Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Πιθανότητες και Στατιστική

Ελισάβετ Κωνσταντίνου

BY NC ND

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

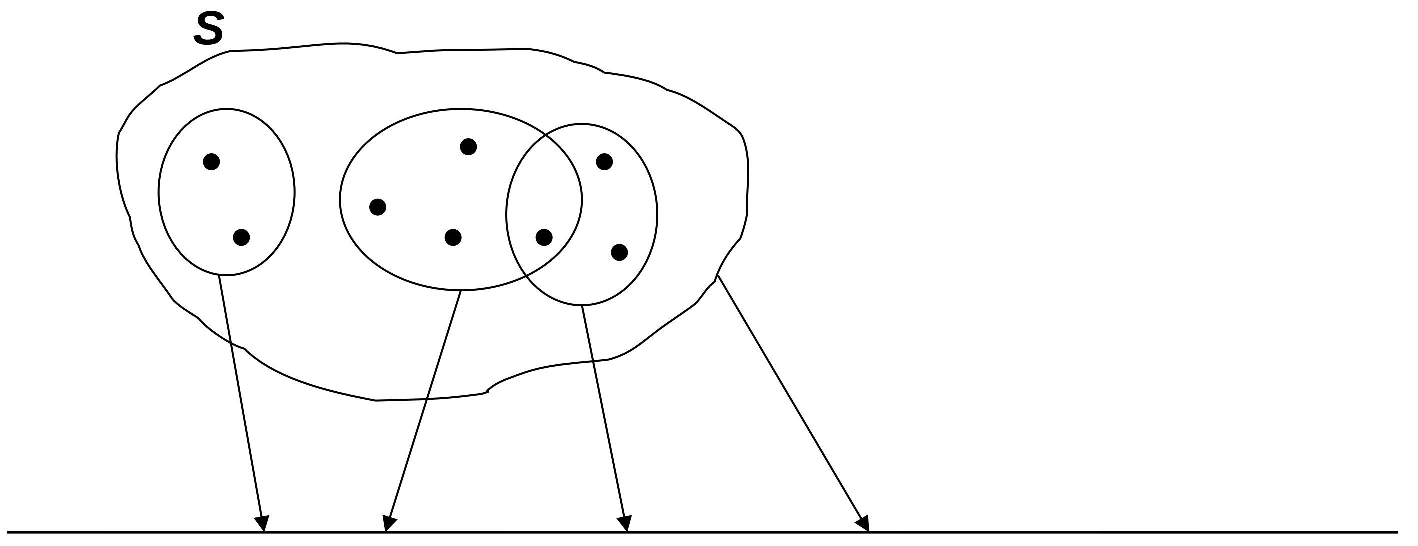
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ανακεφαλαίωση



- Δειγματικός χώρος (sample space) ***S***: το σύνολο των αποτελεσμάτων (outcomes).
- Ενδεχόμενα (events): υποσύνολα του ***S***.
  Κλάση γεγονότων ***E*** = { A | A $\subset$ ***S*** }

«Αξιωματικός» ορισμός της πιθανότητας (Kolmogorov)

Η πιθανότητα είναι μια συνάρτηση P: $\boldsymbol{E} \rightarrow \mathbf{R}$ που υπακούει στα εξής αξιώματα:

(1) $\forall$ A $\in$ ***E***: P(A) $\geq$ 0

(2) P(***S***) = 1

(3) Αν A, B $\in$ ***E*** και A $\cap$ B = $\emptyset$, τότε P(A $\cup$ B) = P(A) + P(B)

(Το 3 γενικεύεται για άπειρο αριθμήσιμο πλήθος γεγονότων, αλλά αυτό δεν μας ενδιαφέρει τώρα)

Ο ορισμός δεν δίνει άμεσο τρόπο υπολογισμού της πιθανότητας P(A) – αυτό είναι θέμα μοντέλου.

Ιδιότητες της πιθανότητας που προκύπτουν από τα αξιώματα

(1) $\forall A \in \boldsymbol{E}$: $P(A') = 1 - P(A)$

(2) $\forall A \in \boldsymbol{E}$: $P(A) \leq 1$

(3) $P(\varnothing) = 0$

(4) $\forall A, B \in \boldsymbol{E}$:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

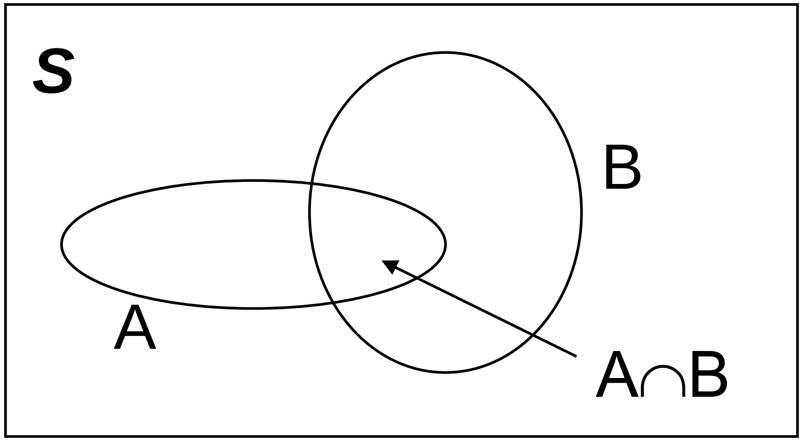
(5) Γενίκευση: $P(A \cup B \cup C) = P\{(A \cup B) \cup C\}$
$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C)$
$+ P(A \cap B \cap C)$

(6) $B \subset A \Rightarrow P(B) = P(A) - P(A - B) \leq P(A)$

Δεσμευμένη πιθανότητα (conditional p.)

- Ορισμός: Για δύο γεγονότα A, B (στον ίδιο δειγματικό χώρο) με $P(B) \neq 0$ ορίζουμε ως πιθανότητα του A δεδομένου του B το εξής:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Παράδειγμα

- ***S***: το σύνολο των φοιτητών/φοιτητριών που πήραν τις Πιθανότητες το περασμένο εξάμηνο
- A: το σύνολο των αγοριών του ***S***
- A΄: το σύνολο των κοριτσιών του ***S***
- B: το σύνολο των φοιτητών/φοιτητριών που πέρασαν το μάθημα
- $P(A) = 0.8$, $P(A') = 0.2$
- $P(A \mid B) = ?$
- $P(B \mid A) = ?$

Δεσμευμένη πιθανότητα (2)

- Η $P(A \mid B)$ παριστάνει την πιθανότητα που θα δίναμε στο A, αν ξέραμε ότι το B έχει σίγουρα συμβεί.
- Επομένως για να υπολογίσουμε την $P(A \mid B)$, θεωρούμε ως νέο δειγματικό χώρο το B και ως γεγονός που μας ενδιαφέρει το $A \cap B$ (το $A \cap B'$ θεωρείται αδύνατο).
- Αποδεικνύεται εύκολα ότι η $P(A \mid B)$ υπακούει στα αξιώματα της πιθανότητας. Επίσης συμφωνεί με τον κλασσικό ορισμό και τον ορισμό της σχετικής συχνότητας.
- Η $P(A \mid B)$ λέγεται και εκ των υστέρων (a posteriori) πιθανότητα, ενώ η $P(A)$ εκ των προτέρων (a priori).

Δεσμευμένη πιθανότητα (3)

- Γενίκευση: για n γεγονότα A_1, A_2, … A_n:

$$P(A_n \mid A_1, ..., A_{n-1}) = \frac{P(A_1 \cap ... \cap A_n)}{P(A_1 \cap ... \cap A_{n-1})}$$

- Με αναδρομική χρήση του ορισμού παίρνουμε:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\ldots P(A_n \mid A_{n-1} \cap \ldots \cap A_1)$$

- Αν το A_i εξαρτάται μόνο από το A_{i-1} & όχι από τα A_{i-2} ,…, A_1:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_2)\ldots P(A_n \mid A_{n-1})$$

Ανεξάρτητα γεγονότα

- Ορισμός: Δύο γεγονότα Α, Β στον ίδιο δ.χ. λέγονται (στατιστικώς) ανεξάρτητα αν $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.
- Αν τα Α, Β είναι ανεξάρτητα, τότε $P(A \mid B) = P(A)$, δηλ. το αν συνέβη ή όχι το Β δεν επηρεάζει την πιθανότητα να συμβεί το Α.
- Αν τα Α, Β είναι ανεξάρτητα, τότε είναι και τα Α, Β΄ κλπ.
- Παρατήρηση: Αν δύο γεγονότα δεν έχουν σχέση αιτίου - αιτιατού, είναι και στατιστικώς ανεξάρτητα.
- Ανεξαρτησία τριών γεγονότων Α, Β, Γ:

  (α) ανά δύο ανεξάρτητα

  (β) $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)\, P(B)\, P(\Gamma)$

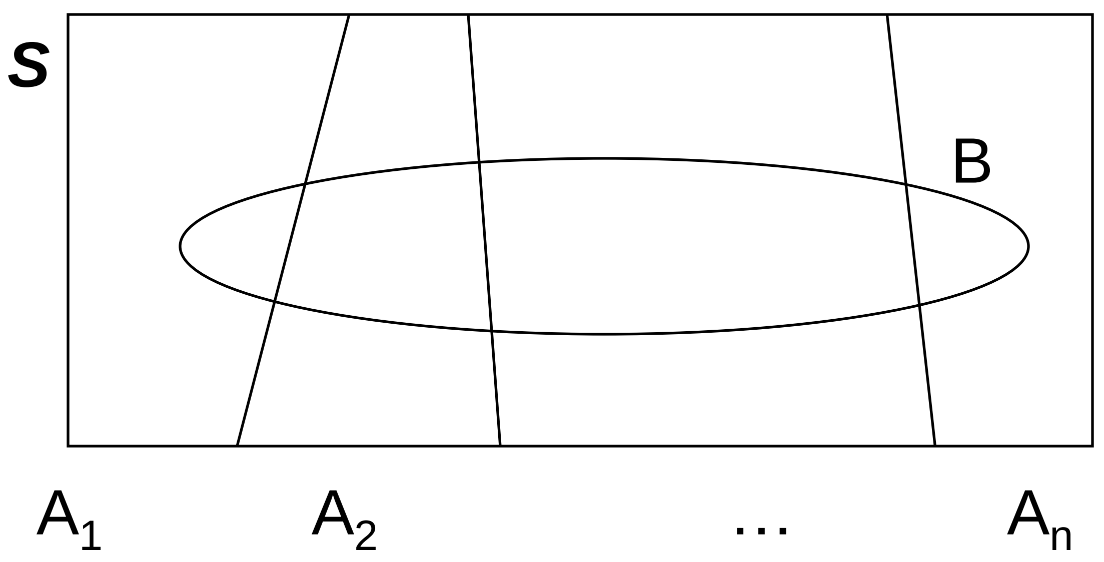
Παράδειγμα (συνέχεια)

- ***S***: το σύνολο των φοιτητών/φοιτητριών που πήραν τις Πιθανότητες το περασμένο εξάμηνο
- A: το σύνολο των αγοριών του ***S***
- A΄: το σύνολο των κοριτσιών του ***S***
- B: το σύνολο των φοιτητών/φοιτητριών που πέρασαν το μάθημα
- $P(A) = 0.8$, $P(A΄) = 0.2$
- $P(A \cap B) = 0.24$, $P(A΄ \cap B) = 0.14$
- $P(B) = ?$

Θεώρημα της ολικής πιθανότητας

- Αν μια ακολουθία γεγονότων A_1, A_2, … αποτελεί διαμερισμό του ***S*** και B γεγονός στον ***S***:

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)$$



Θεώρημα του Bayes

- Για δύο γεγονότα A, B στον ***S***:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) P(A)}{P(B)}$$

- Αν μια ακολουθία γεγονότων A_1, A_2, … αποτελεί διαμερισμό του ***S*** και B γεγονός στον ***S***:

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j) P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_j) P(A_j)}{\sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ποσοστό των αγοριών που πέρασαν το μάθημα:

- $P(B \mid A) = ?$

Ποσοστό των κοριτσιών που πέρασαν το μάθημα:

- $P(B \mid A') = ?$

$P(B \mid A) + P(B \mid A') = ?$

Ποσοστό των επιτυχόντων που είναι αγόρια / κορίτσια:

- $P(A \mid B) = ?$
- $P(A' \mid B) = ?$

Παράδειγμα (εφημερίδες)

$P(A) = 0.45$ $P(A \cap B) = 0.15$

$P(B) = 0.35$ $P(A \cap C) = 0.08$

$P(C) = 0.25$ $P(B \cap C) = 0.10$

$P(A \cap B \cap C) = 0.04$

(α) Αν κάποιος διαβάζει την Α, ποιά η πιθανότητα να διαβάζει και την Β;

(β) Από αυτούς που διαβάζουν την Α, τι ποσοστό δεν διαβάζει την C;

Παράδειγμα (δημοτικές εκλογές)

Τρεις υποψήφιοι X, Y και Z:

- X → 44%, Y → 32%, Z → 24% των ψήφων
- Από αυτούς που ψήφισαν τον X: το 42% ήταν άνδρες. Αντίστοιχα για Y και Z 52% και 54%.

(α) Τι ποσοστό του συνόλου των ψηφοφόρων ήταν άνδρες;

(β) Τι ποσοστό των ανδρών ψήφισε τον κάθε υποψήφιο;

Παράδειγμα

- Εχουμε ένα φυσιολογικό νόμισμα Α και ένα με δύο κορώνες Β. Ρίχνουμε ένα στην τύχη και έρχεται κορώνα (Κ). Ποια η πιθανότητα να έχουμε ρίξει το κάλπικο;

$\rightarrow$ Λέγοντας ότι διαλέγουμε ένα στην τύχη, υπονοούμε ότι το να διαλέξουμε Α ή Β είναι ισοπίθανο: $P(A) = P(B) = 1/2$.

Παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα φυσιολογικό νόμισμα μέχρι να έρθει η πρώτη κορώνα.

- Υπολογίστε (συναρτήσει του N) την πιθανότητα να φέρουμε την πρώτη κορώνα ακριβώς την N-στή φορά.
- Υπολογίστε την πιθανότητα να φέρουμε την πρώτη κορώνα μετά την N-στή φορά.