Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Πιθανότητες και Στατιστική

Ελισάβετ Κωνσταντίνου

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής

- Η π.π. ή η σ.κ. περιγράφουν πλήρως μια τ.μ., με την έννοια ότι μπορούμε από αυτές να υπολογίσουμε την πιθανότητα να βρίσκεται η τ.μ. σε οποιαδήποτε περιοχή τιμών.
- Η μέση τιμή είναι ένας συνοπτικός τρόπος περιγραφής μιας τ.μ. Συγκεκριμένα χαρακτηρίζει την τ.μ. με ένα πραγματικό αριθμό.
- Παραδείγματα:
  - μέσος χρόνος αναμονής στη στάση του λεωφορείου
  - μέσος μισθός πρωτοδιοριζόμενου σε μια εταιρεία
  - μέσο ύψος/βάρος σε ένα πληθυσμό

Ορισμός

- Η μέση ή αναμενόμενη τιμή (expected value) της τ.μ. X είναι ο πραγματικός αριθμός:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

- Αν η τ.μ. είναι διακριτή το παραπάνω ολοκλήρωμα αντιστοιχεί σε άθροισμα στο πεδίο τιμών της X:

$$E\{X\} = \sum_i x_i\, p(x_i)$$

- Από το άθροισμα αυτό φαίνεται ότι η μέση τιμή της X είναι ένας γενικευμένος «μέσος όρος».

Παραδείγματα

- Bernoulli τ.μ. με p(0) = 1–p, p(1) = p:

  $E\{X\} = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

- Ομοιόμορφη (διακριτή) με p(i) = 1/6, i = 1, ..., 6:

  $E\{X\} = 1/6 \times (1 + ... + 6) = 3.5$

  Το ζάρι δεν θα φέρει ποτέ 3.5, αλλά σε ένα μεγάλο αριθμό ρίψεων ο μέσος όρος των αποτελεσμάτων θα προσεγγίζει το 3.5.

- Ομοιόμορφη (συνεχής) στο [a, b]:

$$E\{X\} = \int_a^b \frac{x\,dx}{b-a} = \frac{1}{2}\frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

Παραδείγματα

- Εκθετική:

$$E\{X\} = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} - \lambda \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) dx$$

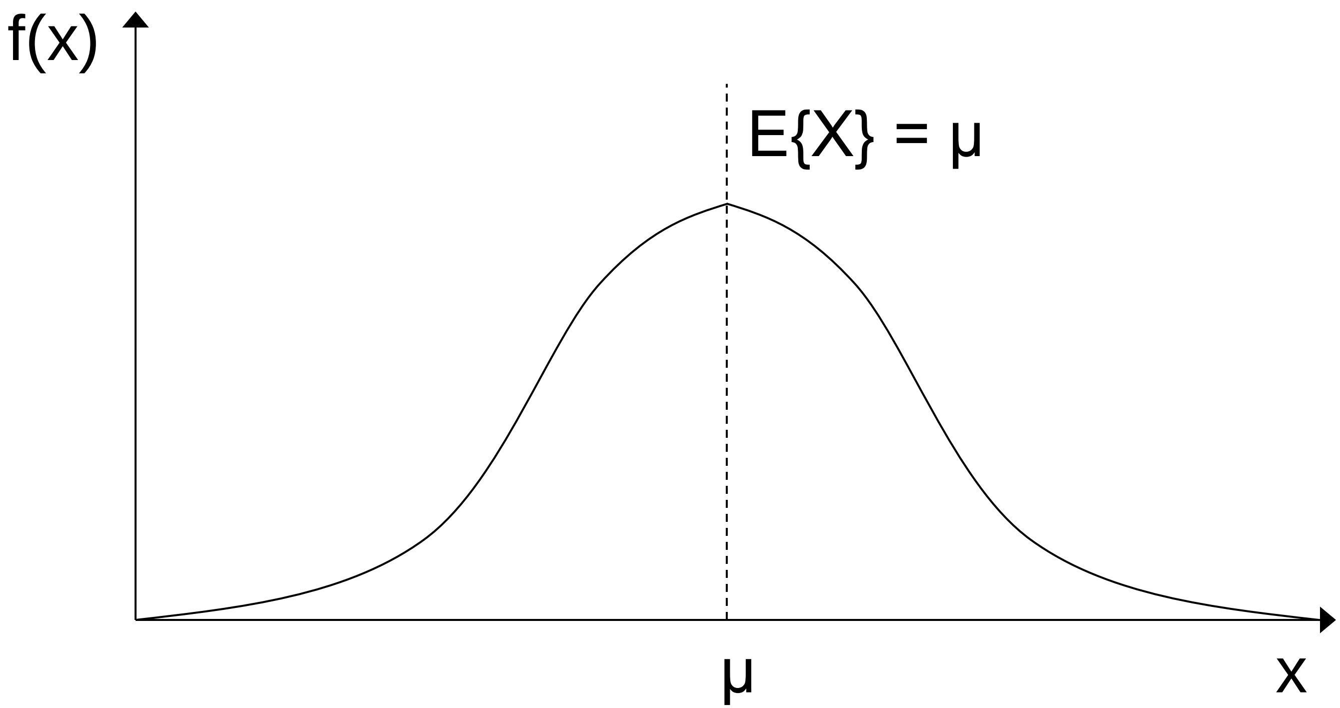
$$= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

- Κανονική N(μ, σ): με αλλαγή μεταβλητής παίρνουμε:

$$E\{X\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) dx = \mu$$

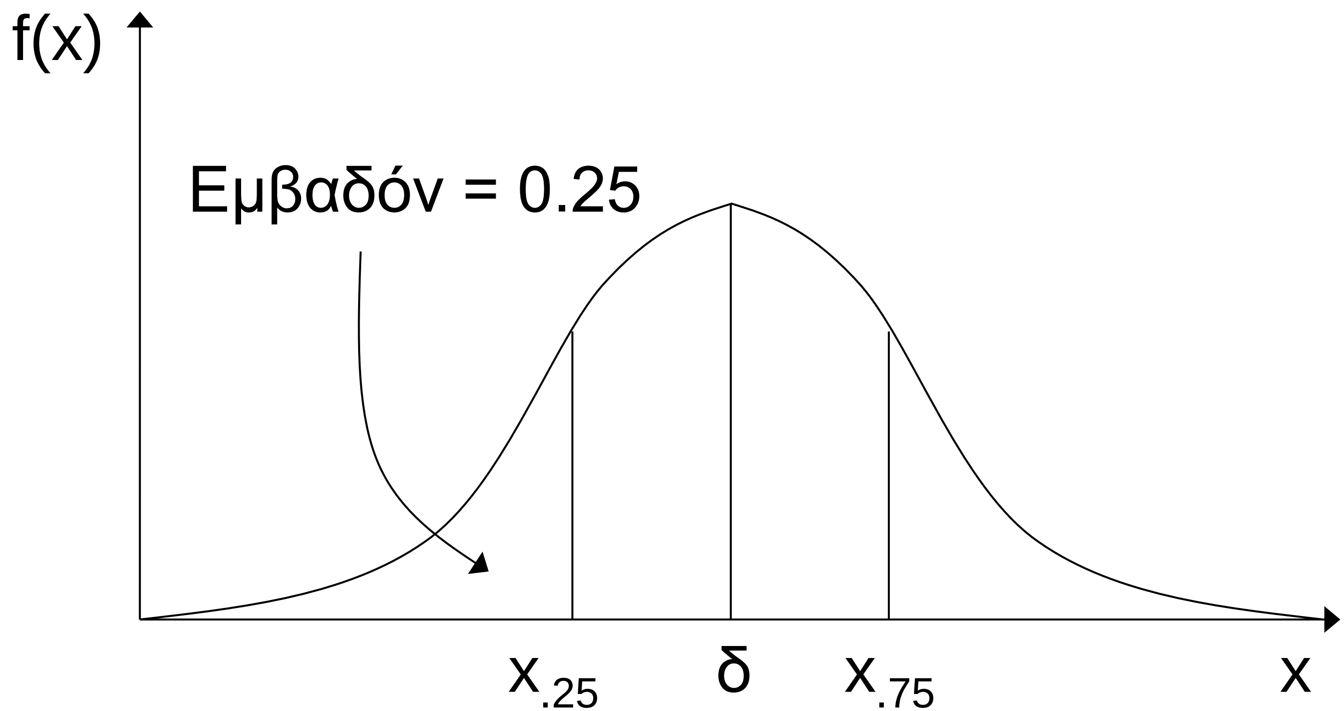
Συμμετρική πυκνότητα πιθανότητας

- Αν η π.π. της X είναι συμμετρική γύρω από κάποιο σημείο μ, δηλ. $f(x – \mu) = f(x + \mu)$ για κάθε x, $E\{X\} = \mu$.



Διάμεσος, ποσοστημόρια

- Διάμεσος (median) δ: $F(\delta) = 0.5$
- π-ποσοστημόριο x: $F(x_\pi) = \pi$



Μέση τιμή συνάρτησης τυχαίας μεταβλητής

- Αν η X είναι διακριτή με σ.π. p(x):

$$E\{g(X)\} = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

- Αν η X είναι συνεχής με π.π. f(x):

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- Παράδειγμα: Αν η X είναι ομοιόμορφη στο [α, β]:

$$E\{X^2\} = \int_a^b x^2 f_X(x) dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

Μέση τιμή συνάρτησης τυχαίας μεταβλητής

- Η μέση τιμή είναι γραμμική πράξη:

  $E\{aX + b\} = aE\{X\} + b$

  $E\{X + Y\} = E\{X\} + E\{Y\}$

- Γενικά **δεν ισχύει** $E\{g(X)\} = g(E\{X\})$
- Ροπές k τάξης:

  $m_k = E\{X^k\} \quad k = 1, 2, \ldots$

- Κεντρικές ροπές k τάξης:

  $\mu_k = E\{(X - \mu)^k\} \quad k = 1, 2, \ldots$

Διασπορά τυχαίας μεταβλητής

- Είναι η δεύτερη κεντρική ροπή:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left\{(X-\mu_X)^2\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx \quad \text{(συνεχείς τ.μ.)} \\ &= \sum_i (x_i-\mu_X)^2 p(x_i) \quad \text{(διακριτές τ.μ.)} \end{aligned}$$

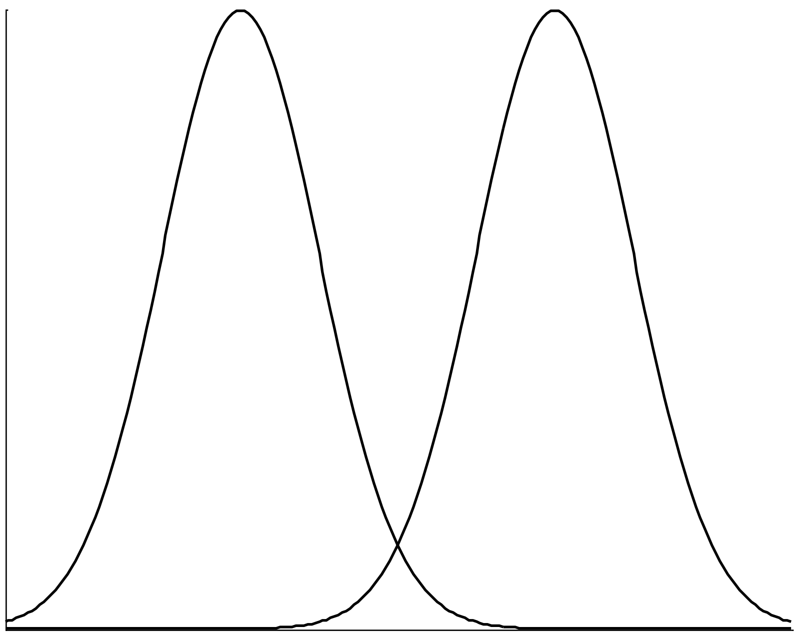
- Ισοδύναμα: $Var(X) = E\left\{X^2\right\} - \mu_X^2$

- Τυπική απόκλιση: $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

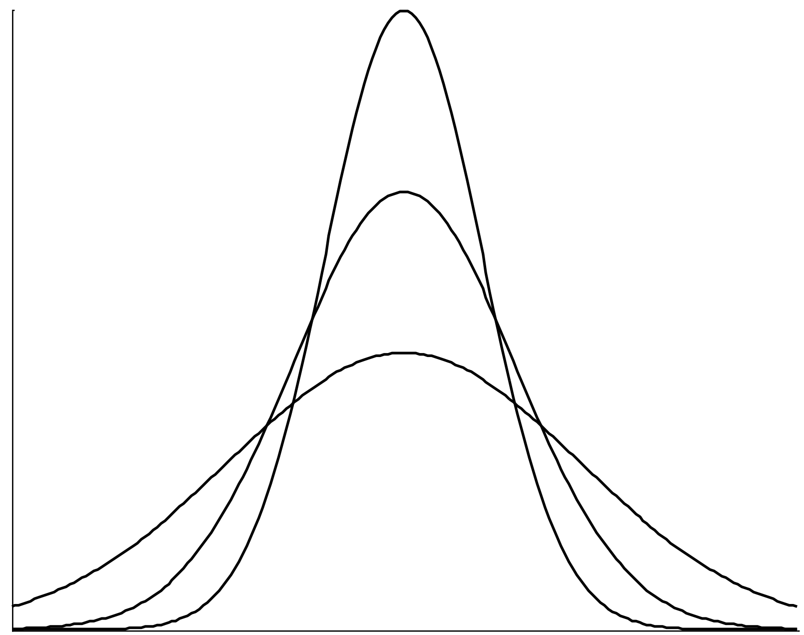
Διασπορά τυχαίας μεταβλητής

- Η διασπορά δίνει ένα μέτρο του πόσο απέχουν κατά μέσον όρο οι τιμές μιας τ.μ. από τη μέση τιμή της:

Different means



Different variances



Διασπορά τυχαίας μεταβλητής

- Παράδειγμα: Αν η X είναι ομοιόμορφη στο [α, β]:

$$\mathrm{Var}(X) = E\{X^2\} - (E\{X\})^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Αν η X είναι εκθετική με παράμετρο λ:

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

- Ιδιότητες:

$\mathrm{Var}\{aX + b\} = a^2 \mathrm{Var}\{X\}$ για κάθε τ.μ. X

$\mathrm{Var}\{X + Y\} = \mathrm{Var}\{X\} + \mathrm{Var}\{Y\}$ για **ανεξάρτητες** X, Y

Ανισότητα Chebyshev

- Για κάθε τ.μ. Χ με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ:

  $$P(|X - \mu| \leq c\,\sigma) \geq 1 - 1/c^2 \quad (c \geq 1)$$

- Η ανισότητα Chebyshev δίνει ένα κάτω όριο στην πιθανότητα η τ.μ. να πάρει τιμή που απέχει περισσότερο από c τυπικές αποκλίσεις από τη μέση τιμή της.
- Μπορεί να μας δώσει προσεγγιστικά πιθανότητες χωρίς να ξέρουμε την π.π. ή την σ.κ. της Χ.