# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

## Φυσική Ι

## Σημειώσεις – Έργο

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

BY NC ND

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

## Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

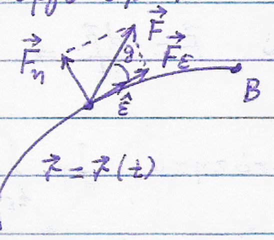
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Έργο - ενέργεια

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\, ds \cos\theta = F_\varepsilon\, ds$ "στοιχειώδες έργο της $\vec{F}$"




$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \vec{F}\cdot\hat{\varepsilon}\, ds = \int F_\varepsilon\, ds =$

$= \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_{t_A}^{t_B} \left(F_x \frac{\partial x}{\partial t} + F_y \frac{\partial y}{\partial t} + F_z \frac{\partial z}{\partial t}\right) dt$

$= \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$ "έργο της $\vec{F}$"

Ισχύς (στιγμιαία) $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

(αφού $\frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$)

Μέση ισχύς $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

Παράδειγμα $\vec{F} = (y-x^2,\ z-y^2,\ x-z^2)$, $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ ← παράμετρος, $0 \le t \le 1$

$A=(0,0,0)$, $B=(1,1,1)$

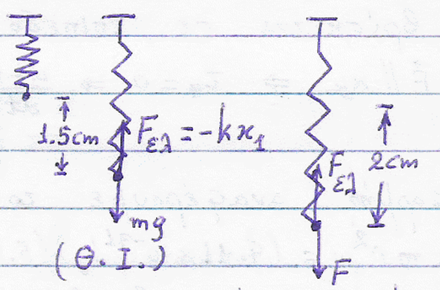
$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (t^2-t^2,\ t^3-t^4,\ t-t^6) = (0,\ t^3-t^4,\ t-t^6)$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 2t, 3t^2)$

$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 2t(t^3-t^4) + 3t^2(t-t^6) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8$

$W_{AB} = \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8)\, dt = \left(\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9\right)\Big|_0^1 = \frac{29}{60}$

Παράδειγμα




$m = 4\,kg$

$W_F(x=0 \to x = 2\,cm) = ?$

Στη θέση ισορροπίας $mg = kx_1 \Rightarrow k = \frac{mg}{x_1} = \frac{4\,kg \times 9.8\,\frac{m}{s^2}}{1.5\times 10^{-2}\,m} = 2.61\times 10^3\,\frac{N}{m}$

Το έργο της F από $x=0$ στη θέση $x$ είναι

$W = \int_0^x F\,dx = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left(2.61\times 10^3\,\frac{N}{m}\right)\left(2\times 10^{-2}\,m\right)^2 =$

$= 5.22\times 10^{-4}\,J$

Παράδειγμα

$\vec{F} = (x-y)\,\hat{i} + x\,\hat{j}$ , $A=(0,0,0)$ , $B=(0,0,0)$ , $\vec{r}(t) = \cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j}$

$0 \le t \le 2\pi$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (\cos t - \sin t)\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j}$$

$$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t = 1 - \sin t\cos t$$

$$W = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_0^{2\pi}(1-\sin t\cos t)\,dt = \left(t - \frac{\sin^2 t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

Παράδειγμα

$F = 6t$ , $m = 2\,kg$ , $t = 2\,sec$ , $W = ;$

$$m\frac{dv}{dt} = F = 6t \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 3t \Rightarrow v = \int_0^t 3t\,dt = \frac{3}{2}t^2 \left(\frac{m}{sec}\right)$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int_0^t v\,dt = \int_0^t \frac{3}{2}t^2\,dt = \frac{1}{2}t^3$$

$$dx = \frac{3}{2}t^2\,dt$$

$$W = \int_0^x F\,dx = \int_0^t 6t\cdot\frac{3}{2}t^2\,dt = 9\int_0^t t^3\,dt = \frac{9}{4}t^4 = 2.25\,t^2\,(J)$$

$t = 2\,sec \Rightarrow W = 36\,J.$

Θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας

$$W_{AB} = T_B - T_A \quad , \quad T = \frac{m}{2}v^2 \text{ (ως προς αδρανειακό σύστημα)}$$

$W_{AB}$: έργο συνισταμένης δύναμης (άθροισμα έργων επιμέρους δυνάμεων)

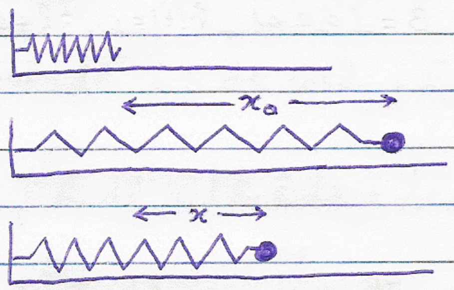
διότι $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_A^B m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\,dt = \int_A^B d\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2\right) = \int_A^B d\left(\frac{m}{2}v^2\right) =$

$$= \frac{m}{2}v^2\Big|_A^B = \frac{m}{2}v_B^2 - \frac{m}{2}v_A^2 = T_B - T_A$$

ή αλλιώς $W_{AB} = \int_A^B F_\varepsilon\,ds = \int_A^B m\frac{dv}{dt}\,ds = \int_A^B m\frac{ds}{dt}\,dv = \int_A^B mv\,dv = \int_A^B d\left(\frac{m}{2}v^2\right) =$

$$= \frac{m}{2}v^2\Big|_A^B = T_B - T_A$$

Παράδειγμα




αρχικά

$\upsilon = ;$

$$T - T_o = W \;, \qquad T_o = 0 \;\rightarrow\; T = W$$

$$T = \frac{m}{2}\upsilon^2$$

$$W = \int_{x_o}^{x} F_{\varepsilon\lambda}\, dx = \int_{x_o}^{x} (-kx)\, dx = -\frac{k}{2}(x^2 - x_o^2) = \frac{k}{2}(x_o^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\upsilon^2 = \frac{k}{2}(x_o^2 - x^2) \;\Rightarrow\; \upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(x_o^2 - x^2)}$$

Το − είναι για τη θέση που δείχνει το σχήμα αφού το σώμα κινείται προς τα αριστερά, το + είναι για τη συμμετρική θέση.

Για μια βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x,y,z)$ ("πεδίο") ορίζεται η βαθμίδα της $\phi$ ή κλίση της $\phi$ που είναι διανυσματική συνάρτηση

$$\nabla\phi \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} \quad (= \text{grad}\,\phi) \;, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

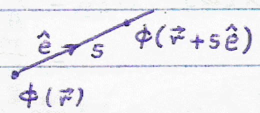
Γράφουμε $\nabla\phi = \frac{d\phi}{dn}\hat{n}$ , $\hat{n}$: κατεύθυνση τού $\nabla\phi$, $\frac{d\phi}{dn} = |\nabla\phi|$

Ισχύει $d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{r}$

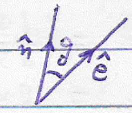
διότι
$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k})$$
$$= \nabla\phi \cdot d\vec{r}$$

Ορίζεται η κατευθυνόμενη παράγωγος της $\phi(x,y,z)$ στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{e}$ και συμβολίζεται $\left(\frac{d\phi}{ds}\right)_{\hat{e}}$ ή $\frac{d\phi}{ds}$ ή $D_{\hat{e}}\phi$ η ποσότητα

$$\left(\frac{d\phi}{ds}\right)_{\hat{e}} = \lim_{s\to 0}\frac{\phi(\vec{r} + s\hat{e}) - \phi(\vec{r})}{s}$$



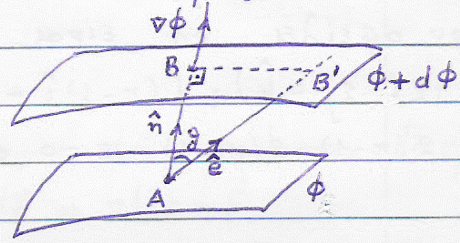
Ισχύει $\left(\frac{d\phi}{ds}\right)_{\hat{e}} = \nabla\phi\cdot\hat{e} = \frac{d\phi}{dn}\cos\theta$ , $\theta = (\hat{e},\hat{n})$




διότι $d\phi = \nabla\phi\cdot d\vec{r}$ , άρα αν $s$ το μήκος τόξου πάνω στην ευθεία που ορίζει το $\hat{e}$,

τότε $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi\cdot\frac{d\vec{r}}{ds} = \nabla\phi\cdot\hat{e} = |\nabla\phi|\cos\theta = \frac{d\phi}{dn}\cos\theta$

Επομένως, το $\nabla\phi$ δείχνει στο συγκεκριμένο σημείο την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού αύξησης του πεδίου $\phi$ (μέγιστη αύξηση του $\phi$ ανά μονάδα μήκους)




Η παραπάνω σχέση προκύπτει και από

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dn}\frac{dn}{ds} = \frac{d\phi}{dn}\frac{AB}{AB'} = \frac{d\phi}{dn}\cos\theta$$

Για ένα πεδίο $\phi$ στις δύο διαστάσεις σε πολικές συντεταγμένες $\phi(r,\theta)$ είναι $d\vec{r} = dr\,\hat{e}_r + r\,d\theta\,\hat{e}_\theta$ , άρα

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta$$

ενώ σε σφαιρικές συντεταγμένες στις τρεις διαστάσεις $\phi(r,\theta,\varphi)$

$d\vec{r} = dr\,\hat{e}_r + r\,d\theta\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{e}_\varphi$ , είναι

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi$$

<u>Παράδειγμα</u> $\phi(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ , $\nabla\phi = ;$ $\nabla\phi|_{(1,1,0)} = ;$

$D_{\vec{v}}\phi|_{(1,1,0)} = ;$ $\vec{v} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 3x^2 - y^2 , \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2xy , \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = -1$$

$$\nabla\phi = (3x^2 - y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j} - \hat{k}$$

$$\nabla\phi|_{(1,1,0)} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k} , \quad |\nabla\phi|_{(1,1,0)} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Άρα, ο μέγιστος ρυθμός αύξησης του πεδίου $\phi$ στο σημείο $(1,1,0)$ γίνεται προς την κατεύθυνση του διανύσματος $2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$. Προφανώς, ο μέγιστος ρυθμός ελάττωσης γίνεται στην αντίθετη κατεύθυνση $-2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$.

Είναι $\hat{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{1}{\sqrt{49}}(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = \frac{2}{7}\hat{i} - \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$ , άρα η κατευθυνόμενη παράγωγος του $\phi$ (ρυθμός μεταβολής) είναι

$$D_{\hat{e}}\phi = \left(\frac{d\phi}{ds}\right)_{\hat{e}} = \nabla\phi\cdot\hat{e} = (2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})\cdot\left(\frac{2}{7}\hat{i}-\frac{3}{7}\hat{j}+\frac{6}{7}\hat{k}\right) =$$

$$= 2\times\frac{2}{7}+(-2)\left(-\frac{3}{7}\right)+(-1)\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{4}{7}+\frac{6}{7}-\frac{6}{7} = \frac{4}{7}$$

το οποίο είναι βέβαια μικρότερο από 3.

Για να βρούμε το εφαπτόμενο επίπεδο της ισοσταθμικής επιφάνειας $\phi(1,1,0)=0$, θεωρούμε το τυχόν διάνυσμα με αρχή το $(1,1,0)$ προς το τυχόν σημείο $(x,y,z)$ του επιπέδου, δηλ.

$$(x-1)\hat{i}+(y-1)\hat{j}+(z-0)\hat{k} = 0$$

που οφείλει να είναι κάθετο στο $\nabla\phi$, άρα

$$(2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})\cdot[(x-1)\hat{i}+(y-1)\hat{j}+z\hat{k}]=0 \Leftrightarrow$$

$$2(x-1)-2(y-1)-z=0 \Leftrightarrow 2x-2y-z=0$$

Για μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{A}(x,y,z)$ (διανυσματικό πεδίο), π.χ. θέση, ταχύτητα, δύναμη κ.λπ., ορίζεται ο <u>στροβιλισμός</u> του $\vec{A}$ που είναι διανυσματική συνάρτηση

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$(=\mathrm{curl}\,\vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{A})$$

<u>Παράδειγμα</u> $\vec{A} = (x^2-y)\hat{i}+4z\hat{j}+x^2\hat{k}$

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2-y & 4z & x^2 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2)-\frac{\partial}{\partial z}(4z)\right]\hat{i}-\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2)-\frac{\partial}{\partial z}(x^2-y)\right]\hat{j}$$

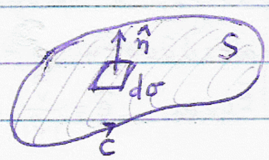
$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}(4z)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y)\right]\hat{k} = (0-4)\hat{i}-(2x-0)\hat{j}+(0+1)\hat{k} = -4\hat{i}-2x\hat{j}+\hat{k}$$

Ισχύει <u>$\nabla\times\nabla\phi = 0$</u>

διότι $$\nabla\times\nabla\phi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = (\phi_{,zy}-\phi_{,yz})\hat{i}-(\phi_{,zx}-\phi_{,xz})\hat{j}+(\phi_{,yx}-\phi_{,xy})\hat{k}$$

<u>Θεώρημα Stokes</u> $$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,d\sigma$$

"κυκλοφορία", "περιδίνηση" του $\vec{A}$ — "ροή" του $\nabla\times\vec{A}$



Λέμε ότι η δύναμη $\vec{F}(\vec{r})$ (ως προς αδρανειακό σύστημα) είναι συντηρητική ή διατηρητική ή ότι προέρχεται από δυναμικό, αν υπάρχει συνάρτηση $U(\vec{r})$ "δυναμική ενέργεια" ώστε

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Προφανώς, η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη, αφού μπορεί $U \to U + c$ και αυτή η ελευθερία ορίζει τη στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας.
Ισχύει $\vec{F} = -\nabla U \Leftrightarrow dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$

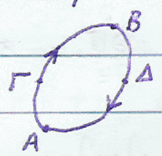
διότι αν $\vec{F} = -\nabla U$ τότε $dU = \nabla U \cdot d\vec{r} = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$, ενώ αντίστροφα αν $dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$ τότε $\nabla U\cdot d\vec{r} = -\vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \nabla U = -\vec{F}$

Η δύναμη στα παραπάνω μπορεί να είναι και $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$, τα παρακάτω όμως ισχύουν μόνο για $\vec{F}(\vec{r})$.
Ισχύει $W_{AB} = U_A - U_B$

διότι $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B \nabla U\cdot d\vec{r} = -\int_A^B dU = -U\Big|_A^B = U_A - U_B$

Η $\vec{F}$ είναι συντηρητική αν και μόνο αν το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής (δηλ. εξαρτάται μόνο από τα ακραία σημεία)
Πράγματι, αν $\vec{F}$ συντηρητική τότε δείξαμε ότι $W_{AB} = U_A - U_B$, άρα το έργο εξαρτάται μόνο από τα ακραία σημεία. Αντίστροφα, αν $W_{AB} = U_A - U_B \Rightarrow \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -(U_B - U_A) = -\int_A^B dU = -\int_A^B \nabla U\cdot d\vec{r}$
$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla U \Rightarrow \vec{F}$ συντηρητική

Η $\vec{F}$ είναι συντηρητική αν και μόνο αν το έργο κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής είναι μηδέν
Πράγματι, έστω $\vec{F}$ συντηρητική. Τότε για την κλειστή διαδρομή $C = ΑΓΒΔΑ$ το έργο είναι




$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{ΑΓΒ} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{ΒΔΑ} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{ΑΓΒ} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{ΑΔΒ} \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

όπου το μείον προκύπτει από τον ορισμό του έργου. Αλλά αφού $\vec{F}$

συντηρητική, το έργο κατά τη διαδρομή ΑΔΒ είναι ίσο με το έργο κατά τη διαδρομή ΑΓΒ, άρα

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\Gamma B} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{A\Gamma B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$

Αντίστροφα, αν $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{A\Gamma B} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{B\Delta A} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow$

$\int_{A\Gamma B} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{A\Delta B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{A\Gamma B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\Delta B} \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow$ το έργο από το Α στο Β είναι ανεξάρτητο της διαδρομής μέσω Γ ή μέσω Δ, άρα η $\vec{F}$ συντηρητική.

$$\underline{\vec{F} \text{ συντηρητική} \Leftrightarrow \nabla\times\vec{F} = 0}$$

Πράγματι, αν $\vec{F}$ συντηρητική $\Rightarrow \vec{F} = -\nabla U \Rightarrow \nabla\times\vec{F} = -\nabla\times\nabla U = 0$.
Αντίστροφα, αν $\nabla\times\vec{F} = 0$, τότε από το θεώρημα Stokes είναι
$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}\, d\sigma = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{F}$ συντηρητική.

Η εξίσωση $\nabla\times\vec{F} = 0$ αποτελεί την ολοκληρωτική συνθήκη της εξίσωσης $\vec{F} = -\nabla U$.

<u>Παράδειγμα</u>

Η $\vec{F} = (e^x\cos y + yz)\hat{i} + (xz - e^x\sin y)\hat{j} + (xy + z)\hat{k}$ είναι συντηρητική;
Αν ναι, να βρεθεί η δυναμική ενέργεια.
Είναι $\frac{\partial F_z}{\partial y} = x = \frac{\partial F_y}{\partial z}$, $\frac{\partial F_x}{\partial z} = y = \frac{\partial F_z}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial x} = -e^x\sin y + z = \frac{\partial F_x}{\partial y}$
$\Rightarrow \nabla\times\vec{F} = 0$

Άρα πράγματι, $\vec{F}$ συντηρητική $\Rightarrow \exists\, U(\vec{r}) : \vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\partial U}{\partial x} = e^x\cos y + yz \qquad (1)$$
$$-\frac{\partial U}{\partial y} = xz - e^x\sin y \qquad (2)$$
$$-\frac{\partial U}{\partial z} = xy + z \qquad (3)$$

Η (1) ολοκληρώνεται ως προς $x$ δίνοντας

$$-U(x,y,z) = e^x\cos y + xyz + f(y,z)$$

Παραγωγίζοντας αυτή ως προς $y$ και αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε

$$-e^{x}\sin y + xz + \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^{x}\sin y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow f = f(z)$$

Άρα, $-U(x,y,z) = e^{x}\cos y + xyz + f(z)$

Παραγωγίζοντας τέλος αυτήν ως προς $z$ και αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε

$$xy + \frac{df}{dz} = xy + z \Rightarrow \frac{df}{dz} = z \Rightarrow f(z) = \frac{z^2}{2} + c$$

Άρα,

$$-U(x,y,z) = e^{x}\cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow U(x,y,z) = -e^{x}\cos y - xyz - \frac{z^2}{2} + c$$

Επαληθεύουμε ότι $-\nabla U = (e^{x}\cos y + yz, -e^{x}\sin y + xz, xy + z)$

Παράδειγμα

Η $\vec{F} = (2x-3)\hat{i} - z\hat{j} + \cos z\,\hat{k}$

έχει $\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0$, $\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$,

άρα $\frac{\partial F_z}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial z} \Rightarrow \vec{F}$ όχι συντηρητική $\Rightarrow \nexists\, U : \vec{F} = -\nabla U$

Ποτέ δεν ξεκινάμε τη διαδικασία με τις ολοκληρώσεις της εξίσωση $\vec{F} = -\nabla U$ αν δεν έχουμε ελέγξει την εξίσωση $\nabla \times \vec{F} = 0$, διότι θα κάνουμε πολύ κόπο και στο τέλος πιθανόν να διαπιστώσουμε ότι $\nexists\, U$.

1) $\vec{F}(\vec{r}) = \text{σταθ.} \Rightarrow U(\vec{r}) = -\vec{F}\cdot\vec{r}$

Προφανώς $\nabla \times \vec{F} = 0$ και $-\nabla U = -\nabla(-\vec{F}\cdot\vec{r}) = \nabla(\vec{F}\cdot\vec{r}) =$

$$= (\vec{F}\cdot\nabla)\vec{r} + (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{F} + \vec{F}\times(\nabla\times\vec{r}) + \vec{r}\times(\nabla\times\vec{F}) =$$

$$= (\vec{F}\cdot\nabla)\vec{r} + 0 + \vec{F}\times(\nabla\times\vec{r}) + 0$$

Αλλά $(\vec{F}\cdot\nabla)\vec{r} = \left(F_x\frac{\partial}{\partial x} + F_y\frac{\partial}{\partial y} + F_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{r} = F_x\frac{\partial\vec{r}}{\partial x} + F_y\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} + F_z\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}$

$$= F_x\frac{\partial}{\partial x}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) + F_y\frac{\partial}{\partial y}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) + F_z\frac{\partial}{\partial z}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = \vec{F}$$

και

$$\nabla \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0) = 0$$ , οπότε $-\nabla U = \vec{F}$

Αλλιώς : $dU = -d(\vec{F}\cdot\vec{r}) = -\vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$

Αλλιώς : $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\int_A^B d\vec{r} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{F}\cdot\vec{r}_B - \vec{F}\cdot\vec{r}_A$
$= U_A - U_B$ , $U = -\vec{F}\cdot\vec{r}$

Πιο απλά, αφού $\vec{F}$=σταθ. θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων όπου ο άξονας $\hat{i}$ συμπίπτει με την κατεύθυνση της $\vec{F}$, δηλ. $\vec{F} = F\hat{i}$, άρα $\vec{F} = -\nabla U \Leftrightarrow F\hat{i} = -\frac{dU}{dx}\hat{i} \Leftrightarrow F = -\frac{dU}{dx} \Leftrightarrow$
$U = -\int F dx \Leftrightarrow U = -Fx \Leftrightarrow U = -\vec{F}\cdot\vec{r}$

2) $\vec{F} = -mg\hat{j} \Rightarrow U(y) = mgy$

διότι $U = -\vec{F}\cdot\vec{r} = -(-mg\hat{j})\cdot y\hat{j} = mgy$

3) $\vec{F} = F(x)\hat{i} \Rightarrow U(x) = -\int F(x)dx$

αφού $\nabla \times \vec{F} = 0$

και $\vec{F} = -\nabla U \Leftrightarrow F(x)\hat{i} = -\frac{dU}{dx}\hat{i} \Leftrightarrow F(x) = -\frac{dU}{dx} \Leftrightarrow U = -\int F(x)dx$

4) $\vec{F} = -kx\hat{i} \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

αφού $U = -\int F(x)dx = \int kx\,dx = \frac{k}{2}x^2$

5) $\vec{F} = F(r)\hat{e}_r \Rightarrow U(r) = -\int F(r)dr$

διότι

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i}(F_{z,y} - F_{y,z}) + \hat{j}(F_{x,z} - F_{z,x}) + \hat{k}(F_{y,x} - F_{x,y})$$

Αλλά $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = F_r\hat{e}_r + F_\theta\hat{e}_\theta + F_\varphi\hat{e}_\varphi = F(r)\hat{e}_r$

$\Rightarrow F_x = F(r)\,\hat{e}_r\cdot\hat{i}$ , $F_y = F(r)\,\hat{e}_r\cdot\hat{j}$ , $F_z = F(r)\,\hat{e}_r\cdot\hat{z}$

$\Rightarrow F_x = F(r)\,\frac{\vec{r}}{r}\cdot\hat{i}$ , $F_y = F(r)\,\frac{\vec{r}}{r}\cdot\hat{j}$ , $F_z = F(r)\,\frac{\vec{r}}{r}\cdot\hat{z}$

$\Rightarrow F_x = F(r)\,\frac{x}{r}$ , $F_y = F(r)\,\frac{y}{r}$ , $F_z = F(r)\,\frac{z}{r}$

Άρα

$$F_{z,y} - F_{y,z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(F(r)\frac{z}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(F(r)\frac{y}{r}\right) = z\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F(r)}{r}\right) - y\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F(r)}{r}\right) =$$
$$= z\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F(r)}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F(r)}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial z}$$
$$= \left(z\frac{\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial r}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F(r)}{r}\right)$$

$$= \left( z \frac{\partial y}{\partial r} - y \frac{\partial z}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F(r)}{r}\right) \quad , \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$= 0$

Όμοια τα άλλα, άρα $\nabla \times \vec{F} = 0$.

Αλλιώς $\vec{F} = F_1(r)\vec{r}$ , $F_1(r) = \frac{F(r)}{r}$

$$\Rightarrow \vec{F} = F_1(r)(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xF_1 & yF_1 & zF_1 \end{vmatrix} = \hat{i}(zF_{1,y} - yF_{1,z}) + \hat{j}(xF_{1,z} - zF_{1,x}) + \hat{k}(yF_{1,x} - xF_{1,y})$$

$$zF_{1,y} - yF_{1,z} = z\, F_{1,r}\frac{\partial r}{\partial y} - y\, F_{1,r}\frac{\partial r}{\partial z} = F_{1,r}\left(z\frac{2y}{2r} - y\frac{2z}{2r}\right) = 0$$

Είναι $\vec{F} = -\nabla U \Leftrightarrow F(r)\hat{e}_r = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi$

$$\Rightarrow F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Rightarrow U = U(r), \quad F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} \quad \Rightarrow U(r) = -\int F(r)dr$$

6) $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{e}_r \Rightarrow U(r) = -\frac{k}{r}$

αφού $U(r) = -\int F(r)dr = \int \frac{k}{r^2}dr = -\frac{k}{r}$

Σχόλιο (1) Αν οι δυνάμεις $\vec{F}_i$ προέρχονται από τα δυναμικά $U_i$, τότε η συνισταμένη $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ προέρχεται από το δυναμικό $U = \sum_i U_i$ (διότι $\vec{F}_i = -\nabla U_i$, άρα $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i(-\nabla U_i)$ $= -\nabla \sum_i U_i = -\nabla U$)

(2) Η ύπαρξη του $U$ διευκολύνει το πρόβλημα διότι είναι βαθμωτό και όχι διανυσματικό όπως η $\vec{F}$ και απ' την άλλη δίνει την ίδια ακριβώς πληροφορία με την $\vec{F}$.

Θεώρημα διατήρησης Μηχανικής ενέργειας

Αν η συνισταμένη δύναμη απορρέει από δυναμικό $\vec{F} = -\nabla U$, τότε

$$T + U = \text{σταθ.} = E$$

"ολική μηχανική ενέργεια" (ως προς αδρανειακό σύστημα)

Πράγματι, το συνολικό έργο των δυνάμεων είναι $W_{AB} = U_A - U_B =$
$= T_B - T_A \Rightarrow U_A + T_A = U_B + T_B = E$

Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας είναι ένα ολοκλήρωμα πρώτης τάξης (σταθερά της κίνησης) και μπορεί να αντικαταστήσει μία από τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις του Newton

## Θεώρημα έργου-ενέργειας

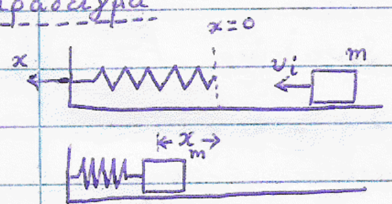
$$W_{AB}^{(nc)} = E_B - E_A \quad , \quad E = T + U \quad \text{(ως προς αδρανειακό σύστημα)}$$

$W_{AB}^{(nc)}$ : ολικό έργο μη-συντηρητικών δυνάμεων
$E$ : ολική μηχανική ενέργεια συντηρητικών δυνάμεων

Πράγματι το ολικό έργο συντηρητικών και μη-συντηρητικών δυνάμεων είναι $W = W_{AB}^{(nc)} + W_{AB}^{(c)}$. Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας $W = T_B - T_A \Leftrightarrow W_{AB}^{(nc)} + W_{AB}^{(c)} = T_B - T_A \Leftrightarrow$
$W_{AB}^{(nc)} + U_A - U_B = T_B - T_A \Leftrightarrow W_{AB}^{(nc)} = (T_B + U_B) - (T_A + U_A) \Leftrightarrow W_{AB}^{(nc)} = E_B - E_A$

- Ισχύει η διατήρηση της ενέργειας συνολικά υπό όλες τις μορφές της
- Στην ειδική σχετικότητα ισχύει η διατήρηση της ολικής ενέργειας + μάζας, όπου στη μάζα αποδίδεται ενέργεια $E = m\gamma c^2$, $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, άρα για $v=0$, $\gamma = 1$ και η ενέργεια ηρεμίας $E_0 = mc^2$
  π.χ. $m = 1kg \Rightarrow E_0 = mc^2 = (1kgr)\left(3\times10^8 \frac{m}{sec}\right)^2 = 9\times10^{16} J =$
  $=$ ενέργεια $15\times10^6$ βαρελιών πετρελαίου
  $=$ ημερήσια κατανάλωση ενέργειας στις ΗΠΑ

Παράδειγμα




$m = 0.8kg$ , $v_i = 1.2 \frac{m}{sec}$
$k = 50\ N/m$ , $\mu_k = 0.5$
↓ συντελεστής τριβής ολίσθησης

Ποια η μέγιστη συσπείρωση $x_m$ του ελατηρίου;

Το έργο των μη-συντηρητικών δυνάμεων είναι

$$W^{(nc)} = E_f - E_i = (T_f + U_f) - (T_i + U_i) = \left(0 + \tfrac{1}{2}kx_m^2\right) - \left(\tfrac{1}{2}mv_i^2 + 0\right)$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg = (0.5)(0.8\,kg)\left(9.8\,\frac{m}{sec^2}\right) = 3.92N$$

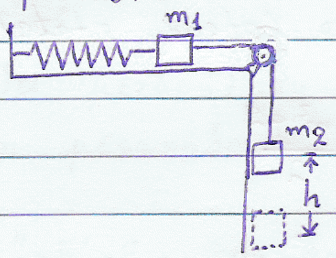
Αλλά,

$$W^{(nc)} = -f_k x_m \Rightarrow -f_k x_m = \tfrac{1}{2}kx_m^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow$$

$$-3.92\,x_m = \frac{50}{2}x_m^2 - \frac{0.8}{2}(1.2)^2 \Leftrightarrow 25x_m^2 + 3.92x_m - 0.576 = 0$$

$\Leftrightarrow x_m = 0.0924m$ ή $x_m = -0.249m$ (απορρίπτεται)

<u>Παράδειγμα</u>




$m_1 = 0.5kg$, $m_2 = 0.3kg$

$k = 50\,N/m$, $h = 5\times10^{-2}m$, $\mu_k = ;$

Το σύστημα αρχικά ηρεμεί και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Τελικά, το σύστημα αφού κατέβει κατά h πάλι ηρεμεί.

$$W^{(nc)} = E_f - E_i \quad , \quad E = T + U_g + U_{ελ}$$

$$\Rightarrow W^{(nc)} = \Delta T + \Delta U_g + \Delta U_{ελ}$$

Αλλά

$$W^{(nc)} = -f_k h = -\mu_k N h = -\mu_k m_1 g h$$

$$\Delta T = 0$$

$$\Delta U_g = 0 - m_2 g h = -m_2 g h$$

$$\Delta U_{ελ} = \tfrac{1}{2}kh^2 - 0 = \tfrac{1}{2}kh^2$$

Άρα

$$-\mu_k m_1 g h = -m_2 g h + \tfrac{1}{2}kh^2 \Rightarrow \mu_k = \frac{m_2 g - \frac{1}{2}kh}{m_1 g}$$

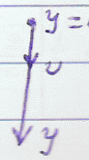
$$\Rightarrow \mu_k = \frac{(0.3\,kg)\left(9.8\,\frac{m}{sec}\right) - \frac{1}{2}\left(50\,\frac{N}{m}\right)(5\times10^{-2}m)}{(0.5\,kg)\left(9.8\,\frac{m}{sec}\right)} = 0.345$$

<u>Παράδειγμα</u> Πτώση σώματος σε ιξώδες ρευστό (γραμμική αντίσταση).

Ρυθμός απώλειας ενέργειας =;

Έχουμε δει ότι $v(t) = v_L\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, $v_L = \frac{mg}{\lambda}$, $\tau = \frac{m}{\lambda}$

$$y(t) = y_0 + v_L(t - \tau) + v_L \tau e^{-t/\tau}$$




όπου ο θετικός y-άξονας είναι προς τα κάτω

$U = -\int F\,dy = -\int mg\,dy = -mgy$

$$\frac{dW^{(nc)}}{dt} = \frac{d}{dt}(T+U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2 - mgy\right) = mv\frac{dv}{dt} - mg\frac{dy}{dt} =$$

$$= mv\frac{v_L}{\tau}e^{-t/\tau} - mg\left(v_L - \frac{v_L\tau}{\tau}e^{-t/\tau}\right) = \frac{mv_L v}{\tau}\left(1-\frac{v}{v_L}\right) - mgv =$$

$$= m\left(\frac{v_L}{\tau}-g\right)v - \frac{mv^2}{\tau} = 0 - \lambda v^2 = -\lambda v^2$$

Αλλιώς: $\frac{dW^{(nc)}}{dt} = Rv = -\lambda v^2$

$$\left.\frac{dW^{(nc)}}{dt}\right|_{t\to\infty} = -\lambda v_L^2 = -\frac{m^2g^2}{\lambda} = \left.\frac{dW^{(nc)}}{dt}\right|_{ss} \quad \text{(steady state)}$$

$$\left.\frac{dW^{(nc)}}{dt}\right|_{ss} = -\left.\frac{d}{dt}(mgy)\right|_{t\to\infty} = -mgv_L = -\frac{m^2g^2}{\lambda}$$

<u>Μονοδιάστατη κίνηση</u>

Σε μονοδιάστατα προβλήματα (π.χ. ευθύγραμμη κίνηση) υπό την επίδραση διατηρητικών δυνάμεων μόνο, υπάρχει το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U$$

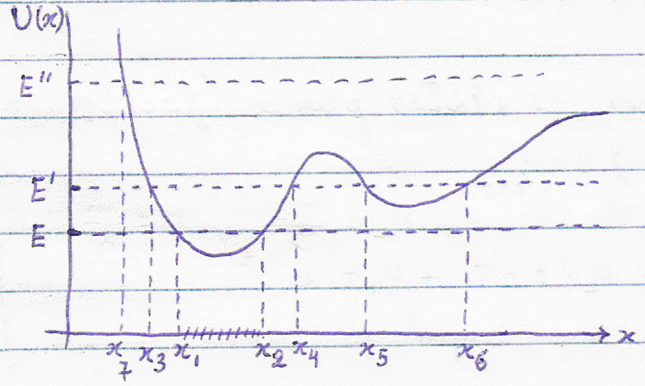
$$\Leftrightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}$$

Άρα, η κίνηση περιορίζεται στις περιοχές με $E \geq U$ (ποιοτική μελέτη της κίνησης)

Είναι $\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E-U}} = \pm dt \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E-U}} = \pm\int_{t_0}^{t}dt \Rightarrow$

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E-U}} \Rightarrow x = x(t)$$

π.χ.



$x_0$ Σημείο ισορροπίας : $x(t)=x_0 \Leftrightarrow F(x_0)=0 \Leftrightarrow \frac{dU}{dx}(x_0)=0$

Ευσταθής ισορροπία : $\frac{d^2U}{dx^2}(x_0)>0$, $U(x_0)$ τοπικό ελάχιστο

Ασταθής ισορροπία : $\frac{d^2U}{dx^2}(x_0)<0$, $U(x_0)$ τοπικό μέγιστο

Ενέργεια $E$ : η κίνηση περιορίζεται στο $[x_1, x_2]$ (ταλάντωση): τα δε ακραία σημεία $x_1, x_2$ λέγονται σημεία αναστροφής και έχουν μηδενική κινητική ενέργεια.

$E'>E$ : κίνηση στο $[x_3, x_4]$ ή $[x_5, x_6]$, δεν μπορεί να υπάρξει μεταπήδηση από τη μία περιοχή στην άλλη, αφού κατά τη μεταπήδηση θα είχαμε $T<0$.

$E''>E'>E$ : μη-φραγμένη κίνηση $[x_7, \infty)$ (όχι ταλάντωση)

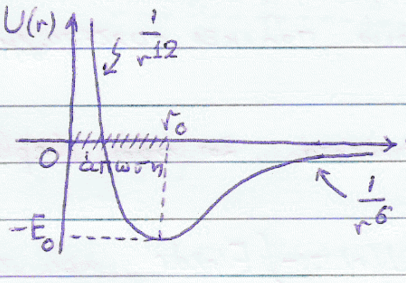
<u>Παράδειγμα</u>

$U(r) = -E_0\left[2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}\right]$ δυναμική ενέργεια μεταξύ 2 μορίων (Lennard-Jones)

Θέση ισορροπίας: $F = -\frac{dU}{dr} = E_0\left[-12\frac{r_0^6}{r^7} + 12\frac{r_0^{12}}{r^{13}}\right] = -12\frac{r_0^6}{r^7}\left(1-\frac{r_0^6}{r^7}\right)$

$= 0 \Leftrightarrow r = r_0$

$U(r_0) = -E_0(2 \cdot 1^6 - 1^{12}) = -E_0$




<u>Παράδειγμα</u>

Ευθύγραμμη κίνηση υπό σταθερή δύναμη $F$

Είναι $U(x) = -\int F dx = -Fx + c$. Για $c=0 \Rightarrow U(x) = -Fx$

Ξέρουμε ότι $\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E+Fx}} = t \overset{y=E+Fx}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{F}\int_E^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\, t$

$\Leftrightarrow \frac{2}{F}\sqrt{y}\Big|_E^y = \sqrt{\frac{2}{m}}\, t \Leftrightarrow \frac{2}{F}(\sqrt{y}-\sqrt{E}) = \sqrt{\frac{2}{m}}\, t \Leftrightarrow \frac{2}{F}\left(\sqrt{E+Fx}-\sqrt{E}\right) = \sqrt{\frac{2}{m}}\, t \Leftrightarrow$

$\sqrt{E+Fx} = \sqrt{E} + \frac{F}{\sqrt{2m}}\, t \Leftrightarrow E+Fx = E + \frac{F^2t^2}{2m} + 2F\sqrt{\frac{E}{2m}}\, t \Leftrightarrow$

$x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + \sqrt{\frac{2E}{m}}\, t$

Αλλά $a = \frac{F}{m}$, $E = T+U = \frac{1}{2}mv^2 - Fx \overset{x=0}{\Rightarrow} E = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2F}{m}}$

Άρα $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ που είναι το γνωστό αποτέλεσμα.

## Κεντρικές δυνάμεις

Κεντρικό πεδίο δυνάμεων με κέντρο O : $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$

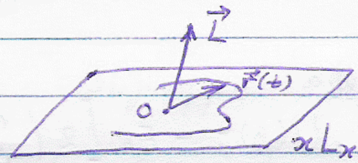
ελκτικές : $F(r)<0$, απωστικές : $F(r)>0$

Ισχύει $\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v}$ = σταθ.

αφού $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times F(r)\frac{\vec{r}}{r} = 0$ και $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \Rightarrow \vec{L}$ = σταθ.

$\vec{r}(t)$ επίπεδη κίνηση

διότι $\vec{r}\cdot\vec{L} = \vec{r}\cdot(\vec{r}\times m\vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{r}\perp\vec{L}$




$xL_x + yL_y + zL_z = 0$

Ειδικά για $\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{r}\times\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v}\parallel\vec{r} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ευθεία τροχιά [ή ακόμα $\vec{r}\times\vec{v} = \vec{r}\times(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0$]

$L = mr^2\dot{\theta}$

αφού η κίνηση είναι επίπεδη χρησιμοποιώ πολικές συντεταγμένες

$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ = σταθ. (σταθερή εμβαδική ταχύτητα, 2ος νόμος Kepler)

Η $\vec{F}$ είναι συντηρητική με $F = -\frac{dU}{dr}$, $U(r) = -\int F(r)dr$, άρα το ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι

$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + U(r)$

$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$, $U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = U(r) + U_c(r)$

(ενεργός δυναμική ενέργεια)

Επομένως, η κίνηση έχει αναχθεί σε μία ισοδύναμη μονοδιάστατη με δυναμικό $U_{eff}(r)$.

$U_c(r) = \frac{L^2}{2mr^2}$ φυγόκεντρος δυναμική ενέργεια

$F_c(r) = -\frac{\partial U_c}{\partial r} = \frac{L^2}{mr^3} = mr\dot{\vartheta}^2 > 0$ φυγόκεντρος δύναμη (απωστική)

Ισχύει $\quad m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}$

διότι από την εξίσωση Newton $m\vec{a} = F(r)\hat{e}_r$ όπου σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta})\hat{e}_r + \frac{1}{r}(r^2\dot{\vartheta})^{\cdot}\hat{e}_\vartheta \Rightarrow$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta})\hat{e}_r + \frac{m}{r}(r^2\dot{\vartheta})^{\cdot}\hat{e}_\vartheta = F(r)\hat{e}_r \Rightarrow$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}) = F(r)$$

$$\frac{m}{r}(r^2\dot{\vartheta})^{\cdot} = 0 \rightarrow r^2\dot{\vartheta} = \sigma\tau\alpha\vartheta. = \frac{L}{m} \rightarrow \dot{\vartheta} = \frac{L}{mr^2}$$

άρα $\quad m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r) \rightarrow m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}$

Η ίδια εξίσωση για το $\ddot{r}$ προκύπτει και με παραγώγιση ως προς $t$ του ολοκληρώματος της ενέργειας

$$0 = \frac{1}{2}m2\dot{r}\ddot{r} + \frac{\partial U_{eff}}{\partial r}\dot{r} \Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} = -\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial U_c}{\partial r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}$$

Αντίστροφα από την εξίσωση $m\ddot{r} = -\frac{dU(r)}{dr} + \frac{L^2}{mr^3} \Rightarrow m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} + \dot{r}\frac{dU}{dr} = 0$

$$\Rightarrow m\frac{(\dot{r}^2)^{\cdot}}{2} + \frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\right)^{\cdot} + \frac{dU}{dr} = 0 \Rightarrow m\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U = \sigma\tau\alpha\vartheta. \Rightarrow$$

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) + U = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

Αλλά $\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + U = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + U = E$, άρα $E = \sigma\tau\alpha\vartheta.$

Τελικά $\quad E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) + U = \sigma\tau\alpha\vartheta. \Leftrightarrow \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = E$

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2},$$

οπότε ξαναπήραμε από το Ν. Νεύτωνα το ολοκλήρωμα της ενέργειας

Όρια κίνησης $\quad E \geq U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$

διότι $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U - \frac{L^2}{2mr^2} \geq 0$, η οποία συνθήκη είναι ισχυρότερη της $\frac{1}{2}mv^2 = E - U \geq 0$, αφού η πρώτη κάνει χρήση όχι μόνο του ολοκληρώματος της ενέργειας αλλά και της στροφορμής που περιορίζει περαιτέρω την κίνηση.

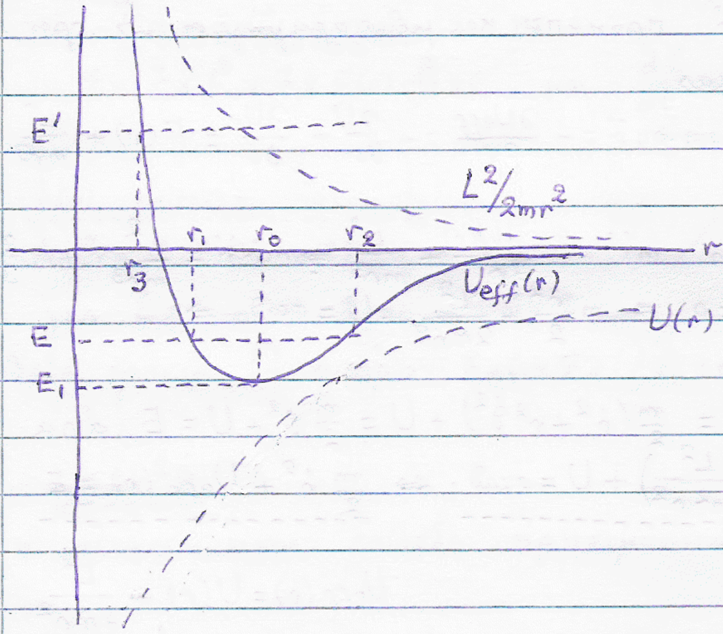
Είναι $\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\left(E-U-\frac{L^2}{2mr^2}\right)^{1/2} \Leftrightarrow t-t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\left(E-U-\frac{L^2}{2mr^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dr$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{L}{m\,r(t)^2} \Leftrightarrow \theta-\theta_0=\frac{L}{m}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{r(t)^2}$$

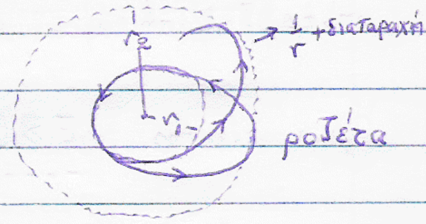
$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{dr}{dt}\Big/\frac{d\theta}{dt} = \pm\frac{\sqrt{2m}}{L}r^2\left(E-U-\frac{L^2}{2mr^2}\right)^{1/2} \Leftrightarrow \theta-\theta_0=\pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r^2}\left(E-U-\frac{L^2}{2mr^2}\right)^{\frac{1}{2}}dr$$

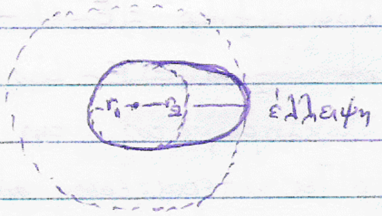
$$m\ddot{r}-\frac{L^2}{mr^3}=-\frac{dU}{dr} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{m}{L^2}\frac{dU}{du}=-\frac{m}{L^2}\frac{F}{u^2}, \quad u=\frac{1}{r}$$

Παράδειγμα $U(r)=-\frac{k}{r}$, $k>0$

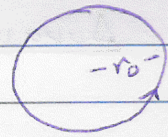



$E<0$: ταλάντωση μεταξύ των ακτίνων $r_1, r_2$

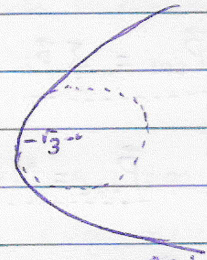


$E_1 < 0$ : κυκλική τροχιά ακτίνας $r_0$




$E' \geq 0$ : $[r_3, \infty)$ όχι φραγμένη τροχιά




παραβολή $(E=0)$
υπερβολή $(E>0)$