ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική Ι

Σημειώσεις – Κινηματική

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

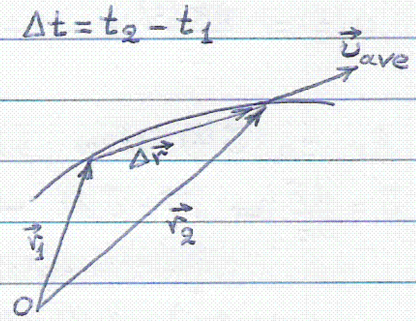
Κινηματική

Η κινηματική είναι το κομμάτι της Μηχανικής που ασχολείται με τις γεωμετρικές ιδιότητες της κίνησης ενός υλικού σημείου ή στερεού σώματος. Στην Κλασσική Μηχανική δεχόμαστε ότι ο χώρος είναι τριών διαστάσεων και Ευκλείδιος. Η κίνηση είναι σχετική έννοια και πάντοτε αναφέρεται σε κάποιο παρατηρητή. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει απόλυτο σύστημα αναφοράς, δηλαδή δεν υπάρχει ο υποθετικός αιθέρας στον κενό χώρο που θα όριζε το απόλυτο σύστημα αναφοράς, ωστόσο στη μη-σχετικιστική κλασσική μηχανική ο χώρος μπορεί να θεωρηθεί απόλυτος.

Αν ως προς τον παρατηρητή O το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = \vec{OP}$ ενός υλικού σημείου μεταβάλλεται με το χρόνο $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (τροχιά), ορίζονται:

- η μέση ταχύτητα για το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\vec{\upsilon}_{ave} = \langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$



δηλαδή είναι ο λόγος της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο έγινε αυτή η μετατόπιση.

Προφανώς είναι ανεξάρτητη της τροχιάς μεταξύ των δύο σημείων, αρκεί το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο σημείων να είναι το ίδιο. Αν το αρχικό και το τελικό σημείο συμπίπτουν, τότε $\vec{\upsilon}_{ave} = 0$. Στη μονοδιάστατη κίνηση το υ_{ave} ισούται με την κλίση της ευθείας που ενώνει το αρχικό με το τελικό σημείο στο διάγραμμα $t-x$.

παράδειγμα

$x(t) = 5t^2 + 1 (m)$, $t_1 = 2 sec$, $t_2 = 3 sec$, $\upsilon_{ave} = ;$

$$\upsilon_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5t_2^2 + 1) - (5t_1^2 + 1)}{t_2 - t_1} = \frac{5(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} =$$

$$= 5(t_2 + t_1) = 5 \times 5 = 25\ m/sec$$

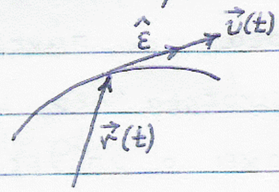
- η (στιγμιαία) ταχύτητα είναι το όριο της μέσης ταχύτητας όταν το Δt τείνει στο μηδέν

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{ave} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

δηλαδή είναι η παράγωγος του διανύσματος θέσης ως προς το χρόνο.

Ισχύει $\underline{\vec{v} = v\hat{\varepsilon}}$, $\hat{\varepsilon}$: μοναδιαίο εφαπτόμενο στην τροχιά $\vec{r}(t)$, $\underline{v = \frac{ds}{dt}}$

δηλαδή το $\vec{v}$ βρίσκεται πάνω στην εφαπτομένη της τροχιάς στο θεωρούμενο σημείο,



διότι $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$

όπου s: μήκος τόξου (απόσταση) από σταθερό σημείο επί της τροχιάς,

οπότε $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{\varepsilon}$, άρα $\vec{v} = v\hat{\varepsilon}$.

<u>παράδειγμα</u>

$x(t) = -4t + 2t^2$ (m), $v(t = 2.5\text{ sec}) = ;$

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -4 + 4t$, $v(2.5) = -4 + 4 \times 2.5 = 6$ m/sec

Αν το $\vec{v}(t)$ είναι γνωστό, τότε $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$, αφού

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt \rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt$

- η μέση επιτάχυνση για το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\vec{a}_{ave} = \langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

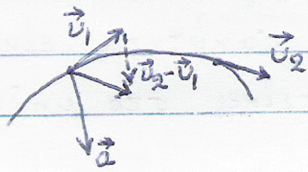
δηλαδή είναι ο λόγος της μεταβολής της ταχύτητας προς το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο έγινε αυτή η μεταβολή

- η (στιγμιαία) επιτάχυνση είναι το όριο της μέσης επιτάχυνσης όταν το Δt τείνει στο μηδέν

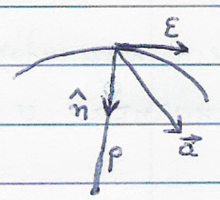
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{ave} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

δηλαδή είναι η παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο, ή η δεύτερη χρονική παράγωγος της θέσης.

Στη μη-ευθύγραμμη κίνηση το $\vec{a}$ έχει κατεύθυνση προς τα κοίλα της τροχιάς



Ισχύει $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_n$, $\hat{n}$: κάθετο στην τροχιά προς τα κοίλα
ρ: ακτίνα καμπυλότητας

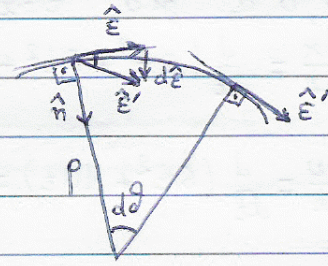


$\vec{a}_\varepsilon = \frac{dv}{dt}\hat{\varepsilon}$ "επιτρόχια (εφαπτομενική) επιτάχυνση"
οφείλεται στην αλλαγή του μέτρου v

$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\hat{n}$ "κεντρομόλος επιτάχυνση"
οφείλεται στη αλλαγή της κατεύθυνσης της $\vec{v}$

διότι

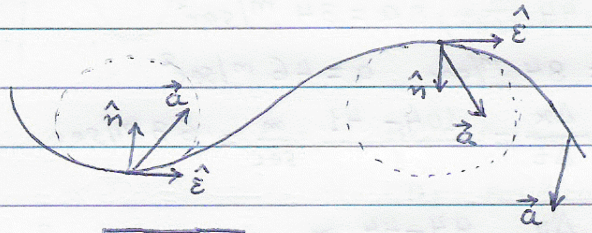
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{\varepsilon}) = \frac{dv}{dt}\hat{\varepsilon} + v\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}$$



όπου $d\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}' - \hat{\varepsilon} = d\theta\,\hat{n} = \frac{ds}{\rho}\hat{n}$

$$\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} = \frac{d\hat{\varepsilon}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\hat{n}}{\rho}v = \frac{v}{\rho}\hat{n}$$

π.χ.



Είναι $a = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_n^2}$

Αν το $\vec{a}(t)$ είναι γνωστό, τότε $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)\,dt$
αφού $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow d\vec{v} = \vec{a}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t}\vec{a}\,dt \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t}\vec{a}\,dt$

Αν $\vec{a}$ = σταθερό $\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0)$ και $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2$,
(αφού $\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t}[\vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0)]\,dt$) και ακόμα $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}(t)}{2}(t-t_0)$, δηλαδή
το $\vec{r}(t)$ βρίσκεται πάντα στο επίπεδο των $\vec{v}_0, \vec{a}$ που περνάει από το $\vec{r}_0$.
π.χ. στο ομογενές βαρυτικό πεδίο $\vec{a} = -g\hat{y}$, $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{x} + v_{0y}\hat{y}$, $t_0 = 0$,
άρα $v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y} - gt$, $x = x_0 + v_{0x}t$, $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

$$\Rightarrow y - y_0 = -\frac{g}{2v_{0x}^2}(x-x_0)^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x-x_0) \quad \text{παραβολή}$$

(στο πραγματικό πεδίο βαρύτητας της γής $\vec{a} \neq$ σταθ και η τροχιά είναι έλλειψη)

Αν το $\vec{a}(\vec{r})$ είναι γνωστό, τότε $v^2(\vec{r}) = v_0^2 + 2\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{a}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, αφού
$dv^2 = d\vec{v}^2 = d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = d\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot d\vec{v} = 2\vec{v}\cdot d\vec{v} = 2\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{a}\,dt = 2\vec{a}\cdot d\vec{r} \Rightarrow$
$\int_{v_0}^{v} dv^2 = 2\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{a}\cdot d\vec{r} \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{a}\cdot d\vec{r}$

Στην ευθύγραμμη κίνηση $\rho = \infty$, άρα $\vec{a}_n = 0$, $\vec{a} = \frac{du}{dt}\hat{\varepsilon}$

Αν η καμπυλόγραμμη κίνηση είναι ομαλή, δηλαδή με σταθερό μέτρο ταχύτητας u, τότε $\vec{a}_t = 0$, $\vec{a} = \frac{u^2}{\rho}\hat{n}$.

Παράδειγμα

Αν $x(t) = 2t^3 + 5t^2 + 5$ ($t \to sec$, $x \to m$) βρείτε τα $u(t)$, $a(t)$ και τα x, u, a για $t=2$, $t=3$ και τα u_{ave}, a_{ave} στο $(2sec, 3sec)$

Είναι $u = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^3+5t^2+5) = 6t^2 + 10t$ (m/sec)

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(6t^2+10t) = 12t + 10 \quad (m/sec^2)$$

Για $t = 2sec$: $x = 41m$, $u = 44\,\frac{m}{sec}$, $a = 34\ m/sec^2$

$t = 3sec$: $x = 104m$, $u = 84\ m/sec$, $a = 46\ m/sec^2$

Στο $(2sec, 3sec)$: $u_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{104-41}{1}\,\frac{m}{sec} = 63\ m/sec$

$$a_{ave} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{84-44}{1}\,\frac{m}{sec^2} = 40\ m/sec^2$$

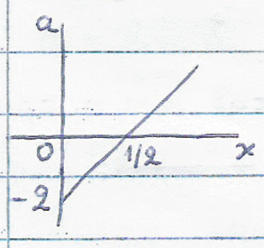
Παράδειγμα

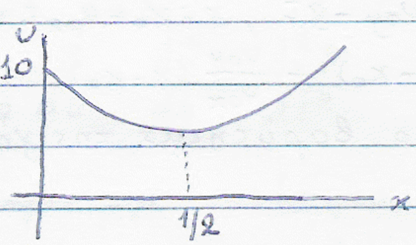
Αν $a(x) = 4x - 2$, $u_0 = 10\,\frac{m}{sec}$, $x_0 = 0$ να βρεθεί το $u(x)$, $t(x)$

Είναι $u^2 - u_0^2 = 2\int_0^x a(x)\,dx \Rightarrow u^2 = 10^2 + 2\int_0^x (4x-2)\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow u^2 = 100 + 2(2x^2 - 2x)\Big|_0^x = 4x^2 - 4x + 100 \Rightarrow u(x) = \pm\sqrt{4x^2 - 4x + 100}$$

Επειδή το τριώνυμο $4x^2 - 4x + 100$ δεν έχει ρίζες, άρα η ταχύτητα u δεν μηδενίζεται ποτέ, επομένως αφού $u_0 > 0$, άρα πάντα $u > 0$, άρα $u(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 100}$





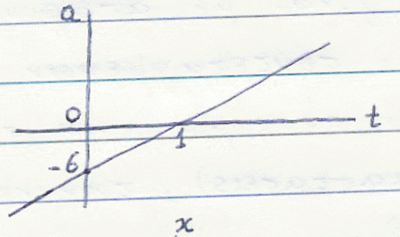
$$u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{u} = dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{u} = \int_0^t dt \Rightarrow t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 100}}$$

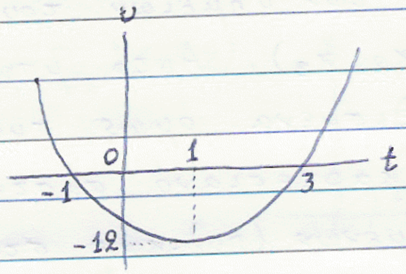
Παράδειγμα

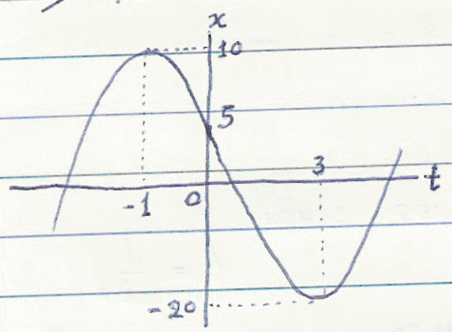
$x = t^3 - 2t^2 - 9t + 5$

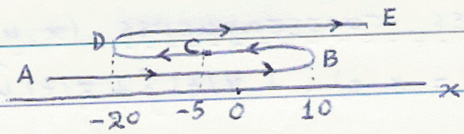
$v = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t+1)(t-3)$

$a = \dfrac{dv}{dt} = 6t - t = 6(t-1)$









AB: επιβραδυνόμενη $t < -1$ (v, a αντίθετα πρόσημα)

BC: επιταχυνόμενη $-1 < t < 1$

CD: επιβραδυνόμενη $1 < t < 3$

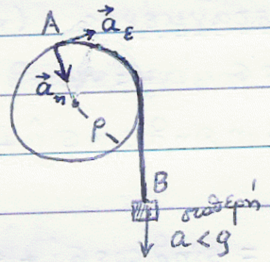
DE: επιταχυνόμενη $t > 3$

Παράδειγμα

$v_B(t=0) = 0.04$, $x_B(t=0) = 0$

$x_B(t=2) = 0.2$

A: $a_\varepsilon(t) = ;$ $\quad a_n(t) = ;$



$\rho = 0.1 m$

Είναι $x_B(t) = x_B(0) + v_B(0)t + \frac{1}{2}at^2 = 0.04t + \frac{1}{2}at^2$

$x_B(2) = 0.04 \times 2 + \frac{1}{2}a \cdot 4 \Rightarrow 0.2 = 0.08 + 2a \Rightarrow a = 0.06 \, (m/sec^2)$

Άρα $x_B(t) = 0.04t + 0.03t^2 \Rightarrow v_B(t) = \dfrac{dx_B(t)}{dt} = 0.04 + 0.06t \, (m/sec)$

Για το A είναι $v_A(t) = v_B(t) = 0.04 + 0.06t$

$\Rightarrow a_\varepsilon = \dfrac{dv_A}{dt} = 0.06 \, m/sec^2$, $\quad a_n = \dfrac{v_A^2}{\rho} = \dfrac{(0.04 + 0.06t)^2}{0.1}$

$= 0.016 + 0.048t + 0.036t^2 \, \frac{m}{sec^2}$

Για να καθορίσουμε τη θέση ενός υλικού σημείου ως προς ένα σύστημα αναφοράς (παρατηρητή), ορίζουμε ένα σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή ορίζουμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των σημείων του χώρου και των διατεταγμένων τριάδων (x_1, x_2, x_3). Αυτό μπορεί να γίνει με άπειρους τρόπους, τα συνηθισμένα όμως συστήματα συντεταγμένων είναι το ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα, το σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων (πολικών στις 2 διαστάσεις), των κυλινδρικών κλπ.

Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z)

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$

Η ταχύτητα σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{i} + \dot{y}(t)\,\hat{j} + \dot{z}(t)\,\hat{k} \qquad \left(\cdot \equiv \frac{d}{dt}\right)$$

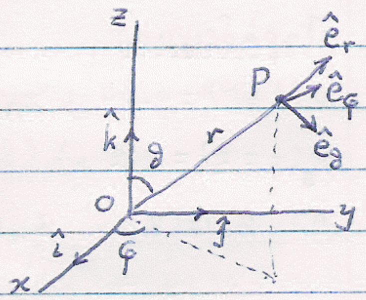
$$\Rightarrow v_x = \dot{x}\ ,\quad v_y = \dot{y}\ ,\quad v_z = \dot{z}$$

Η επιτάχυνση σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{i} + \ddot{y}(t)\,\hat{j} + \ddot{z}(t)\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow a_x = \ddot{x}\ ,\quad a_y = \ddot{y}\ ,\quad a_z = \ddot{z}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ)



$$x = r\sin\theta\cos\varphi\ ,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi\ ,\quad z = r\cos\theta$$

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

Ορίζουμε

$$\hat{e}_r = \frac{\partial\vec{r}/\partial r}{|\partial\vec{r}/\partial r|} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k} = \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \vec{r} = r\,\hat{e}_r$$

$$\hat{e}_\theta = \frac{\partial\vec{r}/\partial\theta}{|\partial\vec{r}/\partial\theta|} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k} = \cot\theta\,\frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{\sin\theta}\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \hat{e}_\theta \in \text{επίπεδο } (\vec{r}, \hat{k})$$

$$\hat{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}/\partial\varphi}{|\partial\vec{r}/\partial\varphi|} = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}$$

$$\hat{e}_r\cdot\hat{e}_\theta = \hat{e}_r\cdot\hat{e}_\varphi = \hat{e}_\theta\cdot\hat{e}_\varphi = 0\ ,\quad \hat{e}_r^2 = \hat{e}_\theta^2 = \hat{e}_\varphi^2 = 1$$

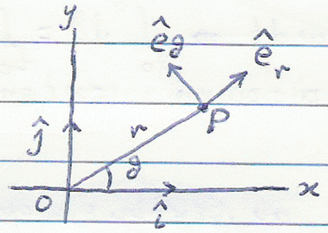
$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi = v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta + v_\varphi\hat{e}_\varphi\ ,\quad v_r = \dot{r},\ v_\theta = r\dot{\theta},\ v_\varphi = r\sin\theta\,\dot{\varphi}$$

διότι

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\left(\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi}\dot{\varphi}\right) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\varphi$$

$\underline{v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2}$ αφού $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$ ορθογώνια

Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο (r, θ)



$x = r\cos\theta \;,\quad y = r\sin\theta$

$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{i} + r\sin\theta\,\hat{j}$

Ορίζουμε

$$\hat{e}_r = \frac{\partial\vec{r}/\partial r}{|\partial\vec{r}/\partial r|} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} = \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \vec{r} = r\hat{e}_r$$

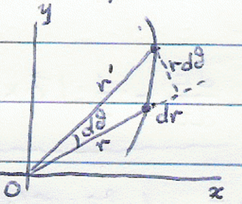
$$\hat{e}_\theta = \frac{\partial\vec{r}/\partial\theta}{|\partial\vec{r}/\partial\theta|} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = 0 \;,\quad \hat{e}_r^2 = \hat{e}_\theta^2 = 1$

$\underline{\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta} = v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta \;,\quad \underline{v_r = \dot{r}}$ ακτινική ταχύτητα

$\underline{v_\theta = r\dot{\theta}}$ εγκάρσια ταχύτητα

διότι $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\dfrac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$



$v_r = \dfrac{dr}{dt}$

$v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}$

$\underline{v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$

Η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες είναι

$\underline{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + \frac{1}{r}(r^2\dot{\theta})^{\cdot}\,\hat{e}_\theta} = a_r\hat{e}_r + a_\theta\hat{e}_\theta \;,\quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \;,\quad a_\theta = \frac{1}{r}(r^2\dot{\theta})^{\cdot}$

διότι $\vec{a} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta$

$\quad = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + \frac{1}{r}(r^2\dot{\theta})^{\cdot}\hat{e}_\theta$

με $\dot{\hat{e}}_r = \dfrac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \;,\quad \dot{\hat{e}}_\theta = \dfrac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\hat{e}_r$

Παρατηρήσεις

1) Κυκλική κίνηση : $\underline{\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta = r\omega\hat{e}_\theta = \vec{\omega}\times\vec{r}} \;,\; \underline{\vec{\omega} = \omega\hat{k}} \;,\; \underline{\omega = \dot{\theta}}$ γωνιακή ταχύτητα

$\underline{v = r\omega = r\dot{\theta}}$

διότι $\dot{r} = 0$ και $\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta = r\dot{\theta}\hat{k}\times\hat{e}_r = (\omega\hat{k})\times(r\hat{e}_r) = \vec{\omega}\times\vec{r}$

$\underline{\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{e}_r + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{\alpha}\times\vec{r}} \;,\; \underline{\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\hat{k}}$ γωνιακή επιτάχυνση

διότι $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{e}_r + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta = r\omega^2\hat{k}\times\hat{e}_\theta + r\dot{\omega}\hat{k}\times\hat{e}_r = r\omega^2\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{e}_r) + r\dot{\omega}\hat{k}\times\hat{e}_r = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{\alpha}\times\vec{r}$

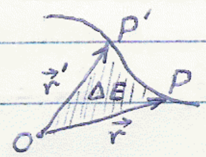
Δηλαδή $\underline{a_r = -r\omega^2} \;,\; \underline{a_\theta = r\alpha} \;,\; \underline{\vec{a}_r = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})} \;,\; \underline{\vec{a}_\theta = \vec{\alpha}\times\vec{r}}$ σε συμφωνία με τα $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$ (αφού $\hat{n} = -\hat{e}_r$)

$a_\varepsilon = \frac{dv}{dt} = r\dot{\omega} = r\alpha$ (αφού $\hat{\varepsilon} = \hat{e}_\theta$)

Αν γνωρίζουμε το $\omega(t)$ τότε $\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$, αφού $\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow$
$\Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega dt$, σε αναλογία με την αντίστοιχη σχέση μεταξύ $x(t)$ και $v(t)$ της γραμμικής κίνησης.

Ειδικά, αν έχουμε ομαλή κυκλική κίνηση τότε $\omega = $ σταθερή $\Rightarrow \alpha = 0$, άρα δεν υπάρχει επιτρόχια επιτάχυνση ($a_\theta = 0$) και $\vec{a} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -r\omega^2\hat{e}_r$ είναι η μοναδική κεντρομόλος επιτάχυνση.

2) Για επίπεδη κίνηση ονομάζουμε εμβαδική ταχύτητα το πηλίκο του εμβαδού ΔE που καλύπτει η (επιβατική) ακτίνα $\vec{r} = \vec{OP}$ σε κάποιο χρονικό διάστημα Δt, προς το διάστημα αυτό για $\Delta t \to 0$, δηλαδή $\frac{dE}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t}$



Ισχύει $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}|x\dot{y} - y\dot{x}| = \frac{1}{2}r^2|\dot{\theta}|$

διότι $\Delta E = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{r}'| = \frac{1}{2}|\vec{r}\times(\vec{r}+\Delta\vec{r})| = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\Delta\vec{r}|$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| \underset{\Delta t\to 0}{=} \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες $\vec{r}\times\vec{v} = (x\hat{i} + y\hat{j})\times(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) =$
$= x\dot{y}\,\hat{i}\times\hat{j} + y\dot{x}\,\hat{j}\times\hat{i} = (x\dot{y} - y\dot{x})\,\hat{i}\times\hat{j} = (x\dot{y} - y\dot{x})\hat{k}$

ή ακόμα θεωρώντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες στο χώρο

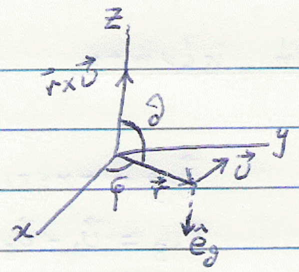
$$\vec{r}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - y\dot{x})\hat{k}$$

Σε πολικές συντεταγμένες $\vec{r}\times\vec{v} = r\hat{e}_r\times(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = r^2\dot{\theta}\,\hat{e}_r\times\hat{e}_\theta = r^2\dot{\theta}\hat{k}$

ή ακόμα θεωρώντας τις σφαιρικές συντεταγμένες όπου η επίπεδη κίνηση βρίσκεται στο επίπεδο xy

$$\vec{r}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & 0 & r\sin\frac{\pi}{2}\dot{\varphi} \end{vmatrix} = r^2\dot{\varphi}(-\hat{e}_\theta)$$, όπου στην επίπεδη κίνηση το φ

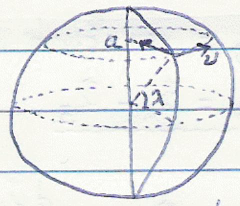
το ονομάζουμε ϑ.



<u>Παράδειγμα</u>

Για τη γη να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση συναρτήσει του γεωγραφικού πλάτους λ

$\omega = 7.292 \times 10^{-5}\ sec^{-1}$, $R_\Gamma = 6.37 \times 10^{6}\ m$



Κάθε σημείο της επιφάνειας εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $r = R_\Gamma \cos\lambda$ με ταχύτητα

$v = \omega r = \omega R_\Gamma \cos\lambda = 464 \cos\lambda \ (m/sec)$

και κεντρομόλο επιτάχυνση

$a = \omega^2 r = \omega^2 R_\Gamma \cos\lambda = 3.39 \times 10^{-2} \cos\lambda \ (m/sec^2)$

Τόσο η ταχύτητα όσο και η επιτάχυνση γίνονται μέγιστες στον ισημερινό (όπου $\lambda = 0$, $\cos\lambda = 1$)

$v_{max} = 464 \frac{m}{sec} = 1672 \frac{km}{h}$

$a_{max} = 3.39 \times 10^{-2} \frac{m}{sec^2} \simeq 0.003 g$