθε u είναι Γρ. Εξ. από τα $v_1, \dots, v_n$. Άρα $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, άρα $\{v_1, \dots, v_n\}$ βάση V.

2ο Κριτήριο βάσης

V πεπερασμένα παραγόμενος. $\{v_1, \dots, v_n\}$ βάση $V \Leftrightarrow V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ και n = ελάχιστο

Απόδειξη

Έστω $\{v_1, \dots, v_n\}$ βάση V. Τότε $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ και $\{v_1, \dots, v_n\}$ Γρ. Ανεξ.
Θεωρούμε ένα άλλο σύνολο $\{u_1, \dots, u_m\}$ που παράγει τον V, δηλ. $V = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$.
Από το λήμμα ανταλλαγής είναι $n \leq m$. Δηλαδή το $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι ελάχιστο σύνολο που παράγει τον V.
Αντίστροφα, έστω το $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι ελάχιστο σύνολο που παράγει τον V, δηλ. $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.
Άρα, αν αφαιρεθεί από το $\{v_1, \dots, v_n\}$ ένα οποιοδήποτε στοιχείο του, τότε το υπόλοιπο σύνολο δεν παράγει το V. Άρα, κανένα στοιχείο του $\{v_1, \dots, v_n\}$ δεν είναι Γρ. Εξ. από τα υπόλοιπα (διότι ακριβώς αν ήταν, το υπόλοιπο σύνολο θα παρήγαγε τον V). Άρα, όλα μαζί τα $v_1, \dots, v_n$ είναι Γρ. Ανεξ. Τελικά $\{v_1, \dots, v_n\}$ βάση.

(Γνωρίζουμε την πρόταση ότι αν κάποια διανύσματα είναι Γρ. Εξ., τότε κάποιο εξ' αυτών είναι Γρ. Εξ. από τα υπόλοιπα.
Επομένως, γνωρίζουμε και την αντιθετοαντίστροφη πρόταση ότι αν κανένα από κάποια διανύσματα δεν είναι Γρ. Εξ. από τα υπόλοιπα, τότε όλα μαζί είναι Γρ. Ανεξ.)

Παρατηρήσεις

1) V πεπερασμένα παραγόμενος, $S \subseteq V$ Γρ. Ανεξ. $\Rightarrow$ το S μπορεί να επεκταθεί σε βάση του V.

Πράγματι, έστω $\{v_1, \dots, v_n\}$ βάση V, δηλ. $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ και $\{v_1, \dots, v_n\}$ Γρ. Ανεξ.
Τότε, αφού το S είναι Γρ. Ανεξ. οφείλει να έχει αριθμό στοιχείων το πολύ n, δηλ. οφείλει το S να είναι πεπερασμένο με $S = \{u_1, \dots, u_k\}$, $k \leq n$.
Άρα, από το λήμμα ανταλλαγής είναι $\langle u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle = V$. Επομένως το $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ παράγει τον V και έχει n το πλήθος στοιχεία, δηλαδή όσα η διάσταση του V (δηλ. ο ελάχιστος αριθμός για σύνολο που παράγει το V), άρα το $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ είναι βάση του V.

2) V πεπερασμένα παραγόμενος, $W \leq V$ $\Rightarrow$ Κάθε βάση του W μπορεί να επεκταθεί σε βάση του V.

Πράγματι, αν S είναι βάση του W, τότε $S \subseteq V$ Γρ. Ανεξ. Άρα, με βάση το προηγούμενο το S μπορεί να επεκταθεί σε βάση του V.

3) V πεπερασμένα παραγόμενος, $W \leq V$ $\Rightarrow$ $\exists\, W' \leq V : V = W \oplus W'$
(δηλαδή, για κάθε υπόχωρο του V υπάρχει συμπληρωματικός του)

Πράγματι, αν $\{u_1, \dots, u_k\}$ βάση του W, τότε $W = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$. Το σύνολο $\{u_1, \dots, u_k\}$ μπορεί σύμφωνα με το προηγούμενο να επεκταθεί σε βάση του V, δηλαδή $\exists\, v_{k+1}, \dots, v_n \in V$ ώστε $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ βάση V

$\Rightarrow V = \langle u_1, \dots, u_k \rangle \oplus \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$ (από προηγούμενη άσκηση)

$\Rightarrow V = W \oplus W'$, $W' \equiv \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle \leq V$

<u>Άσκηση</u> $W_1 \le W_2 \le V \Rightarrow \dim W_1 \le \dim W_2$ [ο V μπορεί να είναι και απειροδιάστατος]

Πράγματι, έστω $\dim W_1 > \dim W_2$. Ξέρουμε ότι υπάρχουν $\dim W_1$ το πλήθος Γρ. Ανεξ. διανύσματα του W_1, και αφού $W_1 \le W_2$, άρα υπάρχουν $\dim W_1 > \dim W_2$ το πλήθος Γρ. Ανεξ. διανύσματα του W_2, άτοπο.

<u>Άσκηση</u> $W_1 \le W_2 \le V$, $\dim W_1 = \dim W_2 \Rightarrow W_1 = W_2$ [ο V μπορεί να είναι και απειροδιάστατος]

Αν $\{v_1, \dots, v_n\}$, $n = \dim W_1$ $(= \dim W_2)$ βάση $W_1 \Rightarrow$
$v_1, \dots, v_n$ Γρ. Ανεξ. διανύσματα του $W_1 \Rightarrow$
$v_1, \dots, v_n$ Γρ. Ανεξ. διανύσματα του W_2 και πλήθους $n = \dim W_2 \Rightarrow$
$\{v_1, \dots, v_n\}$ βάση $W_2 \Rightarrow W_1 = W_2$.

<u>$W_1, W_2 \le V \Rightarrow \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$</u> [ο V μπορεί να είναι και απειροδιάστατος]

Πράγματι, έστω $\{v_1, \dots, v_\kappa\}$ βάση $W_1 \cap W_2 \le W_1, W_2$. Τότε το $\{v_1, \dots, v_\kappa\}$ επεκτείνεται σε βάση $\{v_1, \dots, v_\kappa, u_1, \dots, u_\nu\}$ του W_1 και σε βάση $\{v_1, \dots, v_\kappa, s_1, \dots, s_\rho\}$ του W_2. Επομένως, $\dim(W_1 \cap W_2) = \kappa$, $\dim W_1 = \kappa + \nu$, $\dim W_2 = \kappa + \rho$. Προφανώς $W_1 + W_2 = \langle \{v_1, \dots, v_\kappa, u_1, \dots, u_\nu\} \cup \{v_1, \dots, v_\kappa, s_1, \dots, s_\rho\} \rangle = \langle v_1, \dots, v_\kappa, u_1, \dots, u_\nu, s_1, \dots, s_\rho \rangle$.
Θα δείξουμε ότι το $\{v_1, \dots, v_\kappa, u_1, \dots, u_\nu, s_1, \dots, s_\rho\}$ είναι Γρ. Ανεξ., επομένως θα είναι $\dim(W_1 + W_2) = \kappa + \nu + \rho = (\kappa + \nu) + (\kappa + \rho) - \kappa = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Έχουμε $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_\kappa v_\kappa + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_\nu u_\nu + \xi_1 s_1 + \dots + \xi_\rho s_\rho = 0$
$\Rightarrow \xi_1 s_1 + \dots + \xi_\rho s_\rho = -\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_\kappa v_\kappa - \mu_1 u_1 - \dots - \mu_\nu u_\nu$

Αλλά $\xi_1 s_1 + \dots + \xi_\rho s_\rho \in W_2$, $-\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_\kappa v_\kappa - \mu_1 u_1 - \dots - \mu_\nu u_\nu \in W_1$
$\Rightarrow \xi_1 s_1 + \dots + \xi_\rho s_\rho \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \xi_1 s_1 + \dots + \xi_\rho s_\rho = \zeta_1 v_1 + \dots + \zeta_\kappa v_\kappa$
$\Rightarrow -\zeta_1 v_1 - \dots - \zeta_\kappa v_\kappa + \xi_1 s_1 + \dots + \xi_\rho s_\rho = 0$
$\Rightarrow \zeta_1 = \dots = \zeta_\kappa = \xi_1 = \dots = \xi_\rho = 0$, αφού $\{v_1, \dots, v_\kappa, s_1, \dots, s_\rho\}$ βάση W_2.

Άρα $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_\kappa v_\kappa + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_\nu u_\nu = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_\kappa = \mu_1 = \dots = \mu_\nu = 0$, αφού $\{v_1, \dots, v_\kappa, u_1, \dots, u_\nu\}$ βάση W_1.

Τελικά $\lambda_1 = \dots = \lambda_\kappa = \mu_1 = \dots = \mu_\nu = \xi_1 = \dots = \xi_\rho = 0$, δηλαδή $v_1, \dots, v_\kappa, u_1, \dots, u_\nu, s_1, \dots, s_\rho$ Γρ. Ανεξ.

<u>$W_1, W_2 \le V$. $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$</u> [ο V μπορεί να είναι και απειροδιάστατος]

Πράγματι, $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 \Leftrightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 0 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = 0 \Leftrightarrow$
$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$

<u>$W_1, W_2 \le V$. $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$</u> [ο V μπορεί να είναι και απειροδιάστατος]

Άσκηση.

$V = W_1 \oplus W_2$, $W_1, W_2 \leq V$, $\{v_1, \dots, v_\kappa\}$ βάση W_1 , $\{u_1, \dots, u_\rho\}$ βάση W_2

$\Rightarrow$ $\{v_1, \dots, v_\kappa, u_1, \dots, u_\rho\}$ βάση V

Είναι $\dim V = \dim (W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 = \kappa + \rho$.

Επίσης $\langle v_1, \dots, v_\kappa, u_1, \dots u_\rho \rangle = \langle v_1, \dots, v_\kappa \rangle + \langle u_1, \dots, u_\rho \rangle = W_1 \oplus W_2 = V$.

Άρα το σύνολο $\{v_1, \dots, v_\kappa, u_1, \dots, u_\rho\}$ παράγει το V και είναι πλήθους $\kappa + \rho = \dim V$. Άρα $\{v_1, \dots, v_\kappa, u_1, \dots, u_\rho\}$ βάση V.