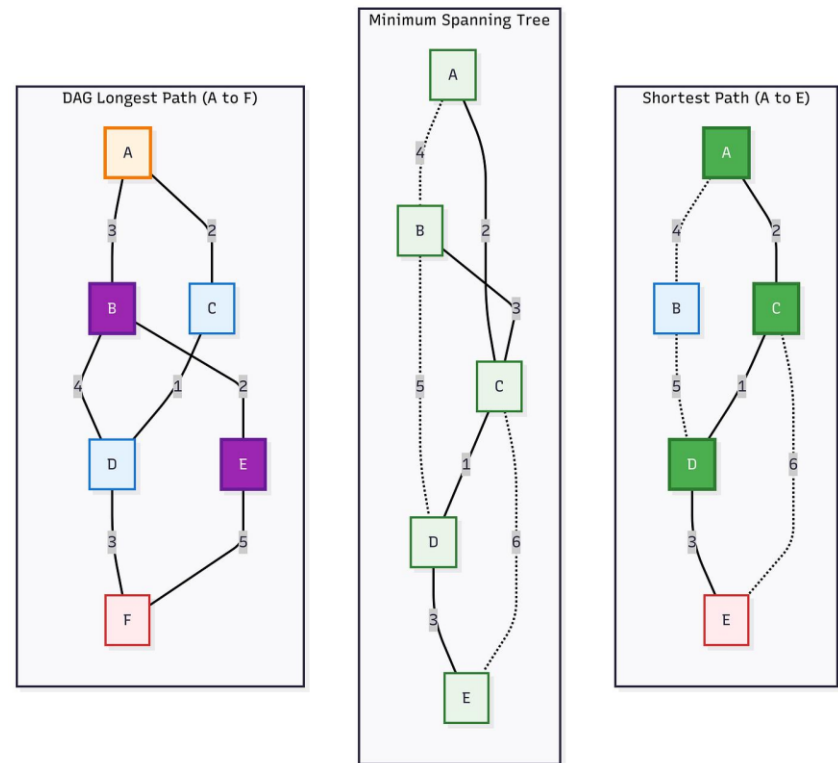


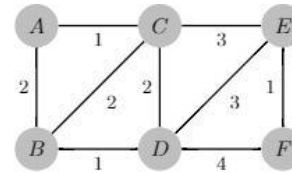
1. Από Διαδρομές σε Δομές Σύνδεσης

- Στη Διάλεξη 7:
 - επιλέξαμε διαδρομές μεταξύ δύο κόμβων
- Σε αυτή τη διάλεξη:
 - εξετάζουμε τη σύνδεση όλων των κόμβων
- Το πρόβλημα:
 - δεν αφορά μία διαδρομή
 - αφορά τη συνολική δομή του δικτύου
- Στόχος:
 - σύνδεση όλων των κόμβων με ελάχιστο συνολικό κόστος
- Το πρόβλημα:
 - δεν είναι δρομολόγηση
 - είναι σχεδίαση δικτύου

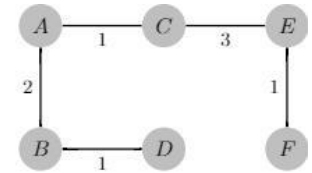


2. Τι Κάνουμε σε Αυτό το Πρόβλημα

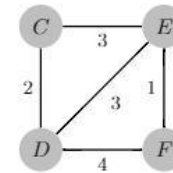
- Στη συντομότερη διαδρομή:
 - επιλέγουμε μία διαδρομή μεταξύ δύο κόμβων
- Στο ελάχιστο δέντρο κάλυψης:
 - επιλέγουμε σύνολο ακμών που συνδέει όλους τους κόμβους
- Δεν επιλέγουμε:
 - μία ακολουθία
 - αλλά μία δομή
- Η απόφαση:
 - δεν είναι τοπική
 - αφορά ολόκληρο το γράφημα
- Το αποτέλεσμα:
 - καθορίζει πώς οργανώνεται το σύστημα συνολικά



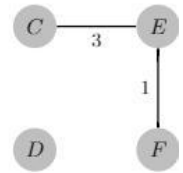
(1) Graph G



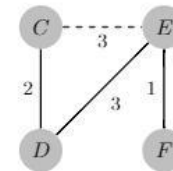
(2) An MST T_G of graph G



(3) A connected subgraph H of graph G



(4) $T_G \cap H$

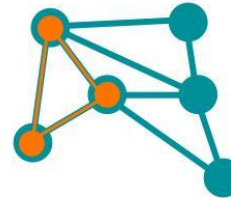


(5) Some MST T_H of H

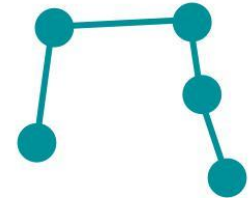
3. Έννοια Δέντρου

- Ένα δέντρο:
 - είναι γράφημα χωρίς κύκλους
- Ιδιότητες:
 - συνδεδεμένο
 - χωρίς επαναλαμβανόμενες διαδρομές
- Για n κόμβους:
 - περιέχει $n - 1$ ακμές
- Το δέντρο:
 - αποτελεί ελάχιστη δομή σύνδεσης

Cyclic Graph

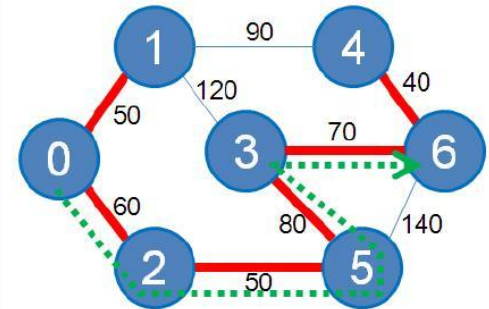
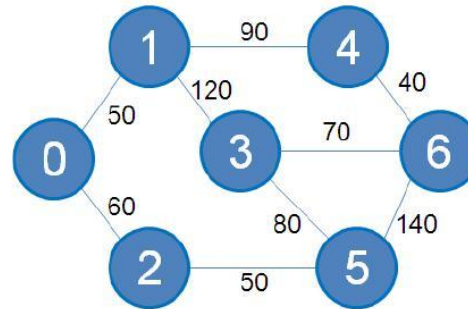


Acyclic Graph



4. Δέντρο Κάλυψης

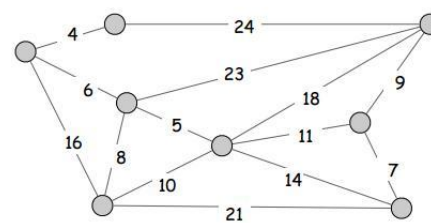
- Δέντρο κάλυψης:
 - υπογράφημα που περιέχει όλους τους κόμβους
- Περιλαμβάνει:
 - υποσύνολο ακμών του αρχικού γραφήματος
- Ικανοποιεί:
 - συνδεσιμότητα
 - απουσία κύκλων
- Κάθε γράφημα:
 - μπορεί να έχει πολλά δέντρα κάλυψης



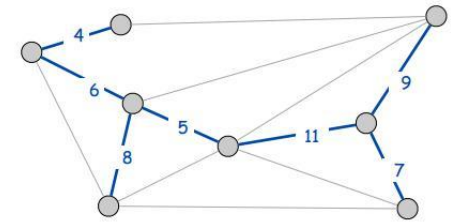
5. Πρόβλημα Ελάχιστου Δέντρου Κάλυψης

- Δεδομένο:
 - γράφημα με βάρη ακμών c_{ij}
- Ζητούμενο:
 - επιλογή ακμών που συνδέουν όλους τους κόμβους
- Περιορισμοί:
 - χωρίς κύκλους
 - πλήρης κάλυψη
- Στόχος:
 - $\text{Min } \sum c_{ij} x_{ij}$

Minimum spanning tree. Given a connected graph $G = (V, E)$ with real-valued edge weights c_e , an MST is a subset of the edges $T \subseteq E$ such that T is a spanning tree whose sum of edge weights is minimized.



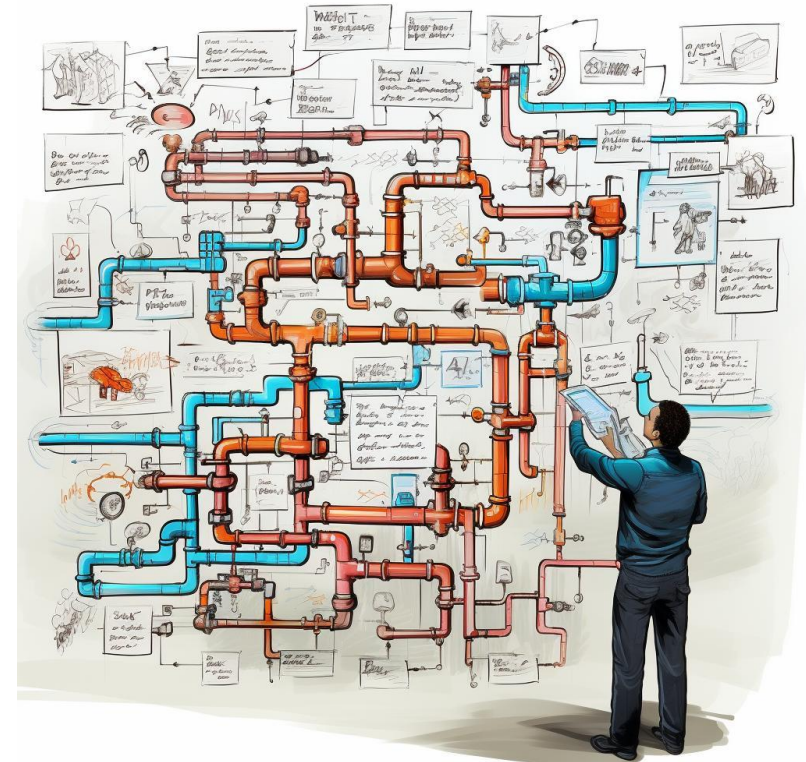
$G = (V, E)$



$T, \sum_{e \in T} c_e = 50$

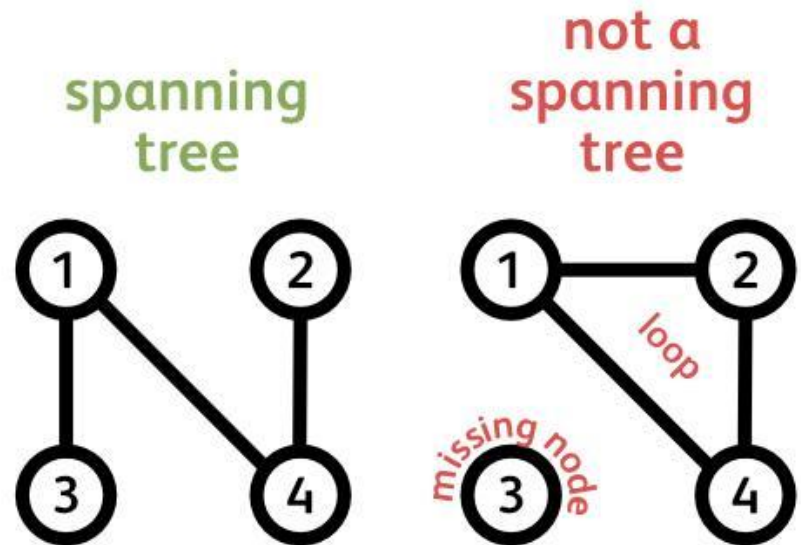
6. Γιατί Χρειαζόμαστε Ελάχιστα Δέντρα

- Σε πολλά συστήματα:
 - απαιτείται σύνδεση όλων των στοιχείων
- Παραδείγματα:
 - δίκτυα ενέργειας
 - τηλεπικοινωνιακά δίκτυα
 - δίκτυα μεταφοράς
- Ο στόχος:
 - ελάχιστο κόστος υποδομής
- Κάθε επιπλέον ακμή:
 - αυξάνει το κόστος
 - δεν είναι απαραίτητη για συνδεσιμότητα
- Συνεπώς:
 - αναζητούμε τη μικρότερη δυνατή δομή που συνδέει τα πάντα



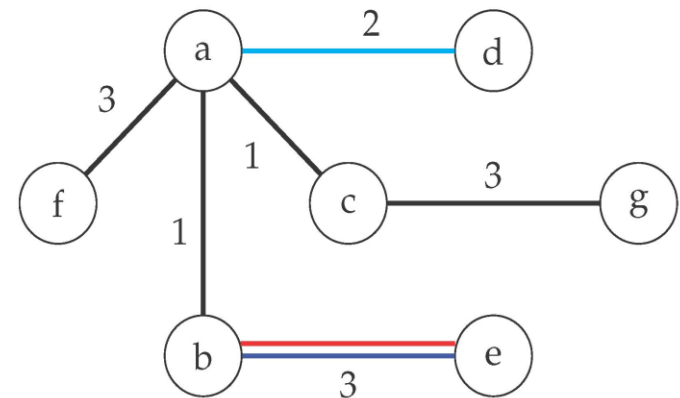
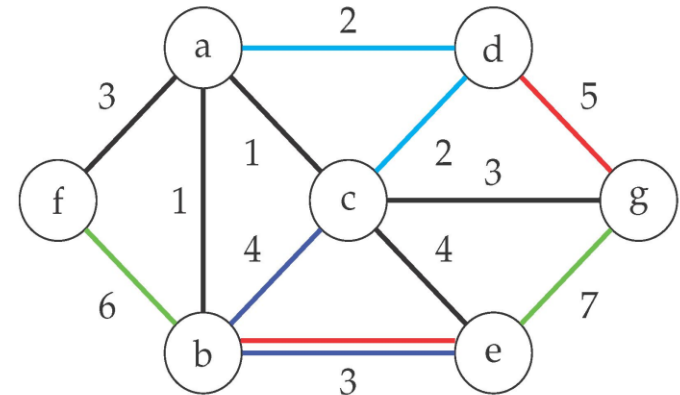
7. Διαφορά από Συντομότερη Διαδρομή

- Συντομότερη διαδρομή:
 - συνδέει δύο κόμβους
- Ελάχιστο δέντρο:
 - συνδέει όλους τους κόμβους
- Διαδρομή:
 - είναι γραμμική δομή
- Δέντρο:
 - είναι δομή διακλάδωσης



8. Μαθηματική Μορφή

- Μεταβλητές:
- $x_{ij} = 1$ αν επιλεγεί η ακμή (i, j) , αλλιώς 0
- Στόχος:
- $\text{Min } \sum c_{ij} x_{ij}$
- Περιορισμοί:
- Πλήθος ακμών:
 - $\sum x_{ij} = |V| - 1$
- Απουσία κύκλων:
 - δεν επιτρέπεται δημιουργία κλειστών διαδρομών
- Συνδεσιμότητα:
 - όλοι οι κόμβοι πρέπει να συνδέονται

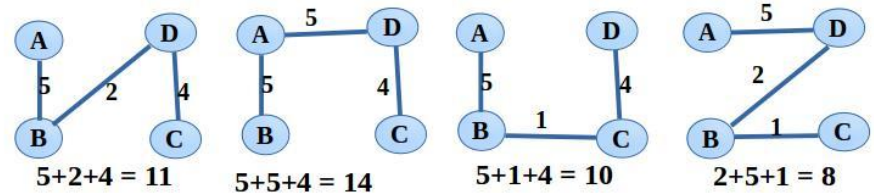
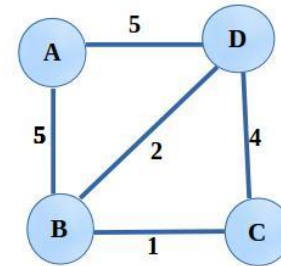


9. Παράδειγμα

- Κόμβοι:
- A, B, C, D

- Ακμές:

- A-B : 4
- A-C : 2
- B-C : 1
- B-D : 5
- C-D : 3

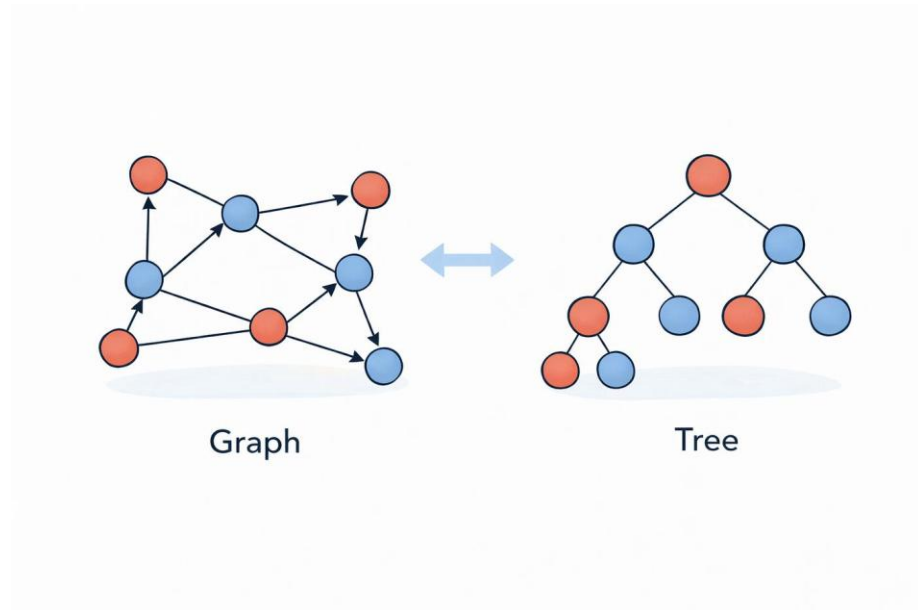


- Πιθανές λύσεις:
 - διαφορετικά δέντρα κάλυψης

- Στόχος:
 - επιλογή με ελάχιστο συνολικό κόστος

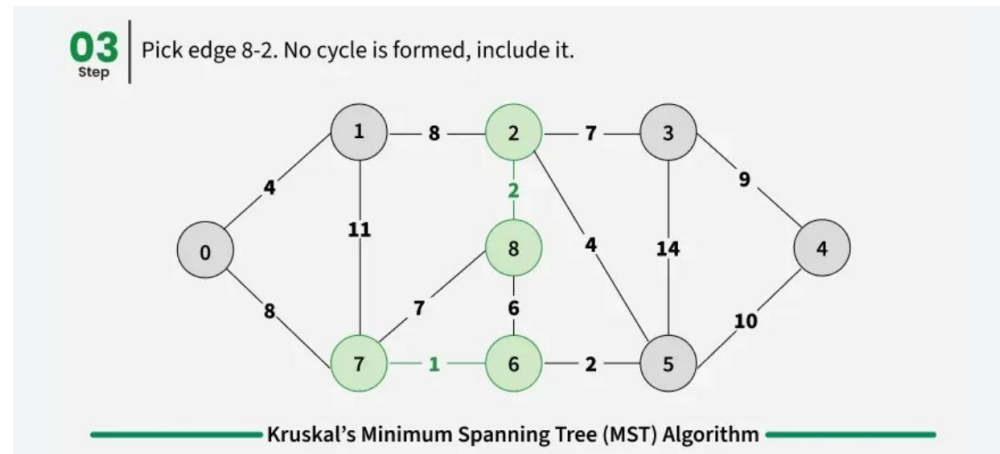
10. Δομική Ιδιότητα

- Ένα δέντρο:
 - δεν περιέχει κύκλους
- Αν προστεθεί ακμή:
 - δημιουργείται κύκλος
- Αν αφαιρεθεί ακμή:
 - το γράφημα αποσυνδέεται
- Η δομή:
 - είναι ελάχιστη αλλά επαρκής



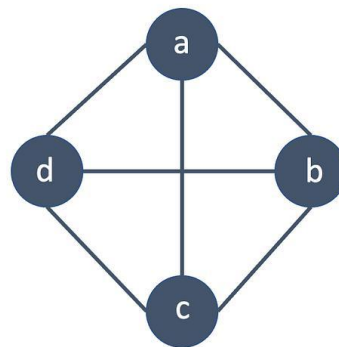
11. Αλγοριθμική Προσέγγιση

- Ο αριθμός πιθανών δέντρων:
 - είναι μεγάλος
- Η απαρίθμηση:
 - δεν είναι αποδοτική
- Απαιτείται:
 - συστηματική επιλογή ακμών
- Η επιλογή:
 - βασίζεται σε ιδιότητες του προβλήματος

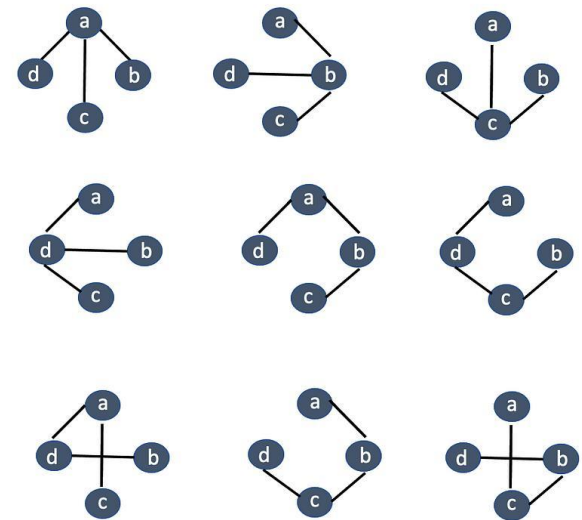


12. Γιατί Δεν Αρκεί η Διατύπωση

- Η μαθηματική μορφή:
 - ορίζει το πρόβλημα
- Δεν καθορίζει:
 - τη διαδικασία επίλυσης
- Οι συνδυασμοί ακμών:
 - είναι πολλοί
- Η αναζήτηση:
 - δεν μπορεί να είναι εξαντλητική



Graph



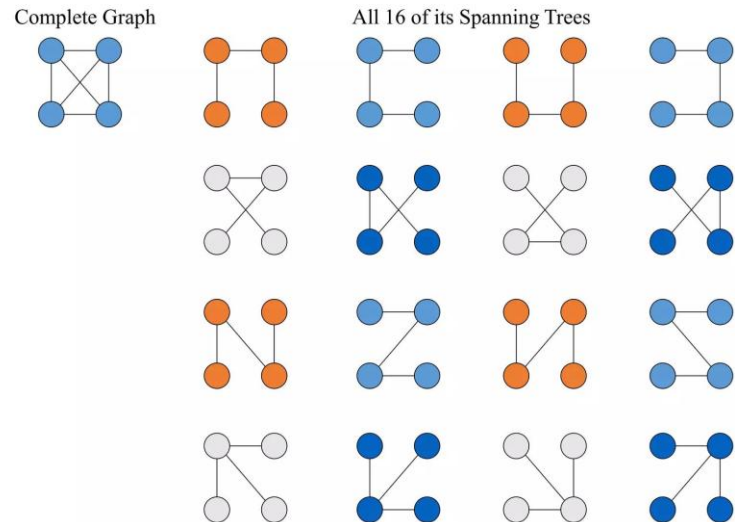
Spanning Trees

13. Τι Κάνουν οι Μέθοδοι

- Οι μέθοδοι:
 - οργανώνουν την επιλογή ακμών

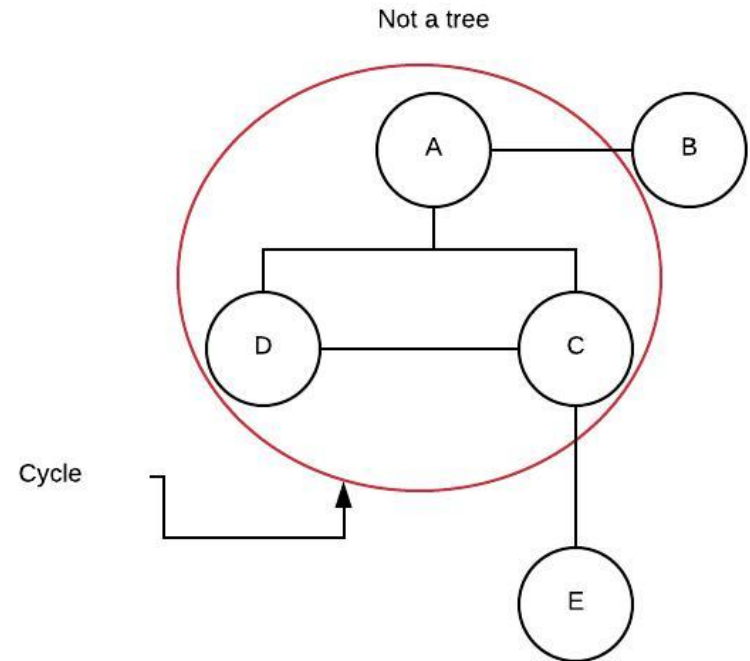
- Δεν εξετάζουν:
 - όλα τα δέντρα

- Εκμεταλλεύονται:
 - ιδιότητες κύκλων και συνδεσιμότητας



14. Ποια Δομή Εκμεταλλεύονται

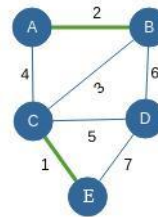
- Απουσία κύκλων
 - Τοπική επιλογή ακμών
 - Διατήρηση συνδεσιμότητας
-
- Οι ιδιότητες αυτές:
 - επιτρέπουν σταδιακή κατασκευή λύσης



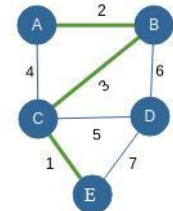
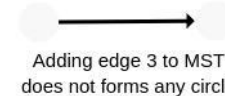
15. Ιδέα Μεθόδου Kruskal

- Ταξινομούμε τις ακμές:
 - κατά αύξον κόστος
- Επιλέγουμε διαδοχικά:
 - τη φθηνότερη διαθέσιμη ακμή
- Προϋπόθεση:
 - δεν δημιουργείται κύκλος
- Η διαδικασία:
 - συνεχίζεται μέχρι να συνδεθούν όλοι οι κόμβοι

Edges 1,2 are added to MST

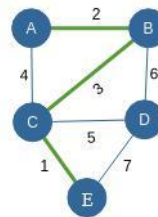


Edge 3 is next smallest edge

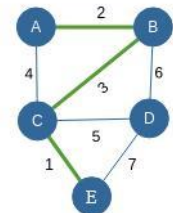
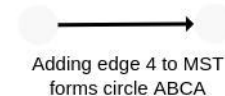


So, edge 3 is added to MST in this step

Edges 1,2,3 are added to MST



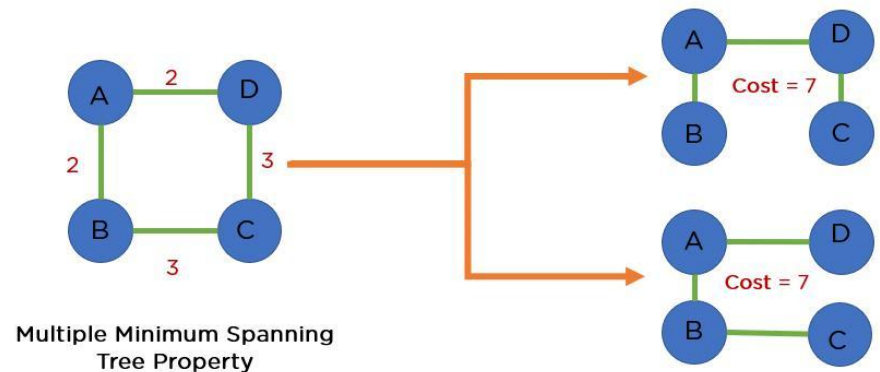
Edge 4 is next smallest edge



So, edge 4 is not added to MST in this step

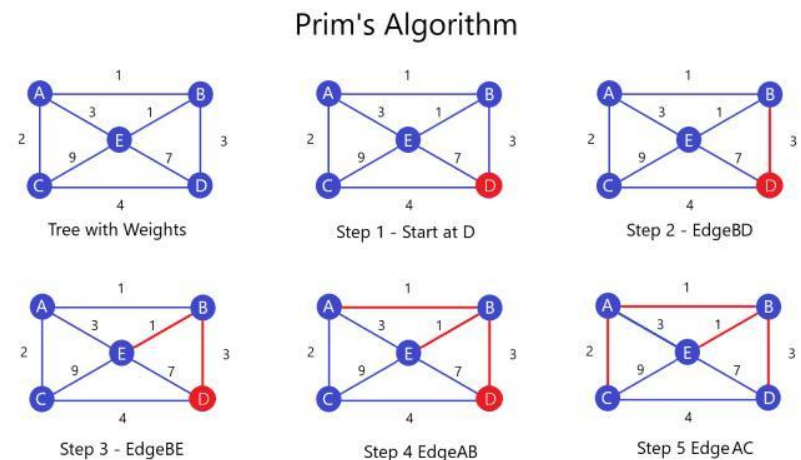
16. Ερμηνεία της Μεθόδου Kruskal

- Η μέθοδος:
 - προσθέτει ακμές σταδιακά
- Σε κάθε βήμα:
 - διατηρείται η απουσία κύκλων
- Η επιλογή:
 - είναι τοπικά βέλτιστη
- Η συνολική λύση:
 - προκύπτει από διαδοχικές επιλογές



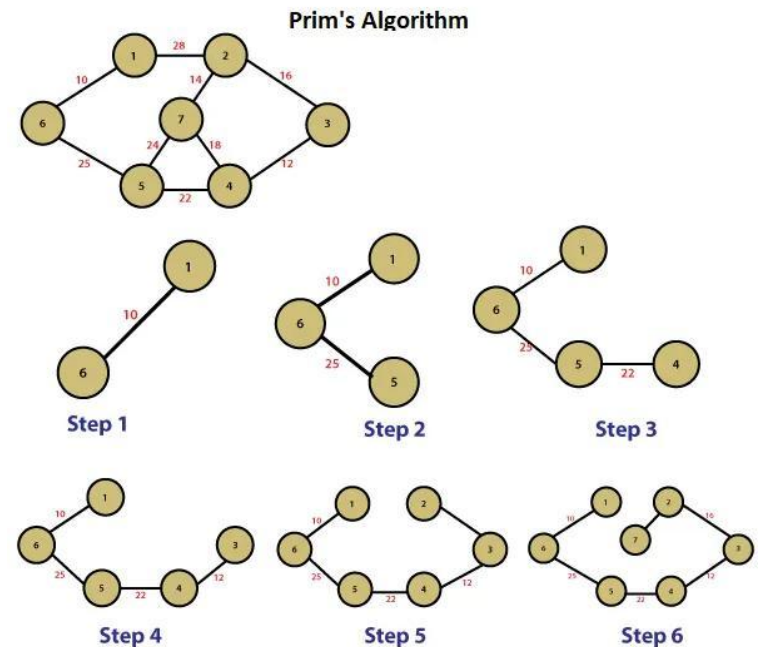
17. Ιδέα Μεθόδου Prim

- Ξεκινάμε από έναν κόμβο
- Διατηρούμε:
 - σύνολο συνδεδεμένων κόμβων
- Σε κάθε βήμα:
 - επιλέγεται η φθηνότερη ακμή που συνδέει νέο κόμβο
- Η διαδικασία:
 - επεκτείνει το δέντρο



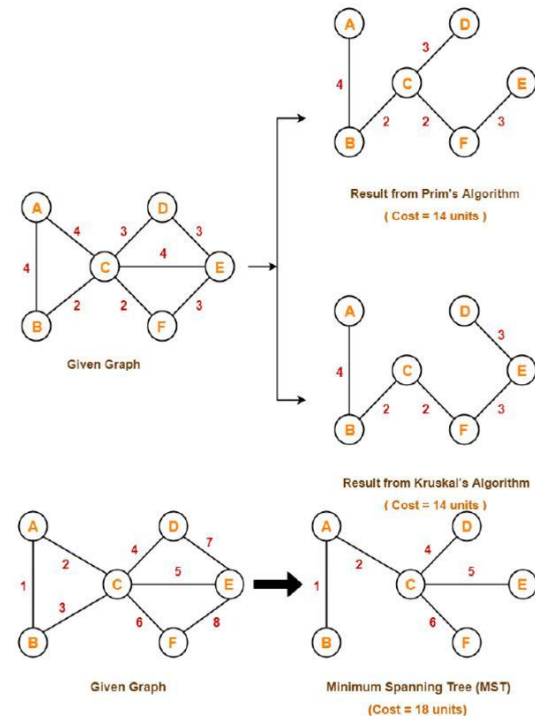
18. Ερμηνεία της Μεθόδου Prim

- Η μέθοδος:
 - αναπτύσσει ένα ενιαίο δέντρο
- Σε κάθε βήμα:
 - προστίθεται ένας κόμβος
- Η επιλογή:
 - βασίζεται στο ελάχιστο κόστος σύνδεσης



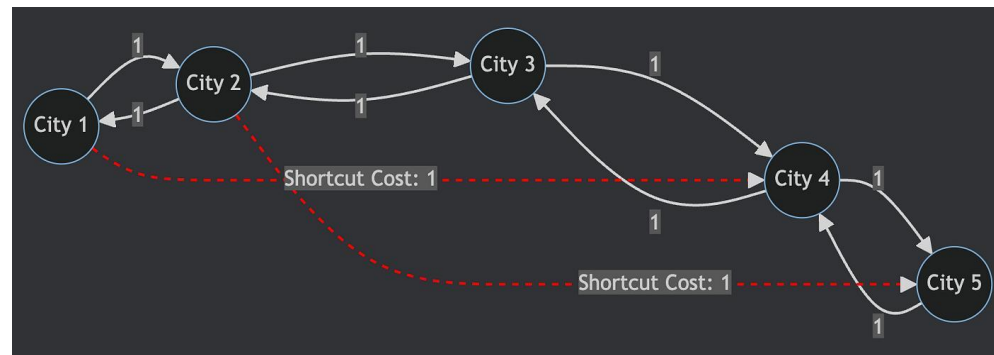
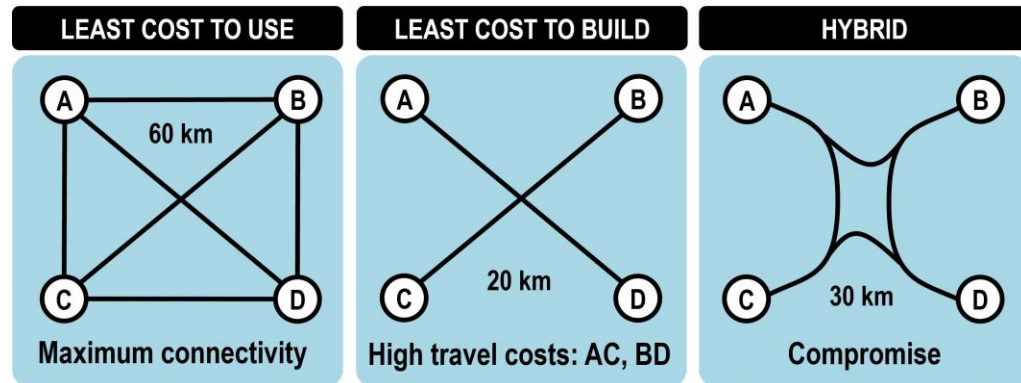
19. Σύγκριση Μεθόδων

- Kruskal:
 - βασίζεται σε ταξινόμηση ακμών
- Prim:
 - βασίζεται σε επέκταση δέντρου
- Και οι δύο:
 - παράγουν ελάχιστο δέντρο



20. Εννοιολογική Ερμηνεία

- Το πρόβλημα:
 - δεν είναι μόνο επιλογή ακμών
- Είναι:
 - κατασκευή δομής σύνδεσης
- Η λύση:
 - εκφράζει οργάνωση του συστήματος



21. Εννοιολογικό Λάθος 1 – Επιλογή Φθηνότερων Ακμών

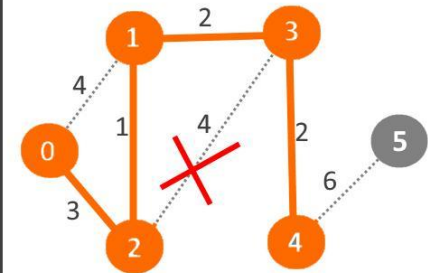
- Επιλέγουμε:
 - τις ακμές με το μικρότερο κόστος
- Χωρίς έλεγχο:
 - μπορεί να δημιουργηθούν κύκλοι
- Ο κύκλος:
 - δεν συμβάλλει στη συνδεσιμότητα
 - αυξάνει το συνολικό κόστος
- Το αποτέλεσμα:
 - είναι μη βέλτιστο
- Το πρόβλημα:
 - δεν είναι απλή επιλογή φθηνών ακμών
 - απαιτεί έλεγχο δομής

Steps

1. Sort the edges in ascending order of weights.
2. Pick the edge with the least weight. Check if including this edge in spanning tree will form a cycle is Yes then ignore it if No then add it to spanning tree.
3. Repeat the step 2 until spanning tree has $V-1$ edges (V – vertices in Graph).

Edges	1-2	1-3	3-4	0-2	0-1	2-3	4-5
Weights	1	2	2	3	4	4	6

7/9



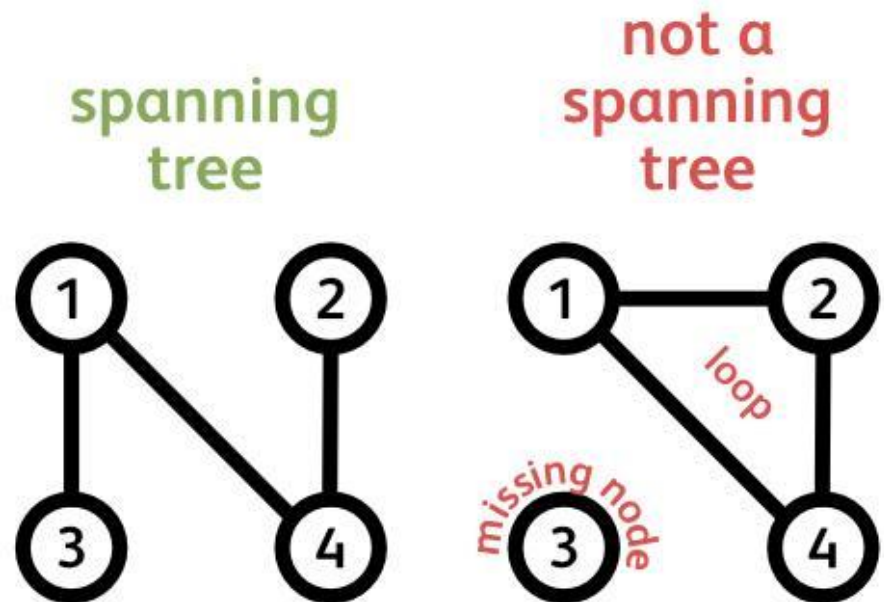
Edge 2-3:

If edge 2-3 is included then CYCLE will be formed so ignore this edge.

MST Edges : 4

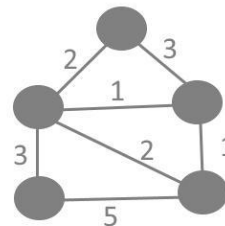
22. Εννοιολογικό Λάθος 2 – Αγνόηση Συνδεσιμότητας

- Επιλέγουμε ακμές:
 - χωρίς να διασφαλίζεται ότι όλοι οι κόμβοι συνδέονται
- Το αποτέλεσμα:
 - δημιουργούνται απομονωμένα τμήματα
- Το γράφημα:
 - δεν είναι ενιαίο
- Η λύση:
 - δεν καλύπτει το σύστημα
- Η συνδεσιμότητα:
 - είναι βασική απαίτηση του προβλήματος

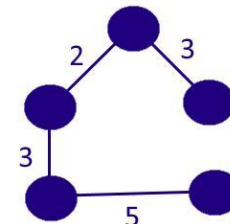


23. Το Κεντρικό Μήνυμα

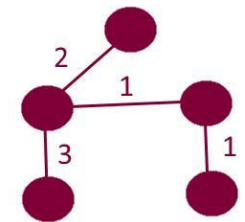
- Το ελάχιστο δέντρο:
 - είναι δομή σύνδεσης με ελάχιστο κόστος
- Η λύση:
 - προκύπτει από ιδιότητες του γραφήματος
- Οι μέθοδοι:
 - εκμεταλλεύονται τη δομή
- Η κατανόηση:
 - προηγείται της επίλυσης



Graph



Spanning Tree
Cost = 13



Minimum Spanning
Tree, Cost = 7