ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική Ι

Σημειώσεις – Βαρύτητα

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

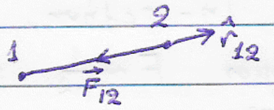
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Βαρύτητα

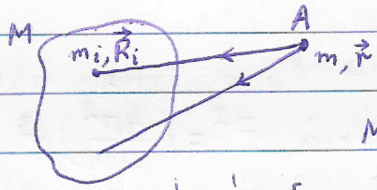
Νόμος παγκόσμιας έλξης του Newton για τις σημειακές μάζες m_1, m_2 ανεξάρτητα του μέσου που βρίσκεται ανάμεσα στα δύο σωμάτια

$$\vec{F}_{12} = -\frac{G m_1 m_2}{r^3}\vec{r}_{12} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$$



$$U(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε πεπερασμένα σωμάτια και όχι σημειακά.



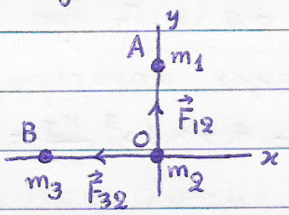
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{G m_i m}{|\vec{R}_i - \vec{r}|^3}(\vec{R}_i - \vec{r}) = \int_V dV \frac{G m \rho(\vec{R})}{|\vec{R}-\vec{r}|^3}(\vec{R}-\vec{r})$$

Μέσω δύναμης είναι πιο δύσκολος ο υπολογισμός, ενώ μέσω δυναμικού ευκολότερος $U(\vec{r}) = -\int_V dV \frac{G m \rho(\vec{R})}{|\vec{R}-\vec{r}|}$, $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$

Ένταση πεδίου βαρύτητας $\vec{g}(\vec{r}) = \int_V dV \frac{G\rho(\vec{R})}{|\vec{R}-\vec{r}|^3}(\vec{R}-\vec{r})$

Το G μετρήθηκε με το ζυγό του Cavendish και έχει την τιμή $G = 6.672 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$, όπου ελέγχονται και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά του νόμου.

<u>Παράδειγμα</u>



$m_1 = 2kg$, $m_2 = 4kg$, $m_3 = 6kg$
$A = (0,3)$, $B = (-4,0)$ (m)

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{j} = \left(6.67\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(2kg)(4kg)}{(3m)^2}\hat{j} = (5.93\times 10^{-11}N)\hat{j}$$

$$\vec{F}_{32} = G\frac{m_2 m_3}{r_{23}^2}(-\hat{i}) = -\left(6.67\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(4kg)(6kg)}{(4m)^2} = -(10.0\times 10^{-11}N)\hat{i}$$

$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = (-10.0\,\hat{i} + 5.93\,\hat{j})\times 10^{-11}N$, $F_2 = 11.6\times 10^{-11}N$, $\theta = 149^\circ$ με τον Ox

Ο Newton βασιζόμενος στον πρώτο νόμο του Kepler που λέει ότι οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο στη μία εστία, θεώρησε την ειδική περίπτωση του κύκλου, όπου οι δύο εστίες συμπίπτουν. Τότε η ελκτική δύναμη είναι η κεντρομόλος $F = \frac{mv^2}{r}$ (για την ακρίβεια το m πρέπει να αντικατασταθεί με το $\mu = \frac{Mm}{M+m}$)

Αλλά $v = \frac{2\pi r}{P} \rightarrow F = \frac{4\pi^2 mr}{P^2}$. Από τον τρίτο νόμο του Kepler που λέει ότι τα τετράγωνα των περιόδων περιφοράς είναι ανάλογα των κύβων των μεγάλων ημιαξόνων των τροχιών, έχουμε $P^2=kr^3$, άρα τελικά $F=\frac{4\pi^2 m}{k r^2}$.

Ο Newton έκανε και άμεση επαλήθευση στο νόμο του για το σύστημα Γη-σελήνη, πέραν των περαιτέρω προβλέψεων του νόμου. Αν ο νόμος $F\sim\frac{1}{r^2}$ είναι σωστός οφείλει $\frac{g}{a_\eta}=\left(\frac{r}{R_{\Gamma\eta}}\right)^2$, όπου $g=9.81\,\frac{m}{sec^2}$ η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης, $a_\eta=\frac{v^2}{r}=\frac{4\pi^2 r}{P^2}$ η κεντρομόλος επιτάχυνση της σελήνης, $R_{\Gamma\eta}=6.37\times10^6\,m$, $r=3.84\times10^8\,m$, $P=2,36\times10^6\,sec$, οπότε $a_\eta=2.72\times10^{-3}\,\frac{m}{sec^2}$. Τελικά $\frac{g}{a_\eta}=3604\simeq60^2$, ενώ $\left(\frac{r}{R_{\Gamma\eta}}\right)^2=\left(\frac{384}{6.37}\right)^2=60.3^2$, άρα πράγματι ισχύει.

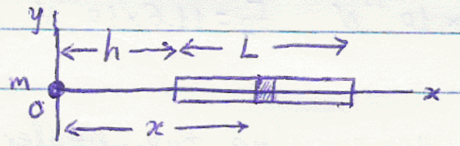
Για $F=\frac{GMm}{r^2}$ προκύπτει για κυκλική τροχιά $P^2=\left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)r^3$

Παράδειγμα Υπολογίστε τη μάζα της Γης και τη μέση πυκνότητά της.
Στην επιφάνεια είναι $F=B=G\frac{Mm}{R^2}\rightsquigarrow g=\frac{B}{m}=\frac{GM}{R^2}\rightsquigarrow M=\frac{gR^2}{G}$ με $G=6.67\times10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\cdot sec^2}$, $g=9.81\,\frac{m}{sec^2}$, $R=6.37\times10^6\,m$, άρα $M=5.97\times10^{24}\,kg$ (εδώ έχουμε υποθέσει ότι η Γη δρα σαν να ήταν όλη η μάζα της στο κέντρο, που θα εξηγήσουμε αργότερα)

Επίσης $\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{5.97\times10^{24}\,kg}{\frac{4\pi}{3}(6.38\times10^6\,m)^3}=5.5\times10^3\,\frac{kg}{m^3}=5.5\,\frac{g}{cm^3}$

Παράδειγμα Υπολογείστε τη μάζα ενός πλανήτη που έχει δορυφόρο.
Είναι $F=G\frac{Mm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}=\frac{4\pi^2 mr}{P^2}\rightsquigarrow M=\frac{4\pi^2 r^3}{GP^2}$, π.χ. για Γη-Σελήνη $r=3.84\times10^8\,m$, $P=2.36\times10^6\,sec$ βρίσκουμε πάλι το ίδιο $M_{\Gamma\eta}$ με προηγουμένως. Αντίστοιχα για Ήλιο-Γη βρίσκουμε το $M_{\text{ήλιος}}$.

Παράδειγμα



ομογενής ράβδος

Ποια η δύναμη στο m?

$$F=\int dF=\int\frac{Gm\,dM}{x^2},\quad dm=\rho\,dV=\rho A\,dx$$

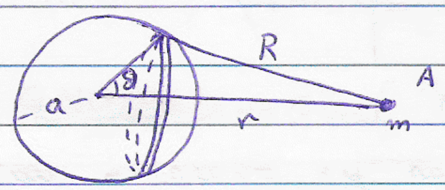
$$F=Gm\rho A\int_h^{h+L}\frac{dx}{x^2}=-Gm\rho A\,\frac{1}{x}\Big|_{x=h}^{x=h+L}=-Gm\rho A\left(\frac{1}{h+L}-\frac{1}{h}\right)=\frac{Gm\rho AL}{h(h+L)}$$

$$M=\rho V=\rho AL\rightsquigarrow F=\frac{GmM}{h(h+L)}$$

Για $L\to0$ ή $h\gg L\longrightarrow F=\frac{GmM}{h^2}$

Δυναμικό ομογενούς σφαιρικού κελύφους

(α) έξω



Έστω σ η επιφανειακή πυκνότητα μάζας. Η δυναμική ενέργεια στο A λόγω της λωρίδας είναι $dU = -\frac{Gm\,dM}{R} = -\frac{Gm\sigma\,dA}{R}$,

όπου $dA = 2\pi(a\sin\vartheta)(a\,d\vartheta) = 2\pi a^2 \sin\vartheta\,d\vartheta$, άρα

$$dU = -Gm\sigma\,2\pi a^2\,\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{R}$$

Είναι $R^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\vartheta \rightsquigarrow R\,dR = ra\sin\vartheta\,d\vartheta$, άρα

$$dU = -2\pi Gm\sigma a^2\,\frac{\sin\vartheta}{R}\,\frac{R\,dR}{ra\sin\vartheta} = -\frac{2\pi Gm\sigma a}{r}\,dR$$

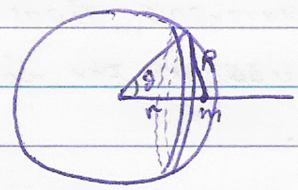
$$\Rightarrow U = \int dU = -\frac{2\pi Gm\sigma a}{r}\int_{r-a}^{r+a} dR = -\frac{2\pi Gm\sigma a}{r}\,2a = -\frac{4\pi Gm\sigma a^2}{r}$$

Αλλά $M = \sigma A = \sigma 4\pi a^2 \rightsquigarrow U(r) = -\frac{GMm}{r}, \; r>a$

$$F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \Rightarrow F(r) = -\frac{GMm}{r^2}, \; r>a$$

Δηλαδή το ομογενές κέλυφος συμπεριφέρεται για τα εξωτερικά σημεία ως υλικό σημείο μάζας M που βρίσκεται στο κέντρο του σφαιρικού κελύφους.

(β) μέσα



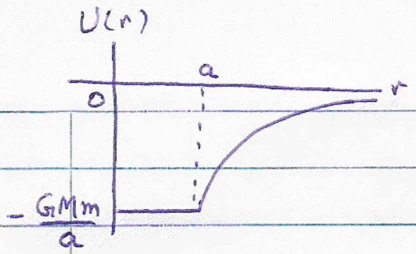
Για το εσωτερικό όλα είναι ίδια με παραπάνω μέχρι τη σχέση

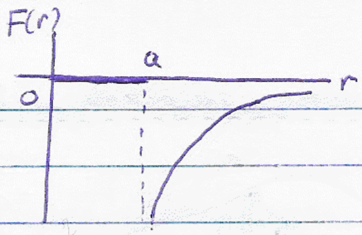
$$dU = -\frac{2\pi Gm\sigma a}{r}\,dR \Rightarrow U = \int dU = -\frac{2\pi Gm\sigma a}{r}\int_{a-r}^{a+r} dR =$$

$$= -\frac{2\pi Gm\sigma a}{r}\,2r = -4\pi Gm\sigma a$$

$$\Rightarrow U(r) = -\frac{GMm}{a}, \; r<a \quad , \quad F(r) = 0, \; r<a$$

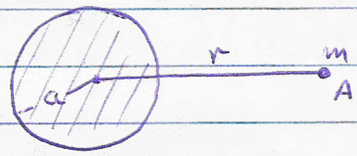
Άρα το δυναμικό στο εσωτερικό του κελύφους είναι σταθερό και ίσο με το δυναμικό στην επιφάνεια.





Δυναμικό συμπαγούς σφαίρας με σφαιρική κατανομή πυκνότητας $\rho = \rho(r)$

(α) έξω



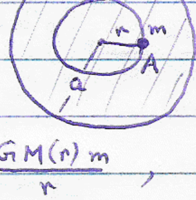
Θεωρούμε ομόκεντρα κελύφη, οπότε βάσει του προηγούμενου η συνεισφορά του δυναμικού ενός τέτοιου κέλυφους στη μάζα m είναι $dU = -\frac{Gm\,dM}{r}$, $dM = \rho(R)dV = 4\pi R^2 \rho(R)dR \Rightarrow$
$M = \int dM = 4\pi \int_0^a R^2 \rho(R)dR$, άρα
$dU = -\frac{4\pi Gm}{r} R^2 \rho(R)dR \Rightarrow U = \int dU = -\frac{4\pi Gm}{r}\int_0^a R^2\rho(R)dR = -\frac{4\pi Gm}{r}\frac{M}{4\pi}$

$\Rightarrow U(r) = -\frac{GMm}{r}, \; r>a$, όπου $M = 4\pi\int_0^a R^2\rho(R)dR$

$F(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \Rightarrow F(r) = -\frac{GMm}{r^2}, \; r>a$

Δηλαδή το πεδίο βαρύτητας στα εξωτερικά σημεία ενός σφαιρικού σώματος με σφαιρική κατανομή πυκνότητας είναι το ίδιο με το πεδίο βαρύτητας ενός υλικού σημείου με την ίδια μάζα ευρισκόμενο στο κέντρο της σφαίρας.

(β) μέσα.



Το δυναμικό στο A έχει δύο συνεισφορές, U_1 από τη σφαίρα ακτίνας r και U_2 από το έξω τμήμα, $U = U_1 + U_2$

Είναι $U_1 = -\frac{GM(r)m}{r}$, $M(r) = 4\pi\int_0^r R^2\rho(R)dR$

Για να βρούμε τη συνεισφορά του έξω τμήματος, το χωρίζουμε σε κελύφη $R, R+dR$, οπότε

$$\left.\begin{array}{l} dM = 4\pi R^2 \sigma \\ dM = \rho\, dV = \rho\, 4\pi R^2 dR \end{array}\right\} \rightarrow \sigma = \rho\, dR$$

Έχουμε βρει ότι $dU_2 = -4\pi G m \sigma R = -4\pi G m \rho(R) R\, dR$

$$\Rightarrow U_2 = \int dU_2 = -4\pi G m \int_r^a \rho(R) R\, dR = -4\pi G m \int_r^a \frac{dM(R)}{4\pi R} = -Gm \int_r^a \frac{dM(R)}{R}$$

Άρα $$U(r) = -\frac{GM(r)m}{r} - 4\pi G m \int_r^a R\rho(R)\, dR \quad , r<a$$

$$= -\frac{GM(r)m}{r} - Gm \int_{R=r}^{R=a} \frac{dM(R)}{R} \quad , \quad M(r) = 4\pi \int_0^r R^2 \rho(R)\, dR$$

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{GM(r)m}{r^2} + \cancel{\frac{Gm}{r}\frac{dM(r)}{dr}} - \cancel{\frac{Gm}{r}\frac{dM(r)}{dr}} = -\frac{GM(r)m}{r^2}$$

$$\Rightarrow F(r) = -\frac{GM(r)m}{r^2} \quad , r<a$$

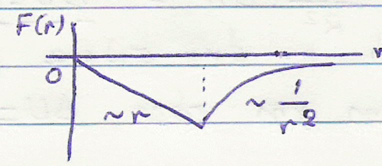
Δηλαδή η έλξη σε εσωτερικό σημείο της σφαίρας σε απόσταση r από το κέντρο οφείλεται μόνο στη μάζα που βρίσκεται στη σφαίρα με ακτίνα r, όπως ήταν αναμενόμενο.

Αν $\rho(r) = $ σταθ., $M(r) = 4\pi\rho \int_0^r R^2\, dR = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$

$M = \rho V = \frac{4\pi}{3}\rho a^3$, $\frac{M(r)}{M} = \frac{r^3}{a^3} \rightarrow M(r) = M\frac{r^3}{a^3}$

$$U(r) = -\frac{GM(r)m}{r} - 4\pi G m \rho \int_r^a R\, dR = -\frac{Gm}{r} M \frac{r^3}{a^3} - 2\pi G m \frac{3M}{4\pi a^3}(a^2 - r^2)$$

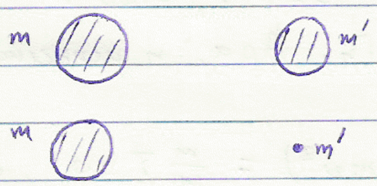
$$= \frac{GMm}{2a^3}(r^2 - 3a^2) \quad , r<a$$



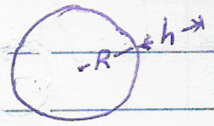
$$F(r) = -\frac{Gm}{r^2} M \frac{r^3}{a^3} = -\frac{GMmr}{a^3} \quad , r<a$$

Με βάση τα παραπάνω η δύναμη μεταξύ δύο συμπαγών σφαιρών που τα κέντρα τους απέχουν απόσταση r βρίσκεται με το σκεπτικό

$$F_{m',m} = F_{m' \text{ σημειακή}, m} = F_{m, m' \text{ σημειακή}} = \frac{Gmm'}{r^2}$$



Για το εξωτερικό της γης είναι $r=R+h$, άρα

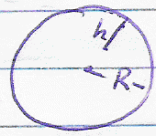


$$g=\frac{GM}{(R+h)^2}=\frac{GM}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}=\frac{GM}{R^2}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}$$

και αν $h<<R$ τότε $g\simeq\frac{GM}{R^2}\left(1-\frac{2h}{R}\right)\Rightarrow g_{εξω}\simeq g_0\left(1-\frac{2h}{R}\right),\ h<<R$

$\Rightarrow g_{εξω}=(9.81-3.06\times10^{-6}h)\,m\,sec^{-2}$

Για το εσωτερικό είναι $r=R-h$, άρα



$$g=\frac{GMr}{R^3}=\frac{GM(R-h)}{R^3}=\frac{GM}{R^2}\left(1-\frac{h}{R}\right)$$

$\Rightarrow g_{μέσα}=g_0\left(1-\frac{h}{R}\right)$

Όμοια για το δυναμικό έξω $U=-\frac{GMm}{R+h}=-\frac{GMm}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)}=$

$$=-\frac{GMm}{R}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1}=-\frac{GMm}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right)=-\frac{GMm}{R}+\frac{GMm}{R^2}h=$$

$$=-\frac{GMm}{R}+mg_0h$$

Το ίδιο μπορούμε να πούμε και κατά τη μεταφορά ενός σώματος στο εξωτερικό της γης από τη θέση r_1 στη θέση r_2

$$\Delta U=U_f-U_i=-\frac{GMm}{r_f}+\frac{GMm}{r_i}=-GMm\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i}\right)=GMm\frac{r_f-r_i}{r_ir_f}$$

Αν $r_i\simeq r_f\simeq R$ τότε $r_f-r_i=\Delta h$, $r_ir_f\simeq R^2$ και

$\Delta U\simeq\frac{GMm}{R^2}\Delta h\Rightarrow\Delta U=mg_0\Delta h$,

δηλαδή αν ένα σώμα μετατοπιστεί κατά Δh κοντά στην επιφάνεια της γης τότε $\Delta U=mg_0\Delta h$

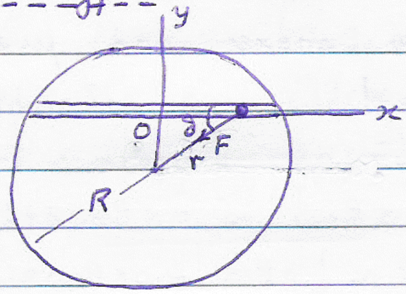
Παράδειγμα

Σώμα μάζας m εκτοξεύεται προς τα πάνω με κινητική ενέργεια T. Βρείτε την κινητική ενέργεια που αποκτά η Γη.

Αν υ η ταχύτητα εκτόξευσης του σώματος m τότε λόγω της αρχής διατήρησης της ορμής είναι $m\upsilon=MV$, όπου M η μάζα της γης και V η ταχύτητα που αποκτά η Γη. Άρα, η κινητική ενέργεια της γης είναι

$$T_{Γη}=\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}M\frac{m^2\upsilon^2}{M^2}=\frac{1}{2}\frac{m^2\upsilon^2}{M}=\frac{m}{M}\left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right)=\frac{m}{M}T\simeq0$$, διότι $m<<M$

Παράδειγμα



Σήραγγα στη Γη.

Είναι $F = -\dfrac{GMm}{R^3} r$

$$\Rightarrow F_x = F\cos\theta = -\frac{GMm}{R^3} r\cos\theta = -\frac{GMm}{R^3} x$$

Άρα η δύναμη είναι της μορφής $F=-kx$, όπως και σε ένα ελατήριο, άρα η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση.

Επίσης $F_x = ma_x \rightarrow a_x = \dfrac{GM}{R^3} x$

Η κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{GM}{R^3}}$ και η περίοδος $P = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}} =$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(6.37\times10^{6})^3}{(6.67\times10^{-11})(5.98\times10^{24})}} = 5.06\times10^{3}\,sec = 84.3\,min$$

Το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από το μήκος της σήραγγας