ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική Ι

Σημειώσεις – Δυνάμεις

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

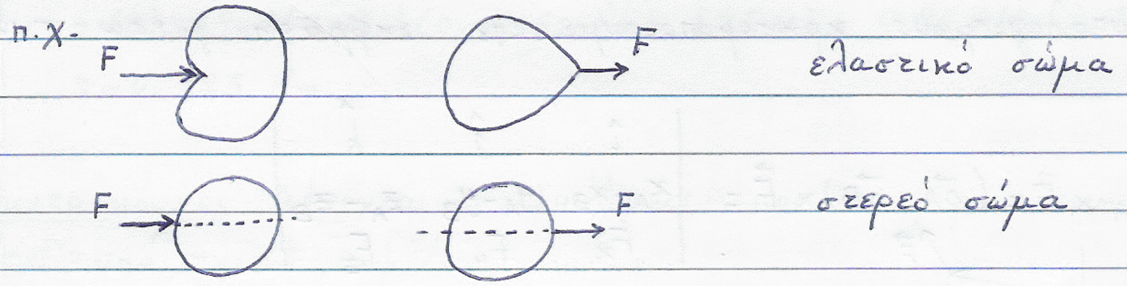
Δυνάμεις

Στερεό λέγεται ένα σώμα που δεν παραμορφώνεται υπό την επίδραση δυνάμεων.

Αξίωμα μεταφοράς Εμπειρικά γνωρίζουμε ότι στα στερεά σώματα (σε αντίθεση με άλλα που παραμορφώνονται) δεν αλλάζει τίποτα στην κίνηση ή στην ισορροπία τους αν μία δύναμη εφαρμοστεί σε άλλο σημείο που βρίσκεται στον φορέα της δύναμης.

Δηλαδή λέμε ότι η δύναμη είναι "ολισθαίνον" διάνυσμα.
(προφανώς για υλικό σημείο η δύναμη δεν είναι ολισθαίνον διάνυσμα)

π.χ.

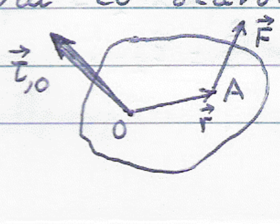


Ισοδύναμες λέγονται δύο δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ που ασκούνται σ' ένα σώμα όταν επιφέρουν το ίδιο αποτέλεσμα ως προς τη μεταφορική και την περιστροφική κίνηση (συμβολίζουμε $\vec{F}_1 \sim \vec{F}_2$). Επομένως, δύο ισοδύναμες δυνάμεις έχουν ίδια μέτρα, κατευθύνσεις και φορείς.

Υπάρχει πάντα το αξίωμα δράσης-αντίδρασης είτε τα σώματα είναι ακίνητα είτε κινούνται.

Η μελέτη των δυνάμεων στα σώματα γίνεται είτε κατά την ισορροπία τους (στατική) είτε κατά την κίνηση τους (δυναμική).

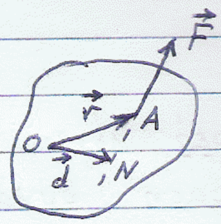
Ροπή ως προς O της δύναμης $\vec{F}$ που εφαρμόζεται στο σημείο A είναι το διάνυσμα $\vec{\tau}_{,O} = \vec{r} \times \vec{F}$, όπου $\vec{r} = \vec{OA}$



Προφανώς, $\vec{\tau}_{,O} \perp \vec{r}, \vec{F}$

Ισχύει $\vec{\tau}_{,O} = \vec{d} \times \vec{F}$, $\tau_{,O} = Fd$, όπου $\vec{d} = \vec{ON}$

(d : μοχλοβραχίονας της δύναμης)

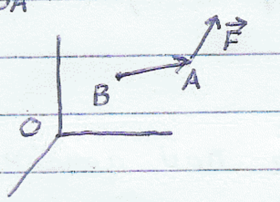


διότι το $\vec{F}$ είναι ολισθαίνον διάνυσμα, άρα μπορεί να εφαρμοστεί στο N.
Ή ακόμα $\vec{\tau}_{,O} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{d} + \vec{NA}) \times \vec{F} = \vec{d} \times \vec{F} + \vec{NA} \times \vec{F} = \vec{d} \times \vec{F}$

Η ροπή της $\vec{F}$ ως προς άλλο σημείο O' είναι $\vec{\tau}_{,O'} = \vec{r}\,' \times \vec{F} = (\vec{O'O} + \vec{r}) \times \vec{F} = \vec{\tau}_{,O} + \vec{O'O} \times \vec{F}$, επομένως η ροπή $\vec{\tau}_{,O}$ συμβολίζεται ως ένα διάνυσμα με σημείο εφαρμογής το O.

Στους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε την έκφραση μέσω συνιστωσών

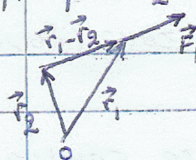
$$\vec{\tau}_{,B} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = (\vec{OA} - \vec{OB}) \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



Ισχύει $\vec{F}_1 \sim \vec{F}_2 \Leftrightarrow \vec{F}_1 = \vec{F}_2 , \ \vec{\tau}_{1,O} = \vec{\tau}_{2,O}$ για κάποιο σημείο O

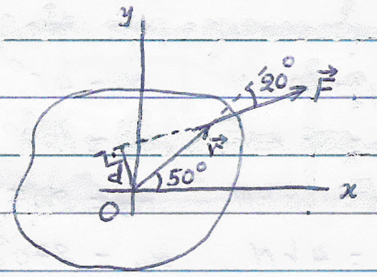
$\Leftrightarrow \vec{F}_1 = \vec{F}_2 , \ \vec{\tau}_{1,O} = \vec{\tau}_{2,O}$ για κάθε σημείο O

Πράγματι, αν $\vec{F}_1 \sim \vec{F}_2$, οι $\vec{F}_1 , \vec{F}_2$ είναι ίσες και βρίσκονται στον ίδιο φορέα. Άρα, για το τυχόν σημείο O είναι $\vec{\tau}_{1,O} = \vec{\tau}_{2,O}$.
Αντίστροφα, αν οι δυνάμεις $\vec{F}_1 , \vec{F}_2$ με $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ εφαρμόζονται στα σημεία $\vec{r}_1 , \vec{r}_2$ και για κάποιο σημείο O είναι $\vec{\tau}_{1,O} = \vec{\tau}_{2,O}$
$\Rightarrow \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \Rightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = 0 \Rightarrow \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \parallel \vec{F}_1 \Rightarrow \vec{F}_2$ έχει τον ίδιο φορέα με το $\vec{F}_1 \Rightarrow \vec{F}_1 \sim \vec{F}_2$.



Αν ισχύει $\vec{\tau}_{1,O} = \vec{\tau}_{2,O}$ για κάποιο O τότε για το τυχόν O' είναι $\vec{\tau}_{1,O'} = \vec{r}_1\,' \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 + \vec{O'O}) \times \vec{F}_1 =$
$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{O'O} \times \vec{F}_1 = \vec{\tau}_{1,O} + \vec{O'O} \times \vec{F}_2 = \vec{\tau}_{2,O} + \vec{O'O} \times \vec{F}_2 =$
$= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{O'O} \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 + \vec{O'O}) \times \vec{F}_2 = \vec{r}_2\,' \times \vec{F}_2 = \vec{\tau}_{2,O'}$

Παράδειγμα



$F = 6N$, $r = 45cm$, $\tau = ;$

Είναι $d = r \sin 20^\circ = (0.45m)(0.342) = 0.154m$

$\tau = Fd = (6N)(0.154m) = 0.924 \, Nm$

Αλλιώς:

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

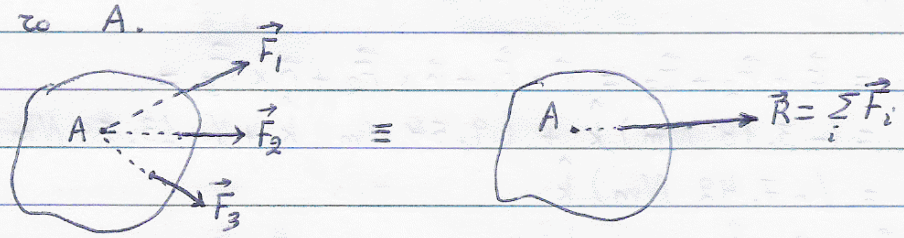
$x = r\cos 50^\circ = 0.289m$, $y = r \sin 50^\circ = 0.345m$

$F_x = F\cos 30^\circ = 5.196N$, $F_y = F\sin 30^\circ = 3N$

$\tau = (0.289m)(3N) - (0.345m)(5.196N) = 0.867Nm - 1.792Nm =$
$= -0.925 \, Nm$

Συντρέχουσες λέγονται οι δυνάμεις που οι φορείς τους διέρχονται από κοινό σημείο.

Ένα σύστημα συντρεχουσών από το A δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$ είναι ισοδύναμο με τη συνισταμένη τους $\sum_i \vec{F}_i$ διερχόμενη από το A.

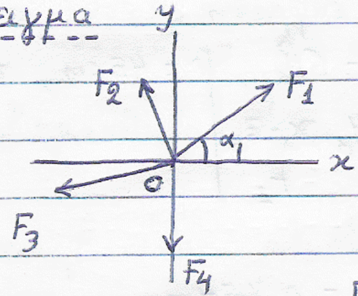


Πράγματι, λόγω της αρχής της μεταφοράς το σύστημα των δυνάμεων είναι ισοδύναμο με το σύστημα όπου όλες οι $\vec{F}_i$ εφαρμόζονται στο A και επομένως μπορούν να αντικατασταθούν από τη συνισταμένη τους.

Θεώρημα Varignon: η ροπή της συνισταμένης συντρεχουσών δυνάμεων ως προς τυχόν σημείο O ισούται με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών.

Πράγματι, $\vec{\tau}_{R,o} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{r} \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{\tau}_{i,o}$

Παράδειγμα



$F_1 = 12\,kN \quad \alpha_1 = 45^\circ$
$F_2 = 8\,kN \quad \alpha_2 = 100^\circ$
$F_3 = 18\,kN \quad \alpha_3 = 205^\circ$
$F_4 = 4\,kN \quad \alpha_4 = 270^\circ$

Ποια η συνισταμένη $\vec{R}$;

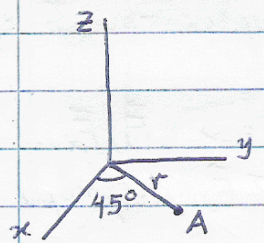
$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

$$R_x = \sum_i F_{ix} = \sum_i F_i \cos\alpha_i = F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2 + F_3\cos\alpha_3 + F_4\cos\alpha_4$$
$$= 12\cos 45^\circ + 8\cos 100^\circ + 18\cos 205^\circ + 4\cos 270^\circ = -9.22\,kN$$

$$R_y = \sum_i F_{iy} = \sum_i F_i \sin\alpha_i = 4.76\,kN$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 10.4\,kN, \quad \tan\alpha_R = \frac{R_y}{R_x} = -0.52 \rightarrow \alpha_R = 152.5^\circ$$

Παράδειγμα



$r = 1.5\,m$

Δυνάμεις στο A: $\vec{F}_1 = 6\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{F}_2 = -2\hat{i} + 7\hat{j}$, $\vec{F}_3 = 5\hat{i} - 8\hat{j}\,(N)$

Ποια η συνισταμένη ροπή;

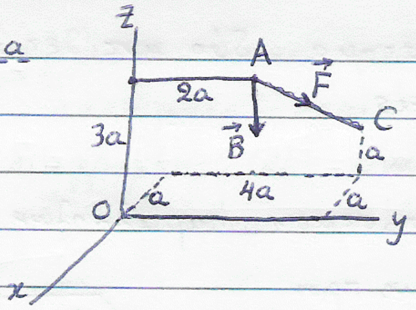
Είναι $\sum_i \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 = \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \vec{r}\times\vec{F}_3 =$
$$= (-3.18\,Nm)\hat{k} + (9.54\,Nm)\hat{k} + (-13.78\,Nm)\hat{k} =$$
$$= (-7.42\,Nm)\hat{k}$$

Αλλιώς: $\sum_i \vec{\tau}_i = \vec{r}\times\vec{R}$

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = (6-2+5)\hat{i} + (3+7-8)\hat{j} = 9\hat{i} + 2\hat{j}\ (N)$$

$$\vec{r} = r\cos 45^\circ\,\hat{i} + r\sin 45^\circ\,\hat{j} = 1.06\,\hat{i} + 1.06\,\hat{j}\ (m)$$
$$\Rightarrow \vec{r}\times\vec{R} = (xR_y - yR_x)\hat{k} = (2.12 - 9.54)\hat{k} = (-7.42\,Nm)\hat{k}$$

Παράδειγμα



$F = B$

Να βρεθεί η συνολική ροπή των δυνάμεων $\vec{B}, \vec{F}$ ως προς O

Η ροπή της δύναμης $\vec{B}$ είναι $\vec{\tau}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} aB$

Η ροπή της $\vec{F}$ είναι $\vec{\tau}_2 = \vec{OA} \times \vec{F}$

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} a$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} a - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} a$$

$$\hat{e}_{AC} = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{1}{a\sqrt{1+4+4}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} a = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = F\,\hat{e}_{AC} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} B$$

$$\vec{\tau}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2a & 3a \\ -\frac{B}{3} & \frac{2B}{3} & -\frac{2B}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} aB$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -16 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} aB$$

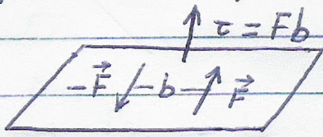
Αλλιώς: αφού οι $\vec{B}, \vec{F}$ είναι συντρέχουσες, άρα $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{\vec{R}} = \vec{OA} \times \vec{R}$, όπου $\vec{R} = \vec{B} + \vec{F}$ η συνισταμένη.

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} B, \quad \vec{F} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} B \quad \Rightarrow \vec{R} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} B$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{\vec{R}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2a & 3a \\ -\frac{1}{3}B & \frac{2}{3}B & -\frac{5}{3}B \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -16 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} aB$$

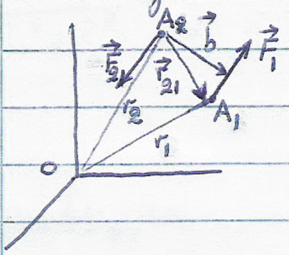
<u>Ζεύγος δυνάμεων</u> είναι ένα σύστημα δύο αντίθετων δυνάμεων $\vec{F}, -\vec{F}$ σε διαφορετικούς φορείς.

Ισχύει $\tau_{\text{ζεύγους}} = Fb$, b = απόσταση παράλληλων φορέων
(ανεξαρτήτως του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται)



Αφού η ροπή ζεύγους είναι ανεξάρτητη του σημείου υπολογισμού της, άρα είναι ελεύθερο διάνυσμα.

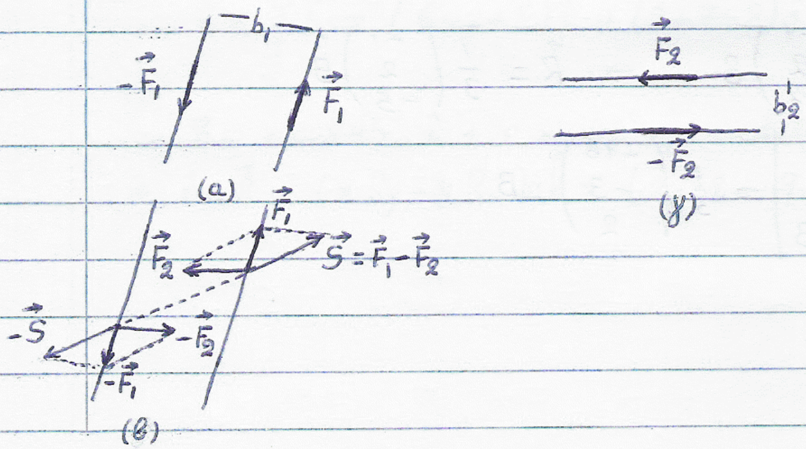
Πράγματι, αν $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ τα σημεία εφαρμογής των $\vec{F}_1 = \vec{F}$, $\vec{F}_2 = -\vec{F}$, η ροπή ζεύγους ως προς το Ο είναι



$$\vec{\tau}_{,0} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 =$$
$$= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{21} \times \vec{F}_1 = \vec{b} \times \vec{F}_1$$
$$(\vec{r}_{12} \times \vec{F}_2)$$
$$\Rightarrow \tau_{,0} = F_1 b = Fb$$

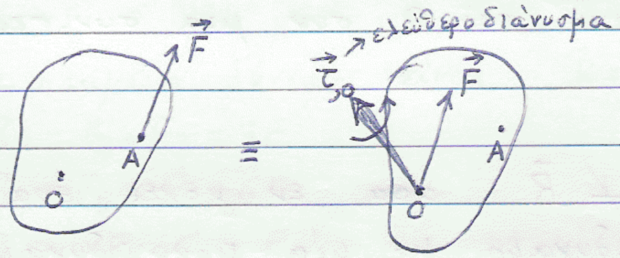
Σε αντίθεση με το σύστημα των συντρεχουσών δυνάμεων, ένα ζεύγος δεν μπορεί να αντικατασταθεί από μία δύναμη, αφού $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_{\vec{R}} = 0 \neq \vec{\tau}_{\text{ζεύγους}}$.

<u>Ισχύει</u> Αν δύο ζεύγη δυνάμεων (που δρουν στο ίδιο ή σε παράλληλα επίπεδα) έχουν ίσες ροπές, τότε είναι ισοδύναμα. Δηλαδή, έστω τα ζεύγη $\vec{F}_1, -\vec{F}_1$ σε απόσταση b_1 και $\vec{F}_2, -\vec{F}_2$ σε απόσταση b_2 με $\tau = F_1 b_1 = F_2 b_2$

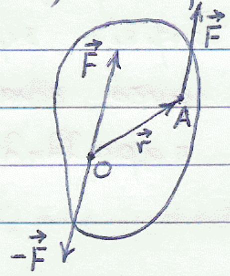


Το διάγραμμα (α) είναι ισοδύναμο με το (β), αφού απλώς οι $\vec{F}_1, -\vec{F}_1$ αντικαθίστανται από τις συνιστώσες τους $\vec{S}, \vec{F}_2$. Αλλά το διάγραμμα (β) είναι ισοδύναμο με το (γ) αφού οι δυνάμεις $\vec{S}, -\vec{S}$ είναι αντίθετες.

Ισχύει Μία δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται σ' ένα σημείο ενός στερεού μπορεί να μεταφερθεί σ' ένα άλλο σημείο, αρκεί να προστεθεί ένα ζεύγος με ροπή ίση προς τη ροπή της $\vec{F}$ ως προς το νέο σημείο Ο, $\vec{\tau}_{,O} = \vec{OA} \times \vec{F}$



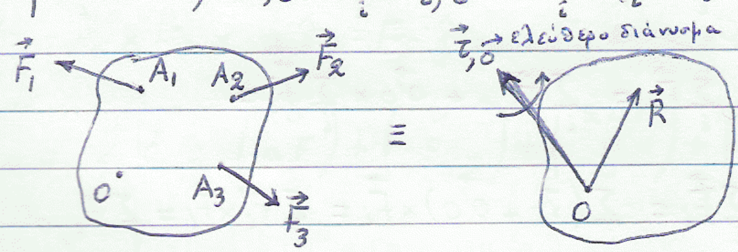
Πράγματι, το πρώτο σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα



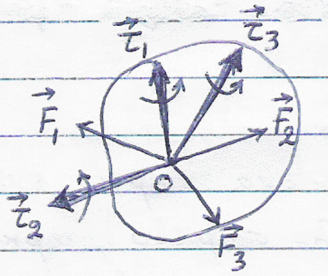
και αυτό με τη σειρά του είναι ισοδύναμο με το δεύτερο σύστημα.

Σύστημα δυνάμεων

Ένα γενικό σύστημα δυνάμεων $\vec{F}_i$ που ασκούνται σ' ένα στερεό μπορεί να αντικατασταθεί από τη συνισταμένη δύναμη $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ που δρα σε οποιοδήποτε σημείο Ο, συν τη συνισταμένη ροπή των δυνάμεων ως προς Ο, $\vec{\tau}_{,O} = \sum_i \vec{\tau}_{i,O} = \sum_i \vec{OA}_i \times \vec{F}_i$.



Πράγματι, κάθε δύναμη $\vec{F}_i$ μπορεί να μεταφερθεί στο O μαζί με την αντίστοιχη ροπή της $\vec{\tau}_{i,O} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, $\vec{r}_i = \vec{OA}_i$.



Άρα, το πρώτο σύστημα είναι ισοδύναμο με τη συνισταμένη δύναμη $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ ασκούμενη στο O συν μια συνισταμένη ροπή $\vec{\tau}_{,O} = \sum_i \vec{\tau}_{i,O}$

Επειδή εν γένει $\vec{\tau}_{,O} \not\perp \vec{R}$, άρα εν γένει ένα σύστημα δυνάμεων δεν είναι ισοδύναμο με μία μόνο δύναμη. Στις περιπτώσεις των συντρεχουσών δυνάμεων (όπως είδαμε), των συνεπίπεδων και των παράλληλων δυνάμεων αυτό γίνεται, δηλαδή γίνεται $\vec{\tau}_{,O} = \vec{r}' \times \vec{R}$, όπου $\vec{r}'$ το σημείο εφαρμογής της $\vec{R}$. Αναγκαία συνθήκη για να γίνεται αυτό είναι $\vec{R} \perp \vec{\tau}_{,O}$ και πράγματι οι συντρέχουσες, συνεπίπεδες, παράλληλες δυνάμεις ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη.

Ισχύει

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots\} \sim \{\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots\} \Leftrightarrow \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i', \quad \sum_i \vec{\tau}_{i,O} = \sum_i \vec{\tau}_{i,O}' \text{ για κάποιο σημείο } O$$

$$\Leftrightarrow \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i', \quad \sum_i \vec{\tau}_{i,O} = \sum_i \vec{\tau}_{i,O}' \text{ για κάθε σημείο } O$$

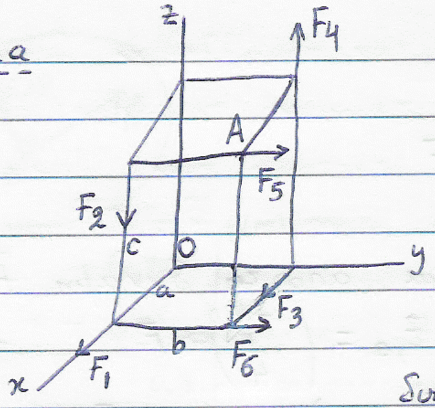
Πράγματι, ως προς το τυχόν σημείο O' είναι

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,O'}' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i' = \sum_i (\vec{r}_i + \vec{O'O}) \times \vec{F}_i' = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i' + \vec{O'O} \times \sum_i \vec{F}_i' =$$

$$= \sum_i \vec{\tau}_{i,O}' + \vec{O'O} \times \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{\tau}_{i,O} + \vec{O'O} \times \sum_i \vec{F}_i =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{O'O} \times \sum_i \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i + \vec{O'O}) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{\tau}_{i,O'}$$

Παράδειγμα



$F_1 = F_2 = F$

$F_3 = F_4 = 2F$

$F_5 = F_6 = 3F$

$b = a, \quad c = 2a$

Να αντικατασταθεί το σύστημα των δυνάμεων μ' ένα ισοδύναμο που αποτελείται από μία δύναμη εφαρμοζόμενη στο σημείο O σύν μία ροπή. Το ίδιο για το A.

Η συνισταμένη δύναμη είναι $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$

$$\Rightarrow R_x = F_1 + F_3 = 3F$$

$$R_y = F_5 + F_6 = 6F$$

$$R_z = -F_2 + F_4 = F$$

Άρα $\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} F \quad , \quad R = \sqrt{3^2 + 6^2 + 1^2}\, F = \sqrt{46}\, F$

Υπολογίζουμε τις διάφορες ροπές των δυνάμεων ως προς το O.

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = 0$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = a\hat{i} \times (-F_2)\hat{k} = aF_2\,\hat{j} = aF\,\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ aF \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = b\hat{j} \times F_3\hat{i} = -bF_3\,\hat{k} = -2aF\,\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2aF \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_4 = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = b\hat{j} \times F_4\hat{k} = bF_4\,\hat{i} = 2aF\,\hat{i} = \begin{pmatrix} 2aF \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_5 = \vec{r}_5 \times \vec{F}_5 = (a\hat{i} + c\hat{k}) \times F_5\hat{j} = aF_5\,\hat{k} - cF_5\,\hat{i} = -6aF\,\hat{i} + 3aF\,\hat{k} = \begin{pmatrix} -6aF \\ 0 \\ 3aF \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_6 = \vec{r}_6 \times \vec{F}_6 = a\hat{i} \times F_6\hat{j} = aF_6\,\hat{k} = 3aF\,\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3aF \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_O = \sum_i \vec{\tau}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ aF \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2aF \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2aF \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6aF \\ 0 \\ 3aF \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3aF \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4aF \\ aF \\ 4aF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} aF$$

$$\tau_{,O} = \sqrt{4^2+1^2+4^2}\; aF = \sqrt{33}\; aF$$

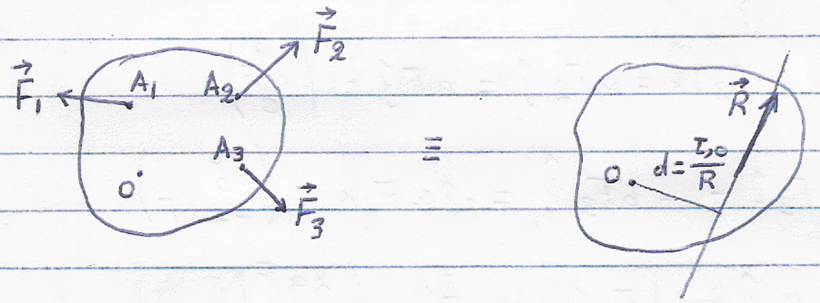
Άρα το σύστημα αντικαθίσταται από τη δύναμη $\vec{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} F$ στο σημείο O και τη ροπή $\vec{\tau}_{,O} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} aF$.

Ως προς το A: $\vec{\tau}_{,A} = \begin{pmatrix} bF_2 + cF_6 \\ -cF_1 - cF_3 + aF_4 \\ bF_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7aF \\ -4aF \\ aF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} aF$

$$\tau_{,A} = \sqrt{7^2+4^2+1^2}\; aF = \sqrt{66}\; aF$$

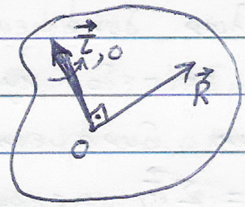
Συνεπίπεδες δυνάμεις

Ένα σύστημα συνεπίπεδων δυνάμεων $\vec{F}_i$ που ασκούνται σ' ένα στερεό μπορεί ν' αντικατασταθεί από τη συνισταμένη δύναμη $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ σε φορέα που απέχει $d = \frac{\tau_{,O}}{R}$ από ένα τυχόν σημείο O ως προς το οποίο υπολογίζονται οι ροπές, δηλ. $\vec{\tau}_{,O} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{OA_i} \times \vec{F}_i$
Η εξίσωση ευθείας του φορέα είναι $xR_y - yR_x = \tau_{,O}$ (← αλγεβρική τιμή)

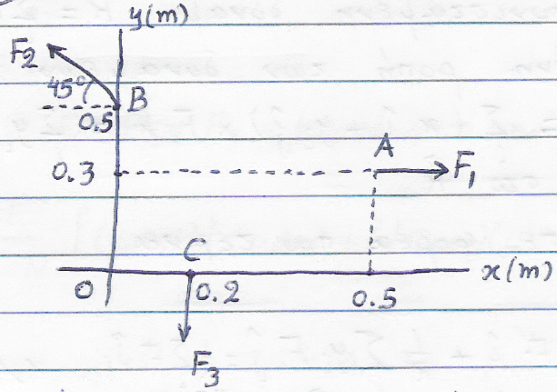


Πράγματι, το πρώτο γενικό σύστημα δυνάμεων $\vec{F}_i$ είναι ισοδύναμο με τη συνισταμένη δύναμη $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ που ασκείται σε οποιοδήποτε σημείο O συν τη συνισταμένη ροπή των δυνάμεων ως προς O, $\vec{\tau}_{,O} = \sum_i \vec{\tau}_{i,O} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$. Εν συνεχεία, αφού $\vec{R} \perp \vec{\tau}_{,O}$, άρα αν η $\vec{R}$ μεταφερθεί σε φορέα που απέχει $d = \frac{\tau_{,O}}{R}$, τότε πράγματι η ροπή της $\vec{R}$ ως προς O είναι $\tau_{R,O} = Rd = \tau_{,O}$. Δηλαδή, το σύστημα είναι ισοδύναμο με την $\vec{R}$ στον παράλληλο φορέα.
Αν $\vec{r}$ είναι τυχόν σημείο του καινούργιου φορέα τότε

$$\vec{\tau}_{R,O} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{\tau}_{,O} \Leftrightarrow xR_y - yR_x = \tau_{,O}.$$



Παράδειγμα



$F_1 = 10N$, $F_2 = 8N$

$F_3 = 7N$

Να αντικατασταθεί το παραπάνω σύστημα δυνάμεων από μία μόνο δύναμη.

Οι δυνάμεις είναι συνεπίπεδες $\vec{F}_1 = (10N)\hat{i}$, $\vec{F}_2 = (F_2 \cos 135^\circ)\hat{i} + (F_2 \sin 135^\circ)\hat{j} = (-5.66N)\hat{i} + (5.66N)\hat{j}$, $\vec{F}_3 = (-7N)\hat{j}$.

Η συνισταμένη είναι

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 4.34\hat{i} + (-1.34)\hat{j} \quad (N)$$

$$R = 4.54N, \qquad \alpha = -17.1^\circ \text{ με τον } Ox.$$

Υπολογίζουμε τις ροπές ως προς το σημείο O

$\vec{r}_A = (0.5, 0.3, 0)$, $\vec{r}_B = (0, 0.5, 0)$, $\vec{r}_C = (0.2, 0, 0)$ (m)

$$\vec{\tau}_{1,O} = \vec{r}_A \times \vec{F}_1 = (x_A F_{1y} - y_A F_{1x})\hat{k} = -(0.3m)(10N)\hat{k} = (-3Nm)\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{2,O} = \vec{r}_B \times \vec{F}_2 = (x_B F_{2y} - y_B F_{2x})\hat{k} = -(0.5m)(-5.66N)\hat{k} = (2.83Nm)\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{3,O} = \vec{r}_C \times \vec{F}_3 = (x_C F_{3y} - y_C F_{3x})\hat{k} = (0.2m)(-7N)\hat{k} = (-1.4Nm)\hat{k}$$

Άρα $\vec{\tau}_{,O} = \vec{\tau}_{1,O} + \vec{\tau}_{2,O} + \vec{\tau}_{3,O} = (-1.57Nm)\hat{k}$

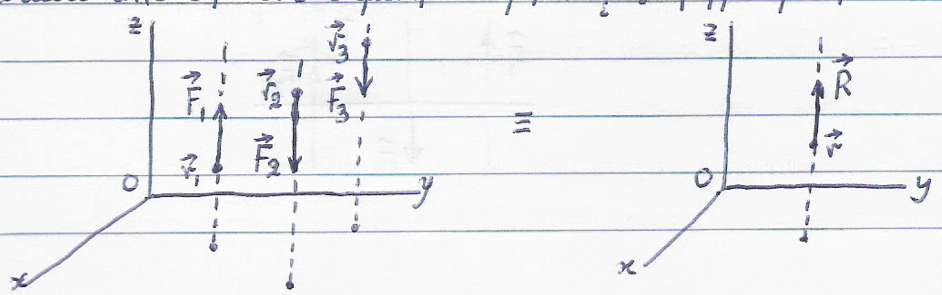
Ο φορέας που πρέπει να εφαρμοστεί η δύναμη $\vec{R}$ καθορίζεται από

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{\tau}_{,O} \Leftrightarrow xR_y - yR_x = \tau_{,O} \Leftrightarrow x(-1.34) - y(4.34) = -1.57 \Leftrightarrow 1.34x + 4.34y = 1.57$$

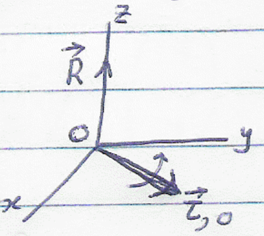
Είναι $d = \dfrac{\tau_O}{R} = \dfrac{1.57}{4.54}m = 0.34m = \dfrac{|1.34\times 0 + 4.34\times 0 - 1.57|}{\sqrt{1.34^2 + 4.34^2}}$.

Παράλληλες δυνάμεις

Ένα σύστημα παράλληλων δυνάμεων $\vec{F}_i$ που ασκούνται σ' ένα στερεό μπορεί να αντικατασταθεί από τη συνισταμένη δύναμη $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ εφαρμοζόμενη στο σημείο $\vec{r} = \dfrac{\sum_i F_i \vec{r}_i}{\sum_i F_i}$.



Πράγματι, έστω ότι οι φορείς των παράλληλων δυνάμεων είναι παράλληλοι στον άξονα z και τέμνουν το επίπεδο xy στα σημεία $A_i' = \vec{d}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j}$. Το σύστημα των δυνάμεων $\vec{F}_i$ είναι ισοδύναμο με τη συνισταμένη δύναμη $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ ασκούμενη στο Ο, συν τη συνισταμένη ροπή των δυνάμεων $\vec{\tau}_{,O} = \sum_i \vec{\tau}_{i,O} =$
$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{d}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (x_i\hat{i} + y_i\hat{j}) \times F_i\hat{k} = \sum_i y_i F_i \hat{i} - \sum_i x_i F_i \hat{j}$
και είναι κάθετη στο $\vec{R}$.



Αν η $\vec{R}$ μεταφερθεί σε φορέα που τέμνει το xy στο σημείο

$\underline{\vec{d}} = x\hat{i} + y\hat{j} = \frac{1}{R}\sum_i x_i F_i \hat{i} + \frac{1}{R}\sum_i y_i F_i \hat{j} = \underline{\frac{1}{R}\sum_i F_i \vec{d}_i}$,

τότε πράγματι η ροπή της $\vec{R}$ ως προς Ο είναι

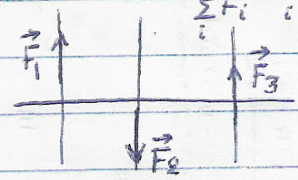
$\vec{\tau}_{R,O} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{d} \times \vec{R} = (x\hat{i} + y\hat{j}) \times R\hat{k} = yR\hat{i} - xR\hat{j} = \sum_i y_i F_i \hat{i} - \sum_i x_i F_i \hat{j} = \vec{\tau}_{,O}$.

Άρα το σύστημα των παράλληλων δυνάμεων είναι ισοδύναμο προς την $\vec{R}$ ασκούμενη στον παράλληλο φορέα.

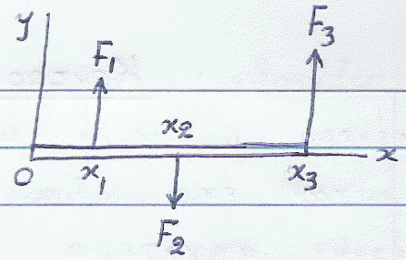
Αν $A_i = \vec{r}_i$ τότε $\vec{r}_i = \vec{d}_i + \overrightarrow{A_i'A_i}$, άρα το διάνυσμα $\vec{r} = \frac{\sum_i F_i \vec{r}_i}{\sum_i F_i} = \vec{d} + \frac{\sum_i F_i (A_i'A_i)}{\sum_i F_i}\hat{k}$, δηλαδή το $\vec{r}$ βρίσκεται στον ίδιο παράλληλο φορέα που ήδη βρήκαμε και αποτελεί απλώς σύμβαση για το σημείο εφαρμογής της $\vec{R}$.

<u>Σχόλιο</u> Ο παράλληλος φορέας της $\vec{R}$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου Ο, αφού αν θεωρήσουμε άλλη αρχή Ο' μέτρησης των διανυσμάτων, τότε $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \overrightarrow{O'O}$ και η έκφραση $\vec{r}' = \frac{1}{R}\sum_i F_i \vec{r}_i' = \frac{1}{R}\sum_i F_i(\vec{r}_i + \overrightarrow{O'O}) = \frac{1}{R}\sum_i F_i \vec{r}_i + \frac{1}{R}\sum_i F_i \overrightarrow{O'O} = \vec{r} + \overrightarrow{O'O}$ δίνει πάλι το ίδιο σημείο εφαρμογής όπως προηγουμένως μετρημένο από το Ο'.

<u>Σχόλιο</u> Στη μονοδιάστατη περίπτωση που οι φορείς των δυνάμεων είναι κάθετοι στον άξονα x, τότε $x = \frac{1}{\sum_i F_i}\sum_i$ ...



Παράδειγμα



Να βρεθεί η ισοδύναμη δύναμη

$F_1 = 200N$, $x_1 = 0.08m$

$F_2 = 100N$, $x_2 = 0.2m$

$F_3 = 300N$, $x_3 = 0.4m$

Είναι $R = \sum_i F_i = F_1 - F_2 + F_3 = 400N$ ασκούμενη στο σημείο

$$x = \frac{\sum_i F_i x_i}{\sum_i F_i} = \frac{1}{400N}\left[(200N)(0.08m) + (-100N)(0.2m) + (300N)(0.4m)\right] = 0.29m$$

Αν πάρουμε σαν αρχή μέτρησης το μέσο B, τότε:

$$x' = \frac{\sum_i F_i x_i'}{\sum_i F_i} = \frac{1}{400N}\left[(200N)(-0.12m) + (-100N)(0\ m) + (300N)(0.2m)\right] = 0.09m$$

που ορίζει το ίδιο σημείο με προηγουμένως.