ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική Ι

Σημειώσεις – Διανύσματα

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

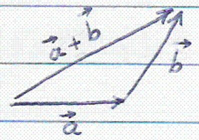
Μονόμετρα (βαθμωτά) – Διανυσματικά μεγέθη

Τα βαθμωτά μεγέθη ορίζονται μόνο από το μέτρο τους, π.χ. όγκος, μάζα, χρόνος, θερμοκρασία, ηλεκτρικό φορτίο, ενέργεια, απόσταση (= μήκος καμπύλης διαδρομής)

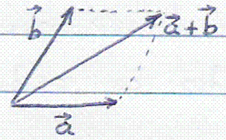
Τα διανυσματικά μεγέθη ορίζονται από το μέτρο και την κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά) τους, π.χ. μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη, ένταση ηλεκτρικού πεδίου· συμβολίζονται $\mathbf{a}$, $\vec{a}$, $\underset{\sim}{a}$, το δε μέτρο τους $|\vec{a}| \equiv a$ (αν και το σύμβολο a θέλει προσοχή γιατί μπορεί να εκφράζει και αλγεβρικές τιμές).

Άθροισμα (συνισταμένη) διανυσμάτων (ομοειδών) $\vec{a}+\vec{b}$

Τριγωνική μέθοδος πρόσθεσης

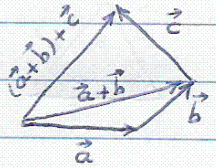


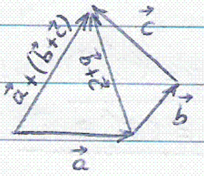
Κανόνας παραλληλογράμμου



Προφανώς $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

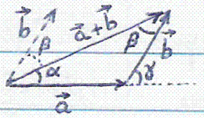
Για την πρόσθεση των $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ισχύει $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$





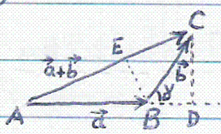
Ισχύει $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\gamma}$, $\gamma=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\le\pi$

$$\frac{|\vec{a}+\vec{b}|}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin\alpha}, \quad \alpha=(\widehat{\vec{a},\vec{a}+\vec{b}}), \quad \beta=(\widehat{\vec{b},\vec{a}+\vec{b}})$$



(Δεν υιοθετούμε τη σύμβαση ότι η γωνία απέναντι από το $\vec{a}$ είναι α διότι τότε θα'πρεπε να γράφω $\alpha=(\widehat{\vec{b},\vec{a}+\vec{b}})$ που είναι χειρότερο)

Πράγματι, το μέτρο του αθροίσματος προκύπτει είτε από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ABC:



$(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2-2(AB)(BC)\cos(\pi-\gamma)=(AB)^2+(BC)^2+2(AB)(BC)\cos\gamma$,

είτε σχηματίζοντας το τρίγωνο (ορθογώνιο) ADC:

$(AD)=(AB)+(BD)=a+b\cos\gamma$, $(DC)=b\sin\gamma$

$(AC)^2=(AD)^2+(DC)^2=(a+b\cos\gamma)^2+(b\sin\gamma)^2=a^2+b^2+2ab\cos\gamma$

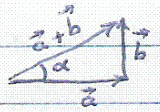
Για να βρούμε τις γωνίες α, β είτε χρησιμοποιούμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ABC:

$$\frac{(AC)}{\sin(\pi-\gamma)}=\frac{(AB)}{\sin\hat{C}}=\frac{(BC)}{\sin\hat{A}}$$

είτε από τα ορθογώνια τρίγωνα ACD, BCD : $(CD)=(AC)\sin\hat{A}=(BC)\sin\gamma$

ενώ από τα ορθογώνια τρίγωνα ABE, BCE : $(BE)=(AB)\sin\hat{A}=(BC)\sin\hat{C}$,

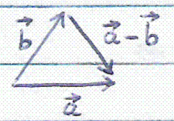
άρα $\dfrac{(AC)}{\sin\gamma}=\dfrac{(BC)}{\sin\hat{A}}=\dfrac{(AB)}{\sin\hat{C}}$



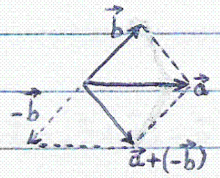
Ειδικά αν $\vec{a}\perp\vec{b}$ τότε $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{a^2+b^2}$

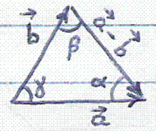
$\sin\alpha=\dfrac{b}{|\vec{a}+\vec{b}|}$, $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$, $\alpha=(\widehat{\vec{a},\vec{a}+\vec{b}})$

Διαφορά $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$



δηλαδή όταν τα $\vec{a},\vec{b}$ έχουν κοινή αρχή, τότε το $\vec{a}-\vec{b}$ έχει αρχή το τέλος του $\vec{b}$ και τέλος το τέλος του $\vec{a}$, που εξηγείται από το σχήμα





Ισχύει $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$, $\gamma=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

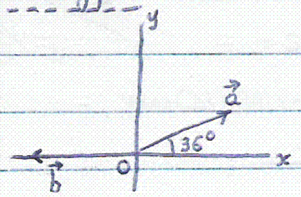
$\dfrac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sin\gamma}=\dfrac{a}{\sin\beta}=\dfrac{b}{\sin\alpha}$, $\alpha=(\widehat{\vec{a},\vec{a}-\vec{b}})$, $\beta=(\widehat{\vec{b},\vec{b}-\vec{a}})$

αφού $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+(-\vec{b})|=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\pi-\gamma)}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$

και $\dfrac{|\vec{a}+(-\vec{b})|}{\sin(\vec{a},-\vec{b})}=\dfrac{a}{\sin(-\vec{b},\vec{a}-\vec{b})}=\dfrac{b}{\sin(\vec{a},\vec{a}-\vec{b})}$

$\Rightarrow \dfrac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sin(\vec{a},\vec{b})}=\dfrac{a}{\sin(\vec{b},\vec{b}-\vec{a})}=\dfrac{b}{\sin(\vec{a},\vec{a}-\vec{b})}$

Παράδειγμα

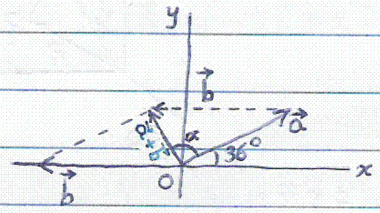


$a=6$, $b=7$, $\vec{a}\pm\vec{b}=;$

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(180^\circ-36^\circ)} = \sqrt{6^2+7^2+2\times 6\times 7\times\cos 144^\circ} =$$
$$= 4.128$$

$$\frac{|\vec{a}+\vec{b}|}{\sin 144^\circ} = \frac{b}{\sin\alpha} \rightarrow \sin\alpha = \sin 144^\circ \, \frac{b}{|\vec{a}+\vec{b}|} = 0.996 \Rightarrow \alpha = (\widehat{\vec{a},\vec{a}+\vec{b}}) = 85^\circ$$

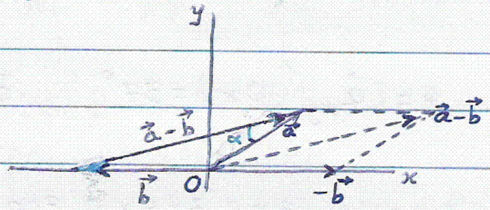
$$\Rightarrow (\widehat{\vec{a}+\vec{b}, Ox}) = 85^\circ + 36^\circ = 121^\circ$$



$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-36^\circ)} = \sqrt{6^2+7^2-2\times 6\times 7\times\cos 144^\circ} = 12.31$$

$$\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sin 144^\circ} = \frac{b}{\sin\alpha} \rightarrow \sin\alpha = \sin 144^\circ \, \frac{b}{|\vec{a}-\vec{b}|} = 0.334 \Rightarrow \alpha = (\widehat{\vec{a},\vec{a}-\vec{b}}) = 19.5^\circ$$

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{a}-\vec{b}, Ox}) = 36^\circ - \alpha = 36^\circ - 19.5^\circ = 16.5^\circ$$

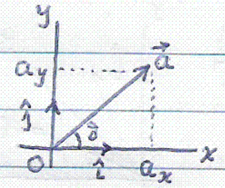


<u>Συνιστώσες</u> ενός διανύσματος $\vec{a}$ λέγονται οποιαδήποτε διανύσματα, τα οποία αφού προστεθούν δίνουν το $\vec{a}$.

Στο επίπεδο οι ορθογώνιες συνιστώσες (προβολές) είναι

$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$

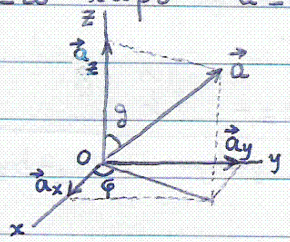
a_x, a_y : αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων $\vec{a}_x, \vec{a}_y$ (λέγονται και συνιστώσες τα a_x, a_y)



$a_x = a\cos\theta$, $a_y = a\sin\theta$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, $\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$

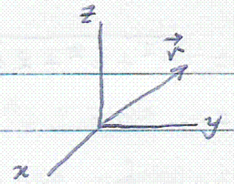
Στο χώρο $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$



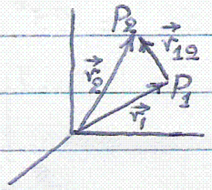
$a_x = a\sin\theta\cos\varphi$, $a_y = a\sin\theta\sin\varphi$, $a_z = a\cos\theta$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, $\cos\theta = \frac{a_z}{a}$, $\tan\varphi = \frac{a_y}{a_x}$

π.χ. το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = \vec{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$



το διάνυσμα σχετική θέση των P_1, P_2 είναι $\vec{r}_{12} = \vec{P}_{12} = \vec{OP}_2 - \vec{OP}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$



Παράδειγμα

$P_1(6, 8, 10)$, $P_2(4, 4, 10)$, $d(P_1, P_2) = ;$

Είναι $\vec{r}_1 = \vec{OP}_1 = 6\hat{i} + 8\hat{j} + 10\hat{k}$

$\vec{r}_2 = \vec{OP}_2 = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 10\hat{k}$

$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (-2)\hat{i} + (-4)\hat{j} + 0\hat{k}$

$d(P_1, P_2) = |\vec{r}_{12}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 4.47$

Παράδειγμα

$|\vec{a}| = 13$, $\theta = (\vec{a}, \hat{Oz}) = 22.6°$, $\varphi = (\vec{a}_{xy}, \hat{Ox}) = 37°$, $\vec{a} = ;$

Είναι $a_z = a\cos\theta = 13 \times 0.923 = 12.0$

$a_{xy} = a\sin\theta$, $a_x = a_{xy}\cos\varphi = a\sin\theta\cos\varphi = 13 \times 0.384 \times 0.800 = 4.0$

$a_y = a_{xy}\sin\varphi = a\sin\theta\sin\varphi = 13 \times 0.384 \times 0.600 = 3.0$

Άρα, $\vec{a} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 12\hat{k}$

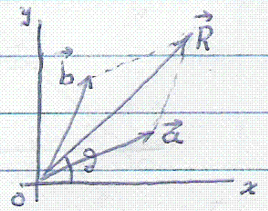
Για πρόσθεση διανυσμάτων στο χώρο ή πρόσθεση περισσότερων από δύο διανυσμάτων στο επίπεδο διευκολύνει η χρήση συνιστωσών

- $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$, $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}$, ...

$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \dots = (a_x + b_x + \dots)\hat{i} + (a_y + b_y + \dots)\hat{j}$

$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = |\vec{a} + \vec{b} + \dots| = \sqrt{(a_x + b_x + \dots)^2 + (a_y + b_y + \dots)^2}$

$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{a_y + b_y + \dots}{a_x + b_x + \dots}$, $\theta = (\vec{R}, \hat{Ox})$



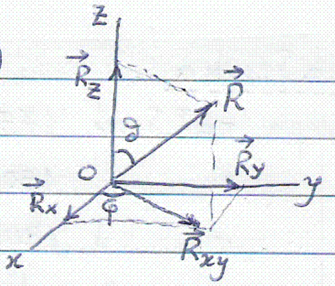
- $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$, $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$, ...

$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \dots = (a_x + b_x + \dots)\hat{i} + (a_y + b_y + \dots)\hat{j} + (a_z + b_z + \dots)\hat{k}$

$|\vec{R}| = |\vec{a} + \vec{b} + \dots| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(a_x + b_x + \dots)^2 + (a_y + b_y + \dots)^2 + (a_z + b_z + \dots)^2}$

$\cos\theta = \frac{R_z}{R} = \frac{a_z + b_z + \dots}{|\vec{a} + \vec{b} + \dots|}$, $\theta = (\vec{R}, \hat{Oz})$

$\tan\varphi = \dfrac{R_y}{R_x} = \dfrac{a_y + b_y + \cdots}{a_z + b_z + \cdots}$, $\varphi = (\vec{R}_{xy} \,\hat{,}\, Ox)$



Παράδειγμα

$\vec{a}_1 = 4\hat{i} - 3\hat{j}$, $\vec{a}_2 = -3\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{a}_3 = 2\hat{i} - 6\hat{j}$, $\vec{a}_4 = 7\hat{i} - 8\hat{j}$, $\vec{a}_5 = 9\hat{i} + \hat{j}$

$\vec{R} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 = \sum_{i=1}^{5} \vec{a}_i = ;$

$R_x = \sum_{i=1}^{5} a_{ix} = 4 - 3 + 2 + 7 + 9 = 19$

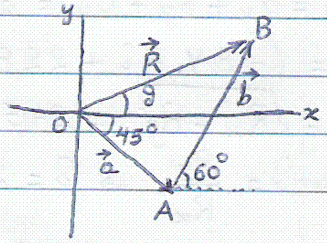
$R_y = \sum_{i=1}^{5} a_{iy} = -3 + 2 - 6 - 8 + 1 = -14$

$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} = 19\hat{i} - 14\hat{j}$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{19^2 + (-14)^2} = 23.6$

$\tan\theta = \dfrac{R_y}{R_x} = \dfrac{-14}{19} = -0.737 \Rightarrow \theta = -36.4^\circ$

Παράδειγμα



1η μέρα ταξιδιού 25km ΝΑ

2η " 40km ΒΑ, 60° Οx

Μέτρο, κατεύθυνση ολικής μετατόπισης;

$a_x = a\cos(-45^\circ) = (25km)(0.707) = 17.7km$

$a_y = a\sin(-45^\circ) = (25km)(-0.707) = -17.7km$

$b_x = b\cos 60^\circ = (40km)(0.50) = 20.0\ km$

$b_y = b\sin 60^\circ = (40km)(0.866) = 34.6km$

Αυτές είναι οι συνιστώσες μετατοπίσεις κάθε μέρα.

Το συνολικό διάνυσμα μετατόπισης είναι

$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow R_x = a_x + b_x = 17.7km + 20.0\ km = 37.7km$

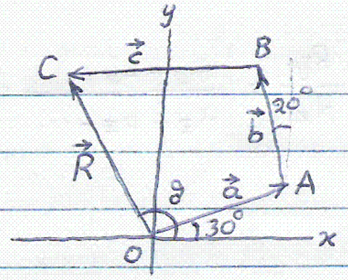
$R_y = a_y + b_y = -17.7km + 34.6\ km = 16.9km$

$\vec{R} = (37.7\hat{i} + 16.9\hat{j})\ km$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 41.3km$

$\tan\theta = \dfrac{R_y}{R_x} \Rightarrow \theta = 24.1^\circ$

Παράδειγμα



1η μέρα ταξιδιού 175 km ΒΑ, 30° Ox

2η " 150 km ΒΔ, 20° Oy

3η " 190 km Δ

$a_x = a\cos 30^\circ = (175\,km)(0.866) = 152\,km$

$a_y = a\sin 30^\circ = (175\,km)(0.50) = 87.5\,km$

$b_x = b\cos 110^\circ = (150\,km)(-0.342) = -51.3\,km$

$b_y = b\sin 110^\circ = (150\,km)(0.940) = 141\,km$

$c_x = c\cos 180^\circ = (190\,km)(-1) = -190\,km$

$c_y = c\sin 180^\circ = 0$

$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$R_x = a_x + b_x + c_x = 152\,km - 51.3\,km - 190\,km = -89.7\,km$

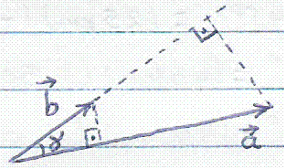
$R_y = a_y + b_y + c_y = 87.5\,km + 141\,km + 0 = 228\,km$

$\vec{R} = (-89.7\hat{\imath} + 228\hat{\jmath})\,km$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 245\,km$

$\tan\theta = \dfrac{R_y}{R_x} \Rightarrow \theta = 21.4^\circ + 90^\circ = 111.4^\circ$

Εσωτερικό (βαθμωτό) γινόμενο διανυσμάτων



$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\gamma \quad , \quad \gamma = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \leq \pi$

$= a\, b_{\vec{a}}$

$= a_{\vec{b}}\, b$

$= \vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ab$

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = -ab$

$\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}$

διότι αν θεωρήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με $\hat{\imath} \uparrow\uparrow \vec{c}$,

τότε $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow R_x = a_x + b_x \Rightarrow R_{\vec{c}} = a_{\vec{c}} + b_{\vec{c}}$

άρα $\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\cdot\vec{R} = c\,R_{\vec{c}} = c\,(a_{\vec{c}} + b_{\vec{c}}) = c\,a_{\vec{c}} + c\,b_{\vec{c}} = \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}$

$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1, \quad \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

διότι $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$

$$
\begin{aligned}
&= a_x b_x(\hat{i}\cdot\hat{i}) + a_x b_y(\hat{i}\cdot\hat{j}) + a_x b_z(\hat{i}\cdot\hat{k}) \\
&\quad + a_y b_x(\hat{j}\cdot\hat{i}) + a_y b_y(\hat{j}\cdot\hat{j}) + a_y b_z(\hat{j}\cdot\hat{k}) \\
&\quad + a_z b_x(\hat{k}\cdot\hat{i}) + a_z b_y(\hat{k}\cdot\hat{j}) + a_z b_z(\hat{k}\cdot\hat{k}) \\
&= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z
\end{aligned}
$$

$\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$

<u>Παράδειγμα</u>

$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $\gamma = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = ;$

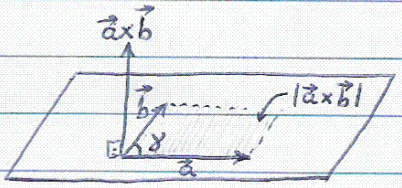
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2(-1) + 3(1) + (-1)2 = -1$

$a = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} = 3.74$

$b = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} = 2.45$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \dfrac{-1}{9.17} = -0.109 \Rightarrow \gamma = 96.3^\circ$

<u>Εξωτερικό (διανυσματικό) γινόμενο</u>



$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\gamma$, $\gamma = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \leq \pi$

$= a b_\perp = a_\perp b$

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0, \quad \vec{a}\times\vec{a} = 0$

$\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = ab$

$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{b}$ (απόδειξη κάπως δύσκολη)

$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0, \ \hat{i}\times\hat{j} = -\hat{j}\times\hat{i} = \hat{k}, \ \hat{j}\times\hat{k} = -\hat{k}\times\hat{j} = \hat{i}, \ \hat{k}\times\hat{i} = -\hat{i}\times\hat{k} = \hat{j}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

διότι

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$
$$= a_x b_x(\hat{i}\times\hat{i}) + a_x b_y(\hat{i}\times\hat{j}) + a_x b_z(\hat{i}\times\hat{k})$$
$$+ a_y b_x(\hat{j}\times\hat{i}) + a_y b_y(\hat{j}\times\hat{j}) + a_y b_z(\hat{j}\times\hat{k})$$
$$+ a_z b_x(\hat{k}\times\hat{i}) + a_z b_y(\hat{k}\times\hat{j}) + a_z b_z(\hat{k}\times\hat{k})$$
$$= a_x b_y\hat{k} - a_x b_z\hat{j} - a_y b_x\hat{k} + a_y b_z\hat{i} + a_z b_x\hat{j} - a_z b_y\hat{i}$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

Παράδειγμα

$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{a}\times\vec{b} =$; $\gamma = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) =$;

$$\vec{a}\times\vec{b} = (2\hat{i}+3\hat{j})\times(-\hat{i}+2\hat{j}) = 2\hat{i}\times2\hat{j} + 3\hat{j}\times(-\hat{i}) = 4\hat{k} + 3\hat{k} = 7\hat{k}$$

ή αλλιώς

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}(2\times2 + 3\times1) = 7\hat{k} \rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = 7$$

$a = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$, $b = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\gamma \Rightarrow \sin\gamma = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{ab} = \frac{7}{\sqrt{13}\times\sqrt{5}} \Rightarrow \gamma = 60.3^\circ$$