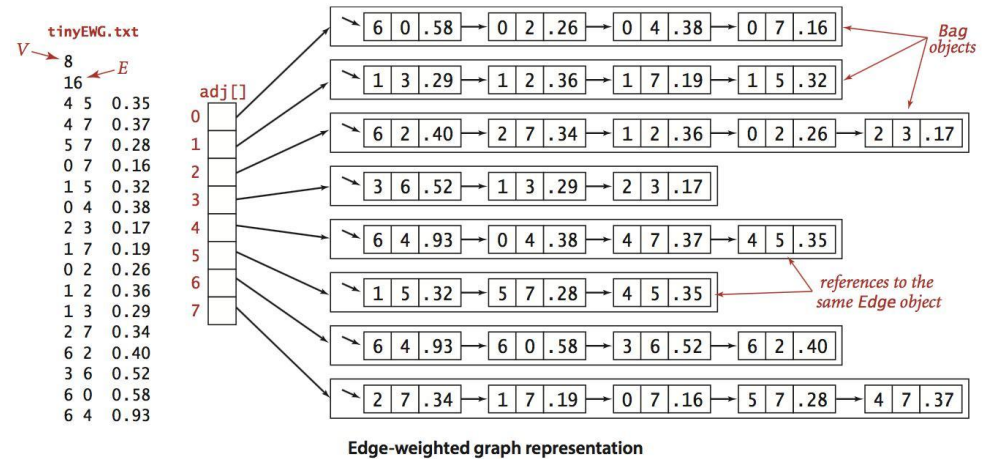


# 1. Από τη Δομή στο Υπολογιστικό Πρόβλημα

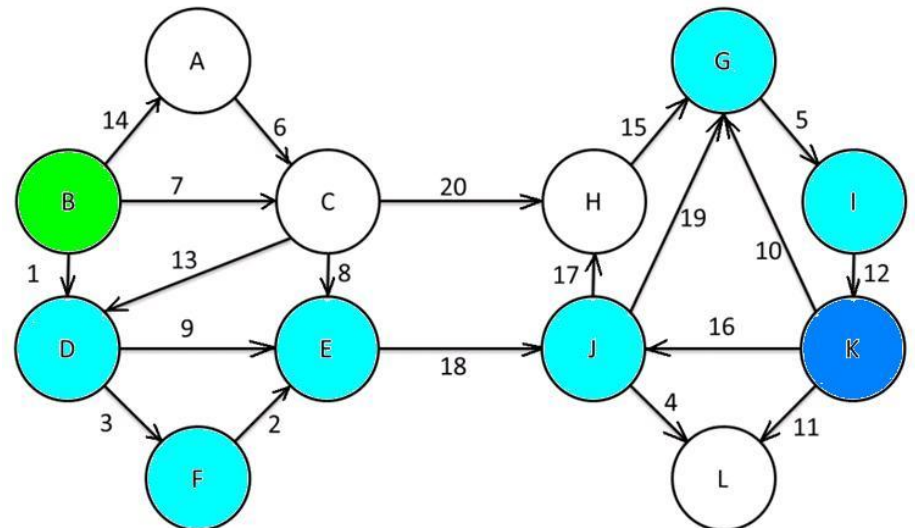
- Στις προηγούμενες διαλέξεις:
  - – ορίσαμε μεταβλητές, περιορισμούς και εφικτό χώρο
  - – κατανοήσαμε τη γεωμετρική μορφή της βελτιστοποίησης
  - – εισαγάγαμε διακριτές αποφάσεις
  - – αναπαραστήσαμε το σύστημα ως γράφημα
- Σε αυτή τη διάλεξη:
  - – το πρόβλημα αποκτά υπολογιστική μορφή
- Η περιγραφή του συστήματος:
  - – δεν επαρκεί για την εύρεση λύσης
- Απαιτείται:
  - – διαδικασία εντοπισμού συγκεκριμένων αποφάσεων
  - – μέσα στη δομή του δικτύου

# 2. Το Γράφημα ως Χώρος Αποφάσεων

- Έστω γράφημα  $G = (V, E)$
- Κόμβοι ( $V$ ):
  - αντιστοιχούν σε οντότητες του συστήματος
- Ακμές ( $E$ ):
  - αντιστοιχούν σε δυνατές συνδέσεις

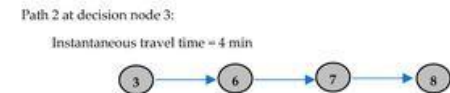
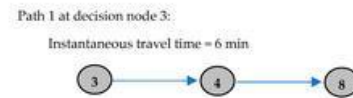
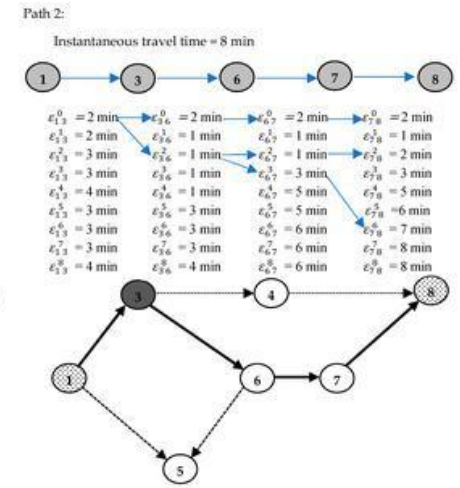
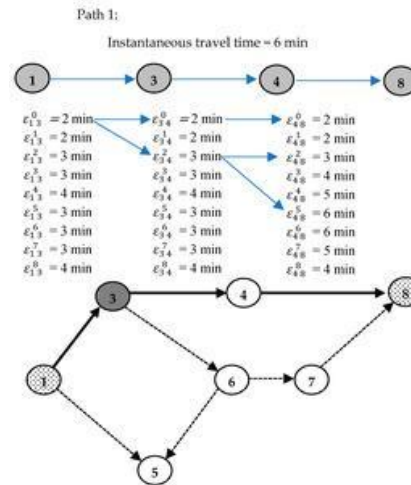


- Κάθε ακμή  $(i, j)$ :
  - έχει βάρος  $c_{ij}$
- Το γράφημα:
  - ορίζει όλες τις δυνατές επιλογές διαδρομών
- Ο χώρος λύσεων:
  - δεν είναι συνεχής
  - είναι σύνολο διαδρομών



# 3. Διαδρομή ως Απόφαση

- Μία διαδρομή:
  - είναι ακολουθία ακμών που συνδέει δύο κόμβους
- Απόφαση:
  - επιλογή συγκεκριμένης διαδρομής από  $s$  σε  $t$
- Κάθε διαδρομή:
  - αντιστοιχεί σε διαφορετική λύση
- Το κριτήριο:
  - είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους
- Το κόστος:
  - προκύπτει ως άθροισμα επιμέρους ακμών



# 4. Μαθηματική Διατύπωση

Μεταβλητές:

- $x_{ij} = 1$  αν χρησιμοποιείται η ακμή  $(i, j)$ , αλλιώς 0

Στόχος:

- $\text{Min } \sum c_{ij} x_{ij}$

Περιορισμοί:

• Για τον κόμβο  $s$ :

- $-\sum_j x_{sj} - \sum_i x_{is} = 1$

• Για τον κόμβο  $t$ :

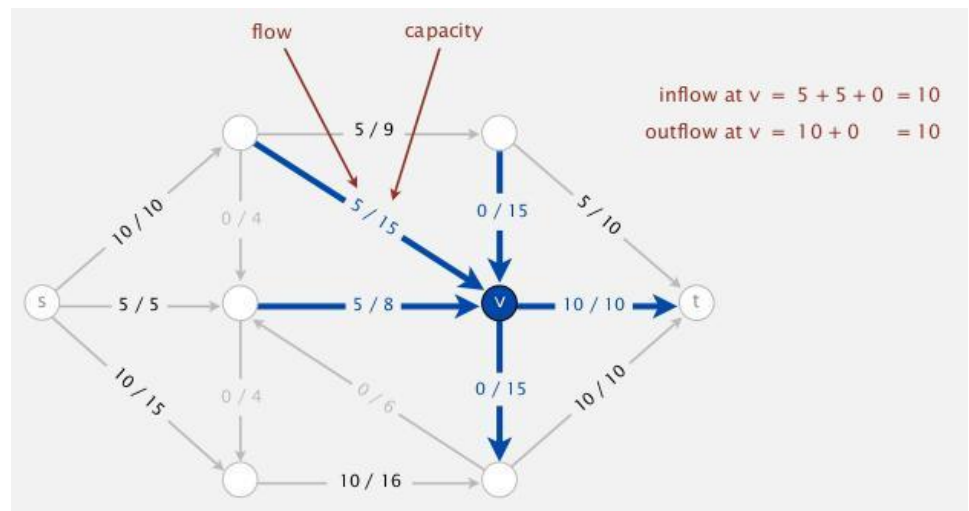
- $-\sum_j x_{tj} - \sum_i x_{it} = -1$

• Για κάθε ενδιάμεσο κόμβο  $k$ :

- $-\sum_j x_{kj} - \sum_i x_{ik} = 0$

• Οι μεταβλητές:

- εξασφαλίζουν ότι η λύση είναι διαδρομή



# 5. Ερμηνεία Περιορισμών Ροής

- Οι περιορισμοί:
  - εκφράζουν ισορροπία ροής
- Σε κάθε ενδιάμεσο κόμβο:
  - η εισερχόμενη ροή ισούται με την εξερχόμενη
- Δεν επιτρέπεται:
  - δημιουργία ροής
  - απώλεια ροής
- Η διαδρομή:
  - είναι συνεχής χωρίς διακοπές

Παράδειγμα:

Κόμβος B:

- εισερχόμενες ακμές: A→B, C→B
- εξερχόμενη ακμή: B→D

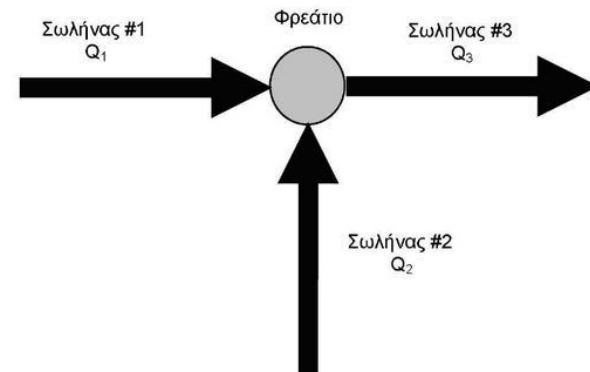
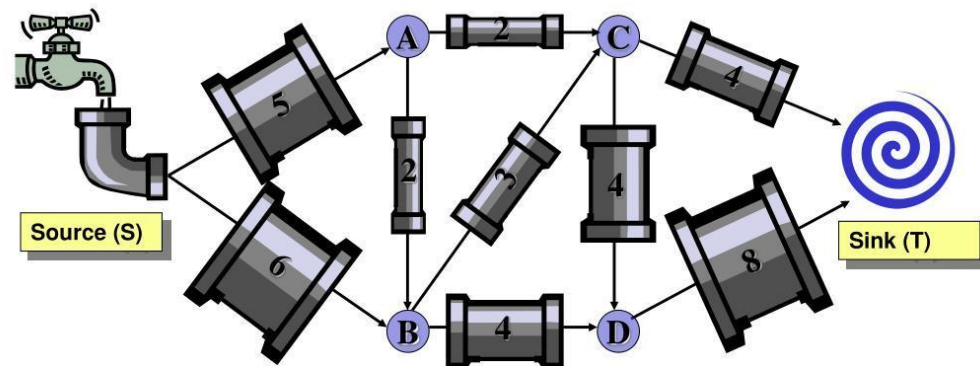
Ισχύει:

$$x_{AB} + x_{CB} - x_{BD} = 0$$

- Η εξίσωση:
  - επιβάλλει συνέπεια στη ροή

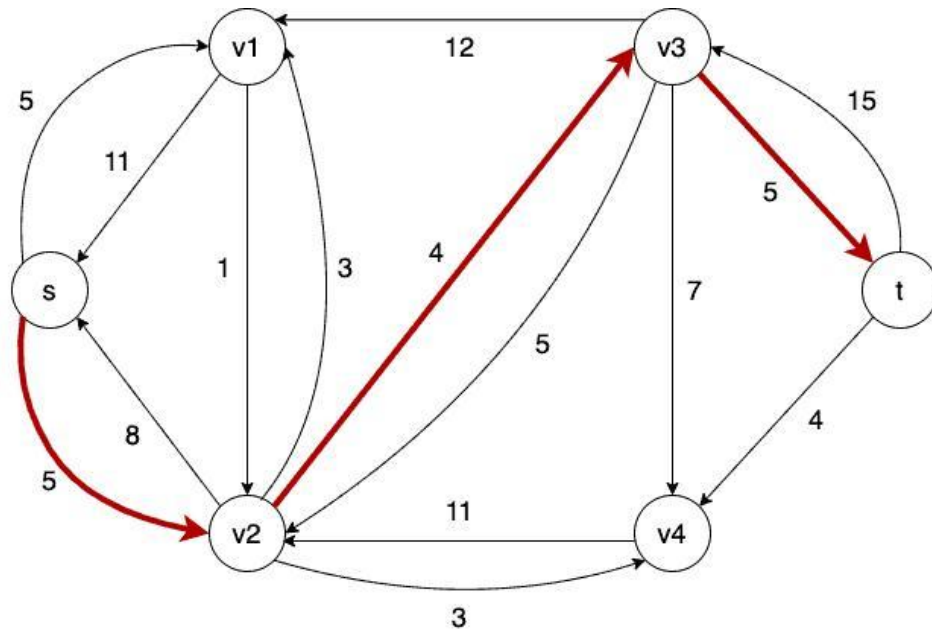
## Network Flow

The diagram above shows water flowing through a pipework system.  
The values on the pipes are the *capacities* of water that they can carry.



# 6. Το Πρόβλημα ως Ροή

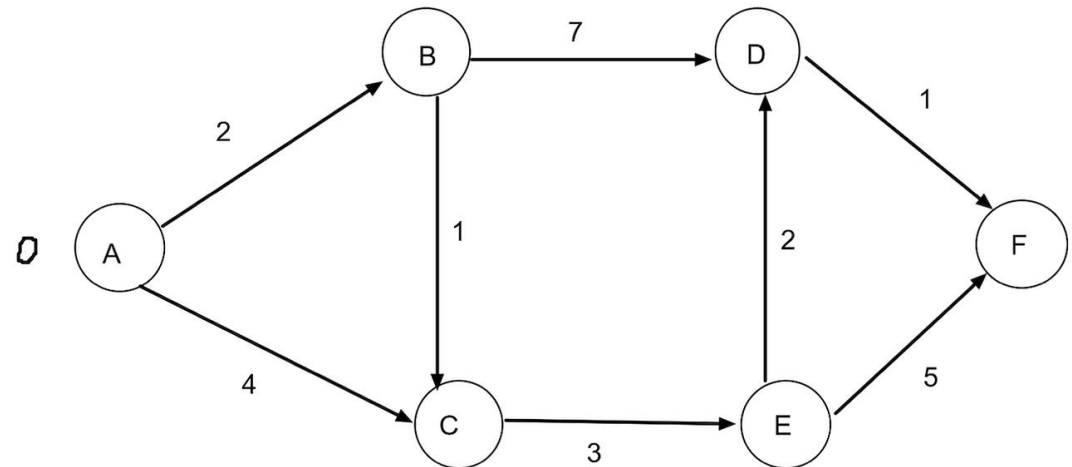
- Η διαδρομή:
  - μπορεί να ιδωθεί ως ροή μονάδας
- Αντί για δυαδικές μεταβλητές:
  - επιτρέπεται  $x_{ij} \geq 0$
- Τότε:
  - το πρόβλημα γενικεύεται
- Η λύση:
  - είναι κατανομή ροής στο δίκτυο
- Το δίκτυο:
  - λειτουργεί ως σύστημα μεταφοράς



# 7. Παράδειγμα Δικτύου

- Κόμβοι:
- A, B, C, D

- Ακμές:
- $A \rightarrow B : 5$
- $A \rightarrow C : 2$
- $B \rightarrow D : 3$
- $C \rightarrow D : 6$
- $B \rightarrow C : 1$



- Πιθανές διαδρομές:
- $A \rightarrow B \rightarrow D$
- $A \rightarrow C \rightarrow D$
- $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$

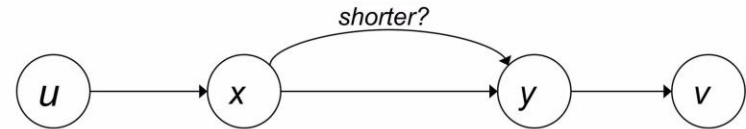
- Κάθε διαδρομή:
- έχει διαφορετικό συνολικό κόστος

# 8. Δομική Ιδιότητα Βέλτιστης Διαδρομής

- Αν μία διαδρομή είναι βέλτιστη:
- κάθε υποδιαδρομή της είναι επίσης βέλτιστη
- Η ιδιότητα αυτή:
  - δεν είναι προφανής
  - προκύπτει από τη δομή του προβλήματος
- Επιτρέπει:
  - κατασκευή λύσης τμηματικά

## A Fact About Shortest Paths

- **Theorem:** If  $p$  is a shortest path from  $u$  to  $v$ , then any subpath of  $p$  is also a shortest path.
- **Proof:** Consider a subpath of  $p$  from  $x$  to  $y$ . If there were a shorter path from  $x$  to  $y$ , then there would be a shorter path from  $u$  to  $v$ .

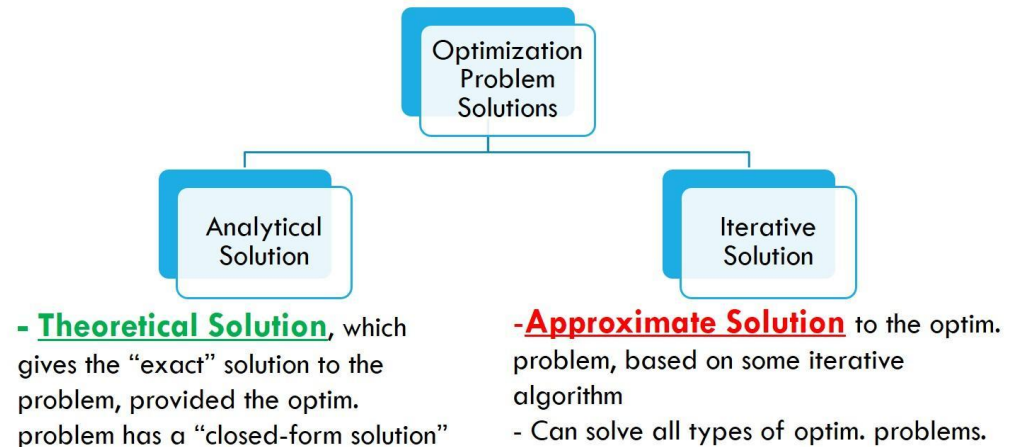




# 10. Γιατί Δεν Αρκεί η Διατύπωση

- Η μαθηματική διατύπωση:
  - ορίζει το πρόβλημα
- Δεν προσδιορίζει:
  - πώς θα βρεθεί η λύση
- Ο χώρος λύσεων:
  - είναι μεγάλος
- Η αναζήτηση:
  - δεν μπορεί να είναι εξαντλητική
- Απαιτείται:
  - μέθοδος

## Optimization Problem Solution Methods:

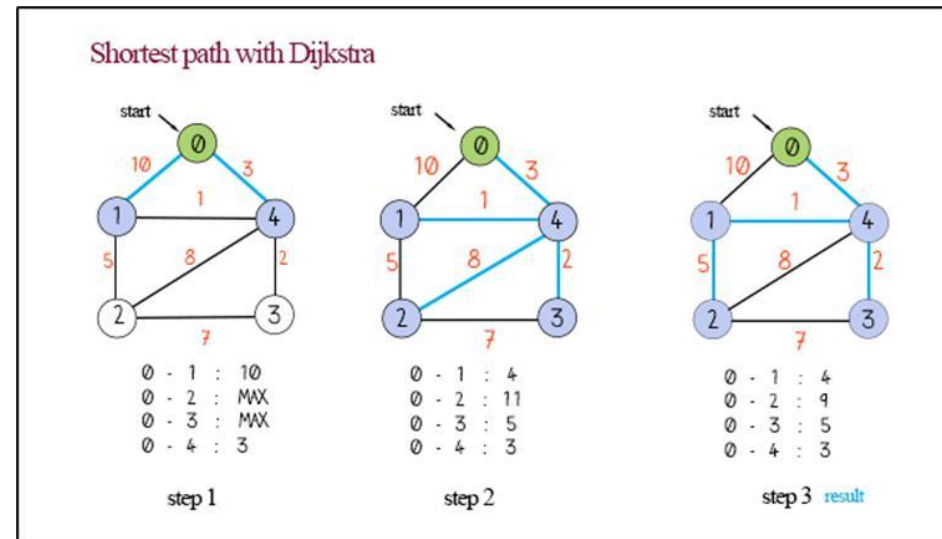


# 11. Τι Κάνουν οι Μέθοδοι

- Οι μέθοδοι:
  - οργανώνουν τη διαδικασία αναζήτησης

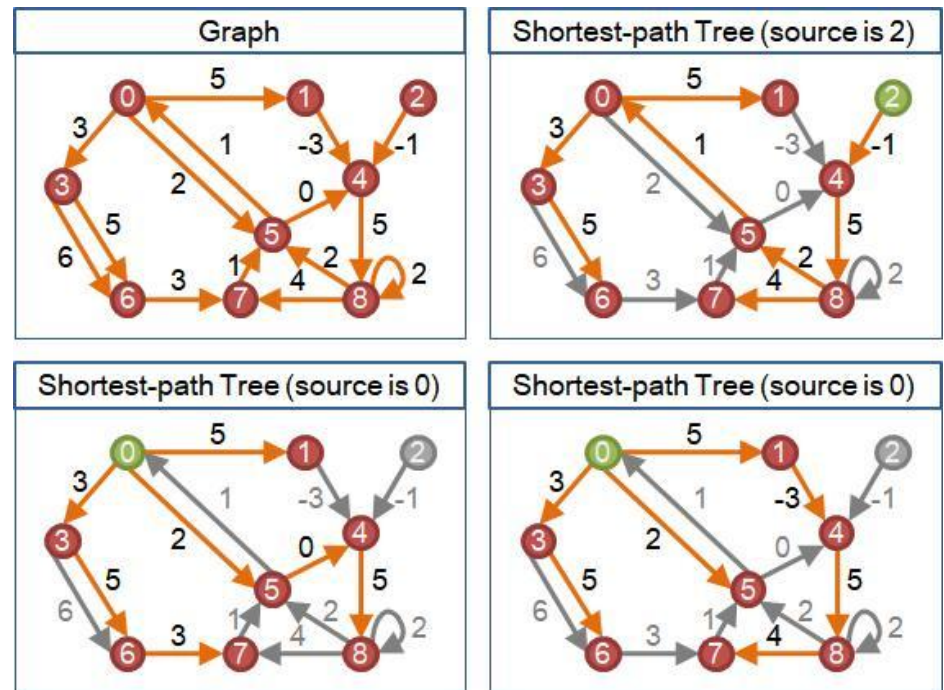
- Δεν εξετάζουν:
  - όλες τις δυνατές λύσεις
- Χρησιμοποιούν:
  - πληροφορία από τη δομή

- Περιορίζουν:
  - το πλήθος υποψήφιων λύσεων



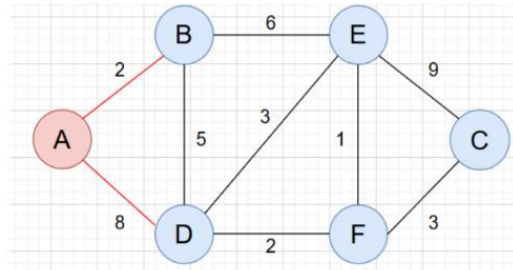
# 12. Ποια Δομή Εκμεταλλεύονται οι Μέθοδοι

- Διατήρηση ροής
- Προσθετικότητα κόστους
- Βέλτιστη υποδομή
  
- Οι ιδιότητες αυτές:
  - καθορίζουν τη μορφή της λύσης
  
- Οι μέθοδοι:
  - μετατρέπουν αυτές τις ιδιότητες σε διαδικασία



# 13. Ιδέα Μεθόδου Συντομότερης Διαδρομής

- Ξεκινάμε από κόμβο  $s$
- Θέτουμε:
  - απόσταση( $s$ ) = 0
- Για τους υπόλοιπους:
  - απόσταση = μεγάλη τιμή
- Σε κάθε βήμα:
  - επιλέγεται κόμβος με μικρότερη απόσταση
- Η απόσταση:
  - γίνεται οριστική



Visited: {A} Unvisited: {B, C, D, E, F}

NODE	SHORTEST DISTANCE	PREVIOUS NODE
A	0	
B	2	A
C	Inf	
D	8	A
E	Inf	
F	Inf	

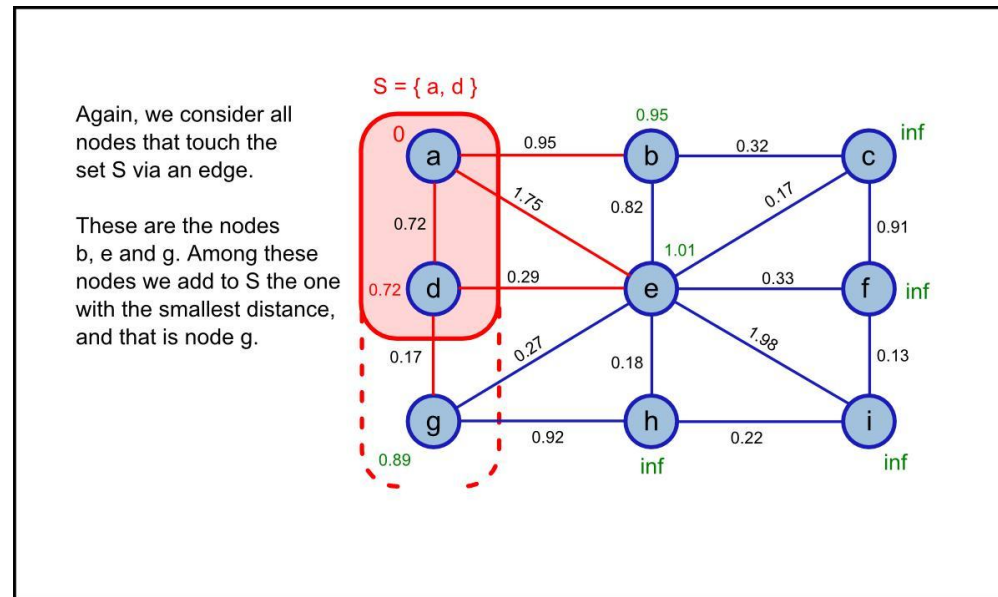
# 14. Ερμηνεία της Μεθόδου

- Η μέθοδος:
  - κατασκευάζει σταδιακά λύση

- Σε κάθε βήμα:
  - επεκτείνεται το σύνολο γνωστών κόμβων

- Δεν εξετάζονται:
  - όλες οι διαδρομές

- Η διαδικασία:
  - είναι καθορισμένη και πεπερασμένη

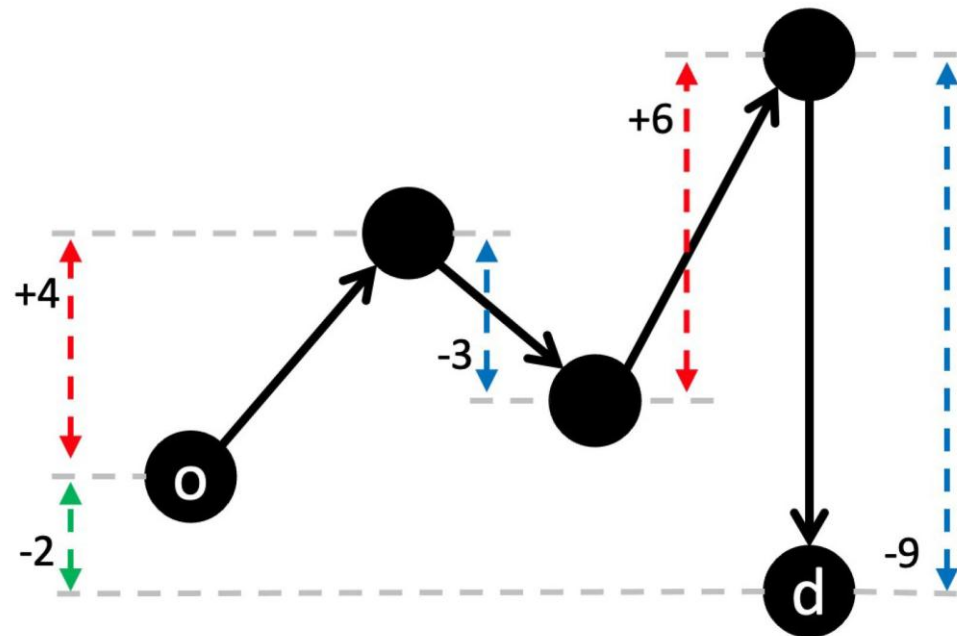


# 15. Δομή της Βέλτιστης Λύσης

- Η βέλτιστη διαδρομή:
  - δεν περιέχει περιττούς κύκλους

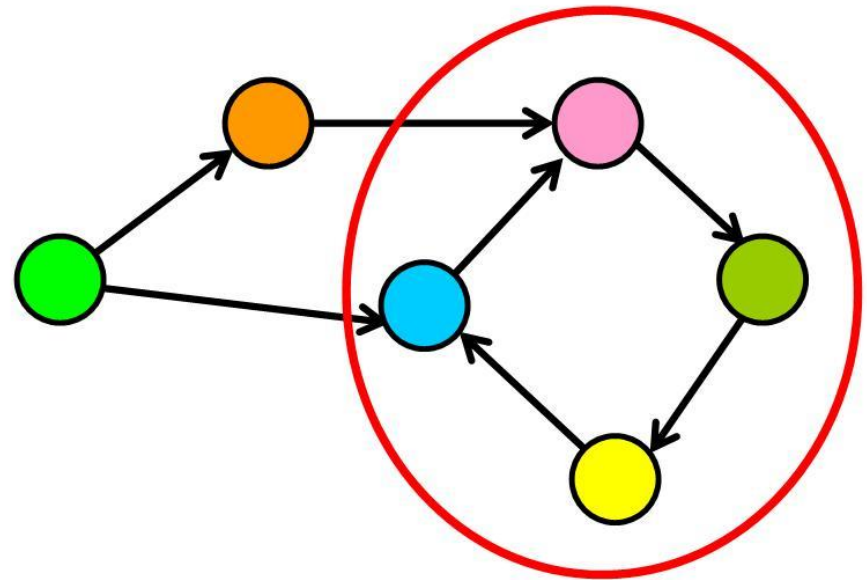
- Κύκλος με θετικό κόστος:
  - αυξάνει το συνολικό κόστος

- Η αφαίρεση κύκλου:
  - βελτιώνει τη λύση



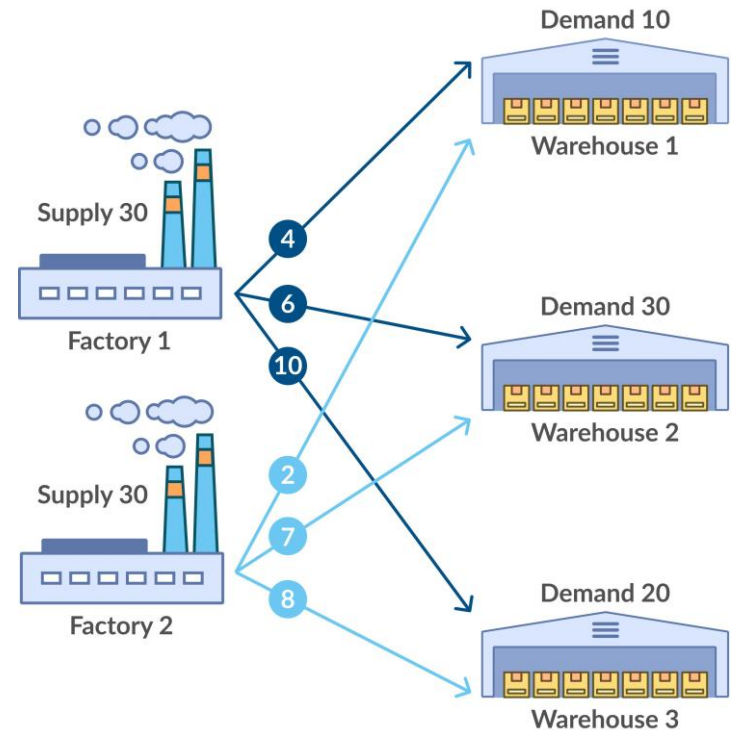
# 16. Ιδιότητα Απουσίας Κύκλων

- Η βέλτιστη λύση:
  - είναι απλή διαδρομή
- Δεν περιέχει:
  - επαναλαμβανόμενους κόμβους
- Η ύπαρξη κύκλου:
  - σημαίνει μη αποδοτική λύση



# 17. Γενίκευση σε Ροές

- Μεταβλητές:
  - $x_{ij}$  = ποσότητα ροής
- Περιορισμοί προσφοράς:
  - $\sum_j x_{ij} \leq S_i$
- Περιορισμοί ζήτησης:
  - $\sum_i x_{ij} = D_j$
- Περιορισμοί ισορροπίας:
  - ισχύουν για ενδιάμεσους κόμβους



# 18. Στόχος σε Δίκτυα Ροής

- Στόχος:

- $\text{Min } \sum c_{ij} X_{ij}$

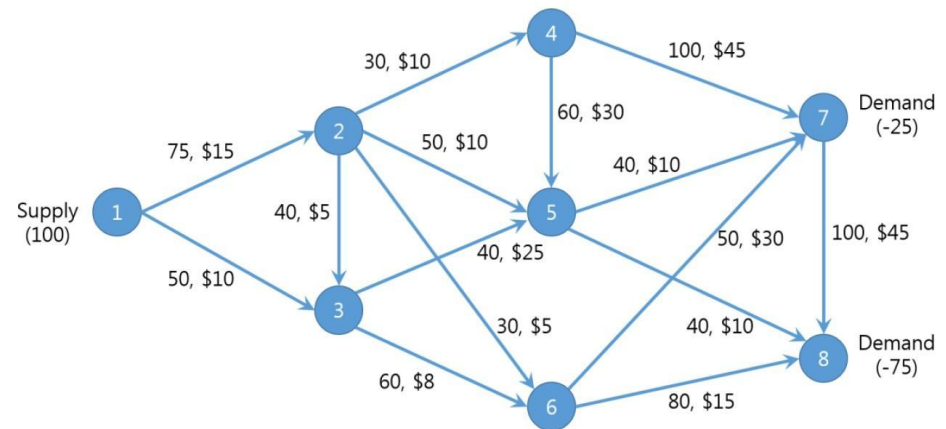
- Το κόστος:

- εξαρτάται από τη ροή

- Η λύση:

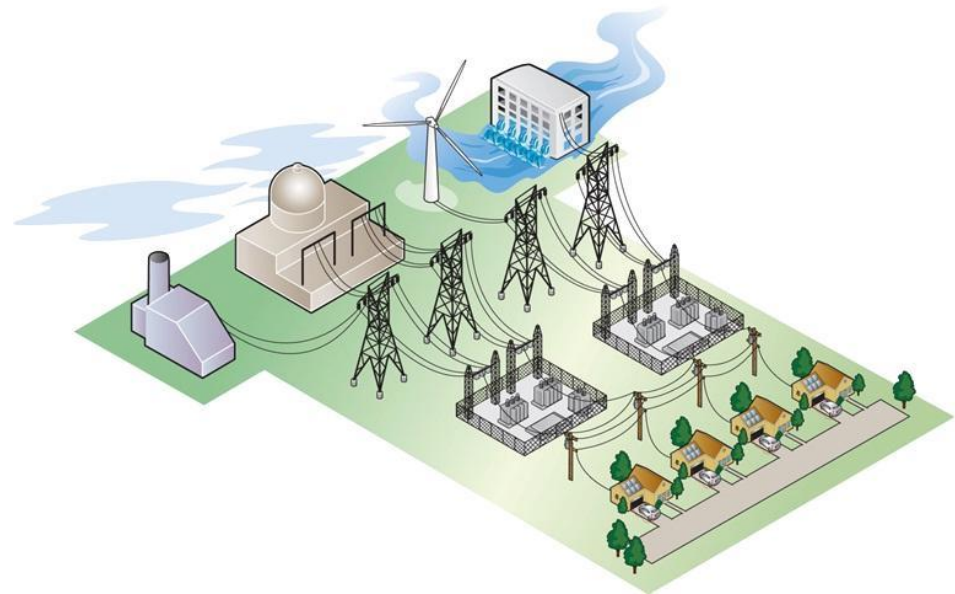
- κατανέμει τη ροή στο δίκτυο

#3 Formulate below graph to solve minimum cost flow problem (MCFP) (capacity, \$unit price)



# 19. Ερμηνεία Ροών

- Οι ροές:
  - εκφράζουν φυσικές ή λειτουργικές διαδικασίες
- Παραδείγματα:
  - μεταφορά προϊόντων
  - ροή ενέργειας
  - δίκτυα επικοινωνίας



# 20. Σχέση με Προηγούμενες Διαλέξεις

- Μεταβλητές και περιορισμοί
- Διακριτές αποφάσεις
- Λογικές σχέσεις
- Γραφήματα
- Η παρούσα διάλεξη:
  - ενσωματώνει όλες τις έννοιες



Constraint Optimization Problems  
for Graphical Models

A *finite COP* is a triple  $R = \langle X, D, F \rangle$  where :

$X = \{X_1, \dots, X_n\}$  - variables

$D = \{D_1, \dots, D_n\}$  - domains

$F = \{f_1, \dots, f_m\}$  - cost functions

$f(A,B,D)$  has scope  $\{A,B,D\}$

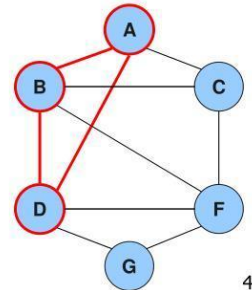
A	B	D	Cost
1	2	3	3
1	3	2	2
2	1	3	0
2	3	1	0
3	1	2	5
3	2	1	0

**Primal graph =**  
 Variables --> nodes  
 Functions, Constraints --> arcs

$$F(a,b,c,d,f,g) = f_1(a,b,d) + f_2(d,f,g) + f_3(b,c,f)$$

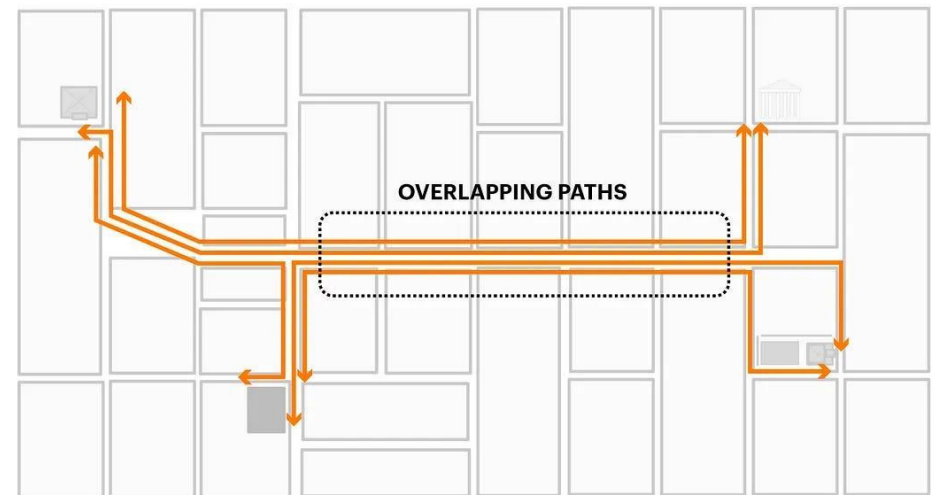
Global Cost Function

$$F(X) = \sum_{i=1}^m f_i(X)$$



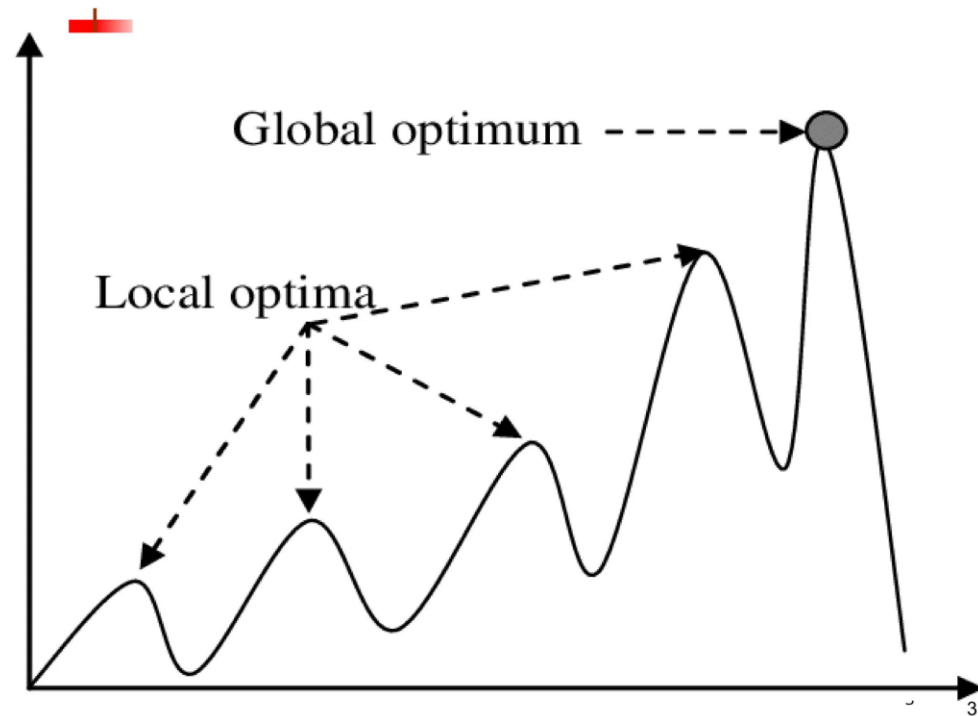
# 21. Εννοιολογικό Λάθος 1 – Αγνόηση Δομής Δικτύου

- Θεωρούμε ότι οι διαδρομές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους
- Στην πραγματικότητα:
  - μοιράζονται κοινές ακμές και κόμβους
  - η επιλογή μίας ακμής επηρεάζει τις διαθέσιμες επιλογές
- Το δίκτυο:
  - επιβάλλει περιορισμούς που δεν είναι εμφανείς σε μεμονωμένες διαδρομές
- Αγνόηση της δομής:
  - οδηγεί σε εσφαλμένη κατανόηση του προβλήματος



# 22. Εννοιολογικό Λάθος 2 – Τοπική Επιλογή

- Επιλέγουμε σε κάθε βήμα:
  - την ακμή με το μικρότερο κόστος
- Η επιλογή αυτή:
  - είναι τοπικά βέλτιστη
  - δεν εγγυάται συνολικά βέλτιστη λύση
- Η συνολική διαδρομή:
  - εξαρτάται από συνδυασμό επιλογών
- Το πρόβλημα:
  - απαιτεί παγκόσμια θεώρηση



# 23. Εννοιολογικό Λάθος 3 – Παράλειψη Περιορισμών Ροής

- Αν δεν επιβληθούν περιορισμοί ισοροπίας:

- η λύση μπορεί να μην αποτελεί πραγματική διαδρομή

- Μπορεί να προκύψουν:

- αποσυνδεδεμένα τμήματα
- ασυνεπείς επιλογές ακμών

- Οι περιορισμοί ροής:

- εξασφαλίζουν τη συνοχή της λύσης

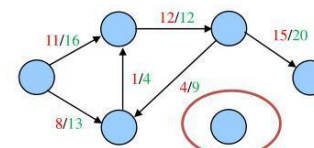
- Χωρίς αυτούς:

- το αποτέλεσμα είναι μαθηματικά αλλά όχι φυσικά αποδεκτό

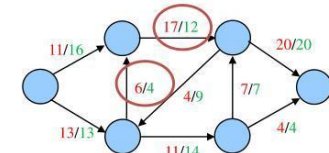
Red: flow  
Green: capacity

## What is a flow network?

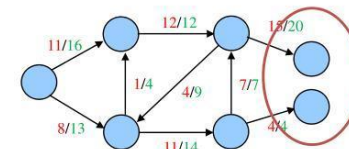
- Are they flow networks with valid flows?



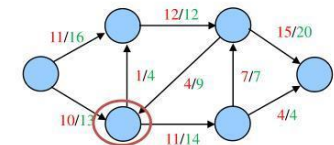
✗ Not connected



✗ Violate the capacity constraint



✗ Multiple Sinks



✗ Violate the flow conservation rule

# 24. Το Κεντρικό Μήνυμα

- Το πρόβλημα:
  - είναι βελτιστοποίηση σε γράφημα
- Η λύση:
  - καθορίζεται από τη δομή του δικτύου
- Οι μέθοδοι:
  - εκμεταλλεύονται ιδιότητες της δομής
- Η κατανόηση:
  - προηγείται της επίλυσης

