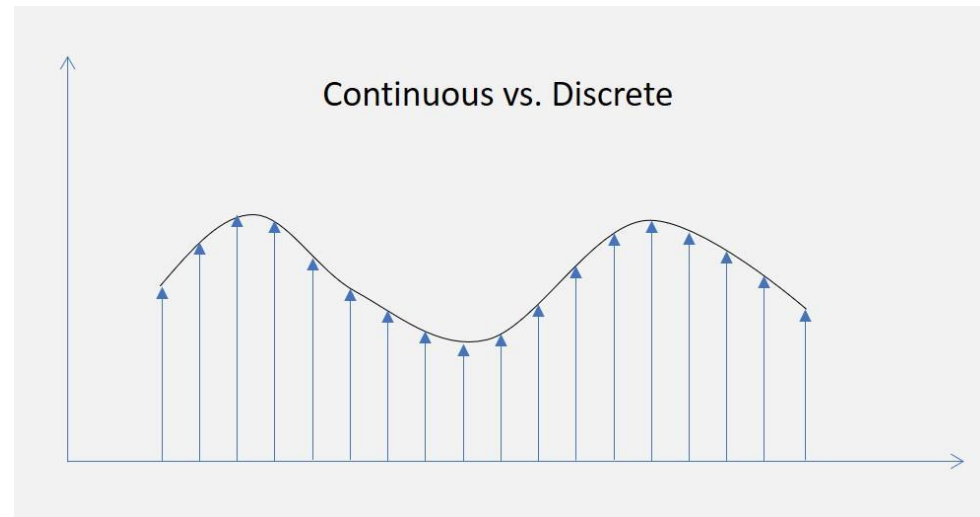


Διάλεξη 4

Μετάβαση από τη Συνέχεια στη
Διακριτότητα

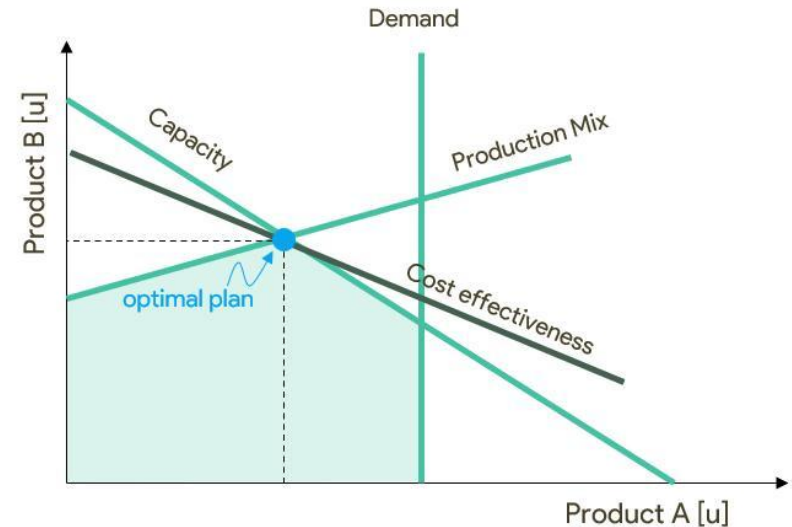
4. Μετάβαση από τη Συνέχεια στη Διακριτότητα

- Στις προηγούμενες διαλέξεις:
- $x \in \mathbb{R}$
- οι μεταβλητές μπορούσαν να λάβουν οποιαδήποτε τιμή
- Η βελτιστοποίηση:
- ήταν γεωμετρική διαδικασία
- αναζητούσε σημείο σε συνεχές σύνολο



Μετάβαση από τη Συνέχεια στη Διακριτότητα

- Όμως:
 - σε πραγματικά προβλήματα σχεδίασης
 - οι αποφάσεις δεν είναι συνεχείς
- Παραδείγματα:
 - αριθμός προϊόντων
 - αριθμός μηχανών
 - επιλογή προμηθευτή
- Συνεπώς:
 - $x \in \mathbb{N}$ ή $x \in \{0,1\}$
- Η μετάβαση:
 - δεν είναι τεχνική
 - είναι αλλαγή μοντέλου πραγματικότητας



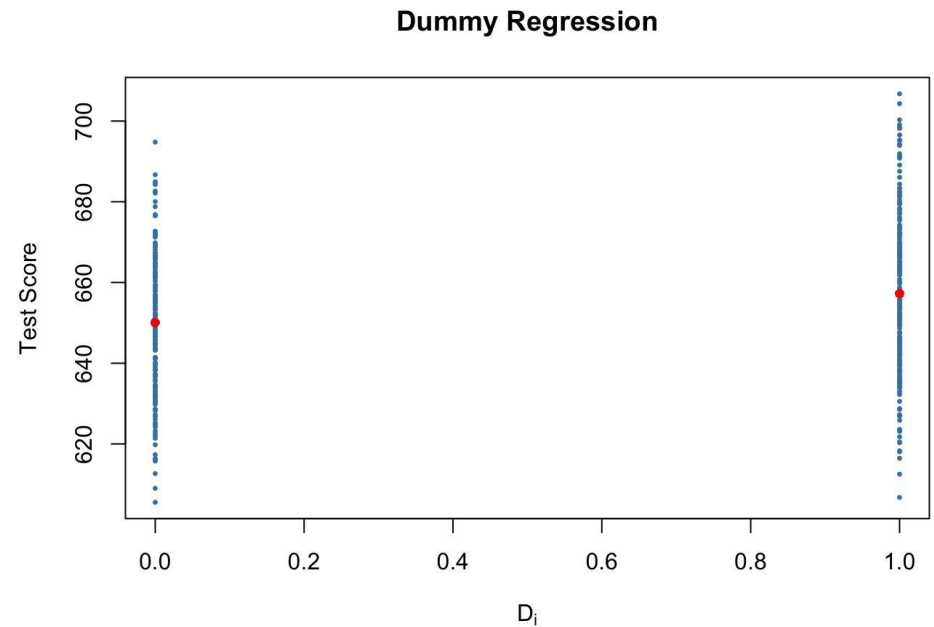
Διακριτές Μεταβλητές

- Ακέραιες μεταβλητές:

$$x \in \mathbb{N}$$

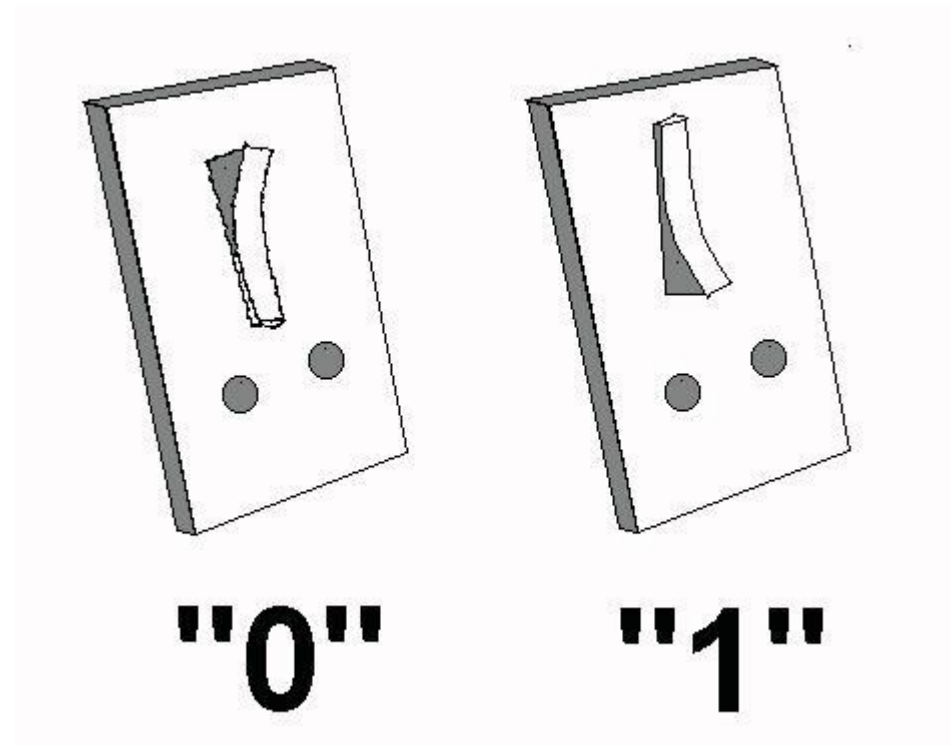
- Δυαδικές μεταβλητές:

$$z \in \{0,1\}$$



Διακριτές Μεταβλητές

- Ερμηνεία:
 - $z = 1 \rightarrow$ επιλογή ενεργή
 - $z = 0 \rightarrow$ επιλογή ανενεργή
- Οι μεταβλητές:
 - δεν εκφράζουν ποσότητα
 - εκφράζουν απόφαση
- Η μοντελοποίηση:
 - μεταβαίνει από “πόσο”
 - σε “ποιο”



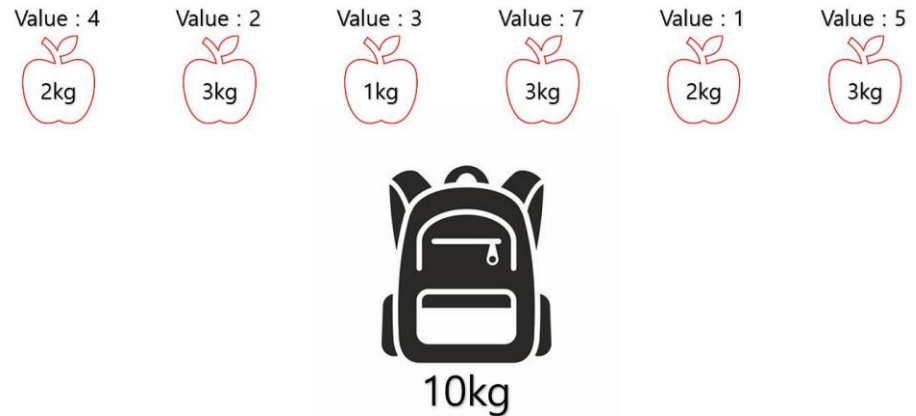
Παράδειγμα: Επιλογή Έργων

- Έχουμε σύνολο έργων $i = 1, \dots, n$

- Μεταβλητές:

- $z_i = 1$ αν επιλεγεί έργο i
- $z_i = 0$ αλλιώς

- Περιορισμός κόστους:
- $\sum c_i z_i \leq B$



Παράδειγμα: Επιλογή Έργων

- Δηλαδή:

$$c_1z_1 + c_2z_2 + \dots + c_nz_n \leq B$$

- Κάθε επιλεγμένο έργο:
συνεισφέρει κόστος c_i

- Το άθροισμα: εκφράζει το συνολικό κόστος

- Περιορισμός: το συνολικό κόστος δεν υπερβαίνει τον προϋπολογισμό B

- Όφελος:

- $\text{Max } \sum v_i z_i$






- Το πρόβλημα:

- επιλογή συνδυασμού έργων




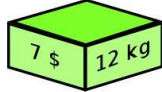











- Η απόφαση:

- δεν είναι σημείο σε χώρο, είναι σύνολο επιλογών

(A)

	1.11 \$/kg
	0.58 \$/kg
	0.5 \$/kg
	0.43 \$/kg
	0.4 \$/kg

(B) Max : 15 kg

(1)			
(2)			
(3)			
(4)			
(5)			

Το Εφικτό Σύνολο

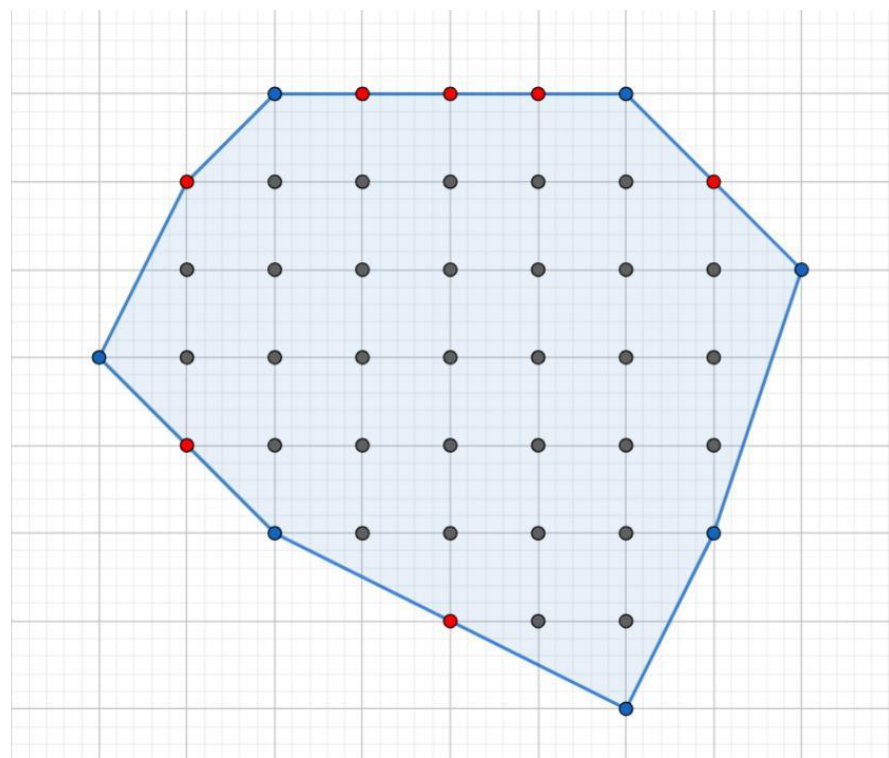
- $F = \{ z \in \{0,1\}^n : \sum c_i z_i \leq B \}$

- Το F:

- δεν είναι συνεχές

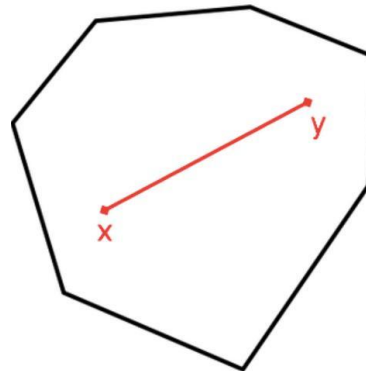
- δεν είναι κυρτό

- Δεν υπάρχουν
“ενδιάμεσες” λύσεις

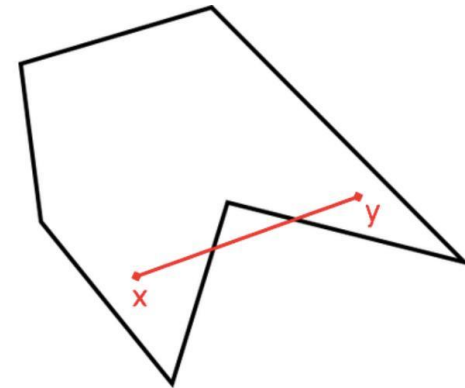


Το Εφικτό Σύνολο

- Γενικά:
- αν $A, B \in F$
- τότε $\lambda A + (1-\lambda)B \notin F$
- Η γεωμετρική διαίσθηση:
- που χρησιμοποιήθηκε στον γραμμικό προγραμματισμό
- παύει να ισχύει



Convex region



Non-convex region

Συνδυαστική Φύση του Προβλήματος

- Για n δυαδικές μεταβλητές:

- αριθμός λύσεων = 2^n

- Παράδειγμα:

- $n = 20 \rightarrow 2^{20} \approx 10^6$







- Ο χώρος λύσεων:

- δεν είναι συνεχής
- είναι σύνολο περιπτώσεων

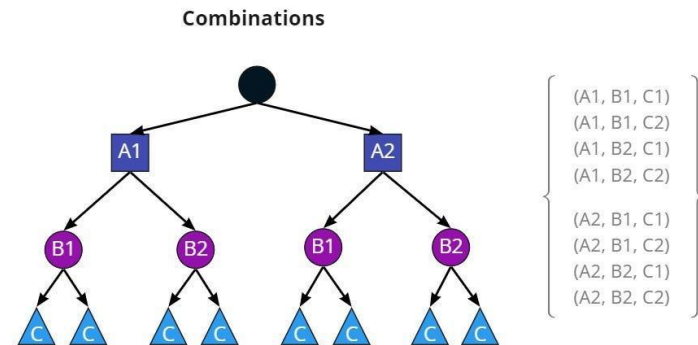
- Η αναζήτηση:

- δεν γίνεται σε γεωμετρικό χώρο
- γίνεται σε συνδυασμούς

Combinatorial Explosion

Variable	Values	Set
Variable A	 	$A = \{A1, A2\}$
Variable B	 	$B = \{B1, B2\}$
Variable C	 	$C = \{C1, C2\}$

Cartesian Product
= $A \times B \times C$
= $\{A1, A2\} \times \{B1, B2\} \times \{C1, C2\}$



Σύγκριση με Γραμμικό Προγραμματισμό

- Γραμμικός προγραμματισμός:

- F κυρτό
- άπειρες λύσεις
- βέλτιστο σε κορυφή

- Ακέραιος προγραμματισμός:

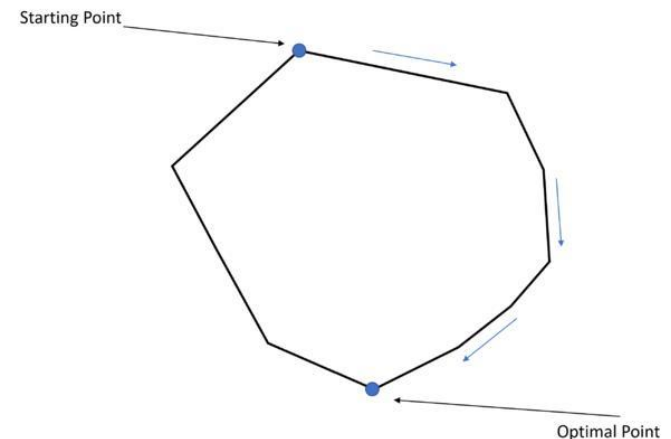
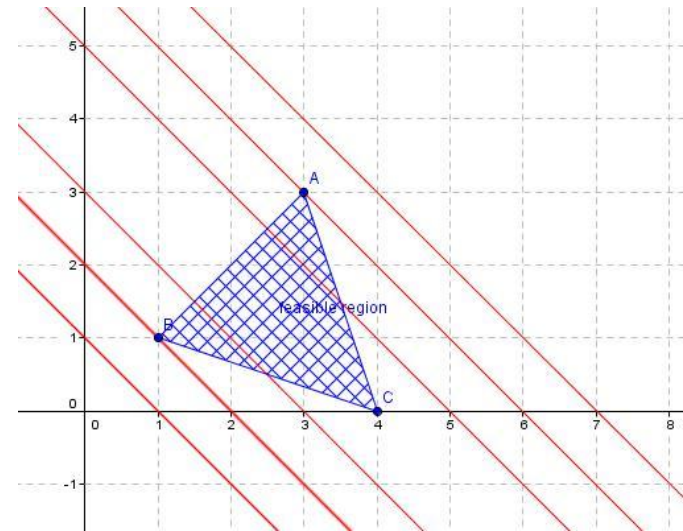
- F διακριτό
- πεπερασμένες λύσεις
- χωρίς γεωμετρική δομή

- Συνεπώς:

- οι μέθοδοι επίλυσης αλλάζουν
- η δυσκολία αυξάνεται

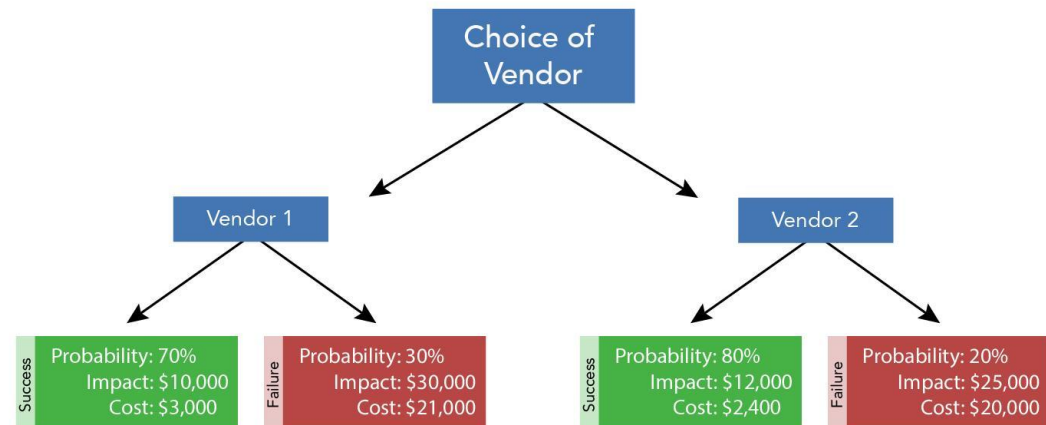
- Η μετάβαση:

- από γεωμετρία
- σε συνδυαστική ανάλυση



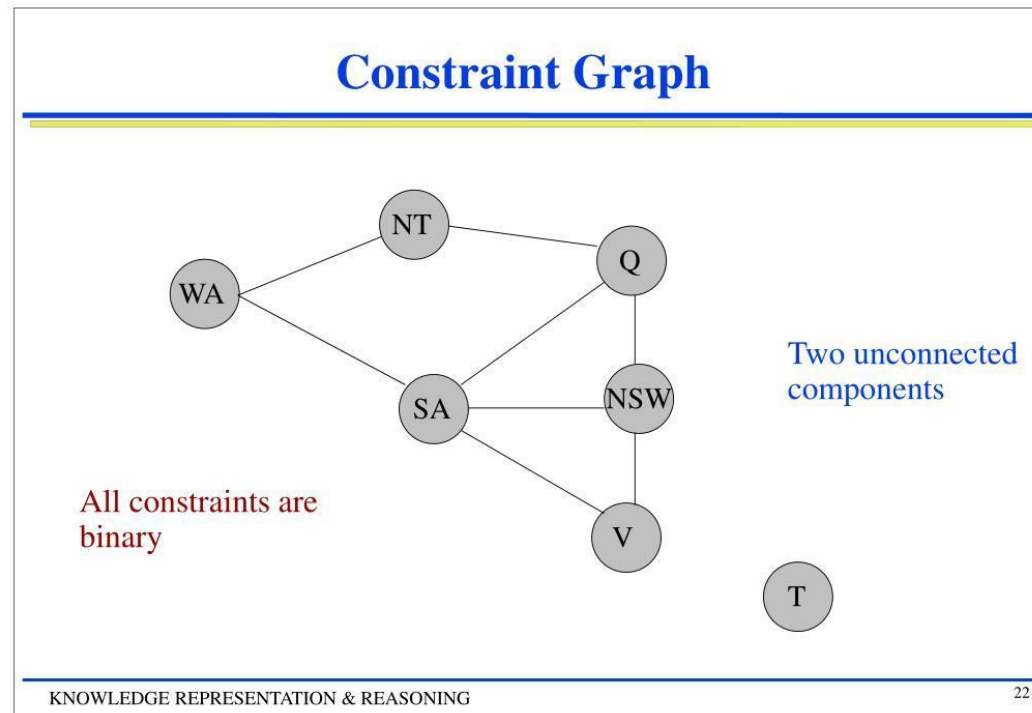
7. Παράδειγμα: Επιλογή Προμηθευτή

- Μεταβλητές:
 - $z_1, z_2 \in \{0,1\}$
- Περιορισμός:
 - $z_1 + z_2 = 1$
- Κόστος:
 - $C = 5.000z_1 + 6.000z_2$
- Ποιότητα:
 - $80z_1 + 95z_2 \geq 85$
- Στόχος:
 - Min C
- Η λύση:
 - δεν είναι “ενδιάμεση” είναι διακριτή επιλογή



Λογικοί Περιορισμοί

- Οι δυαδικές μεταβλητές επιτρέπουν:
 - μοντελοποίηση λογικών σχέσεων
- Παράδειγμα:
 - “αν επιλεγεί A \rightarrow πρέπει να επιλεγεί B”
- Διατύπωση:
 - $z_A \leq z_B$
- Παράδειγμα:
 - “δεν μπορούν να επιλεγούν μαζί”
- Διατύπωση:
 - $z_A + z_B \leq 1$
- Η λογική:
 - μετατρέπεται σε μαθηματική μορφή



Παράδειγμα: Αρχιτεκτονική Συστήματος

- Επιλογές υποσυστημάτων:

- $z_1, z_2, z_3 \in \{0,1\}$

- Περιορισμοί:

- $z_1 + z_2 \geq 1$
- $z_2 + z_3 \leq 1$

- Κόστος:

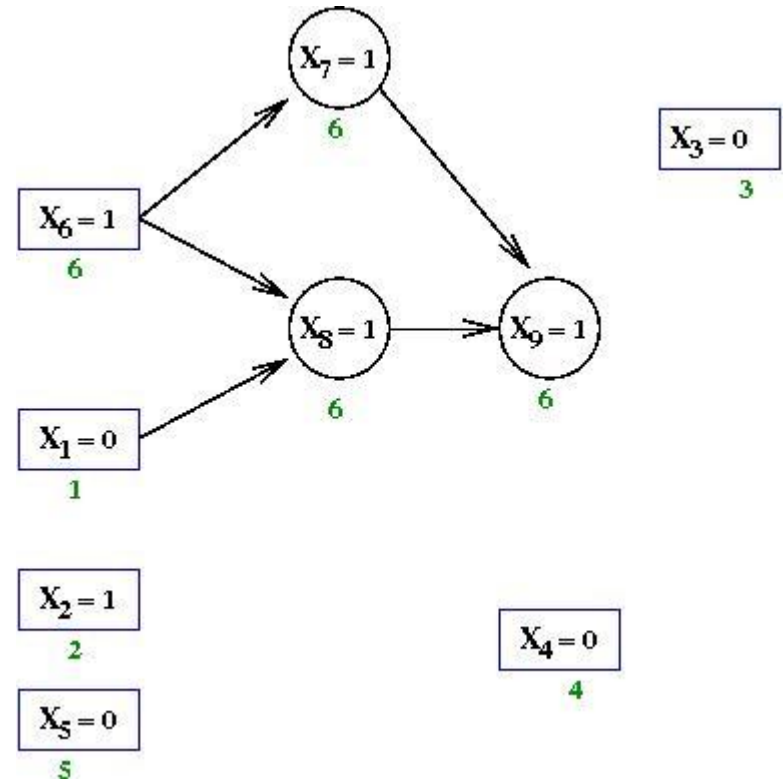
- $\sum c_i z_i \leq B$

- Το σύστημα:

- ορίζεται από σχέσεις εξάρτησης

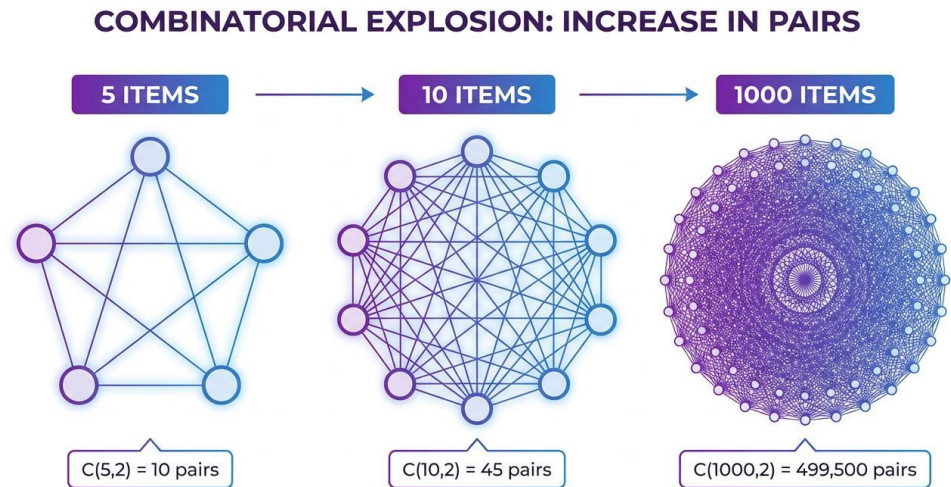
- Η δομή:

- δεν είναι γεωμετρική
- είναι λογική



Δυσκολία Επίλυσης

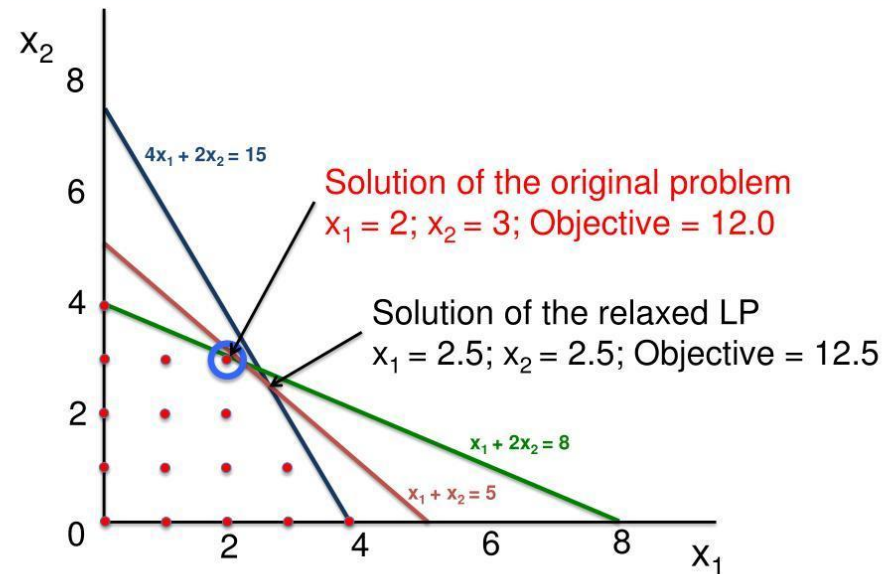
- Δεν μπορούμε:
 - να εξετάσουμε όλες τις λύσεις
- Για μεγάλο n :
 - 2^n γίνεται απαγορευτικό
- Η πολυπλοκότητα:
 - αυξάνεται εκθετικά
- Το πρόβλημα:
 - είναι υπολογιστικά δύσκολο
- Η μετάβαση:
 - από επιλύσιμα προβλήματα
 - σε προβλήματα περιορισμένης υπολογιστικής εφικτότητας



Ιδέα Χαλάρωσης (Relaxation)

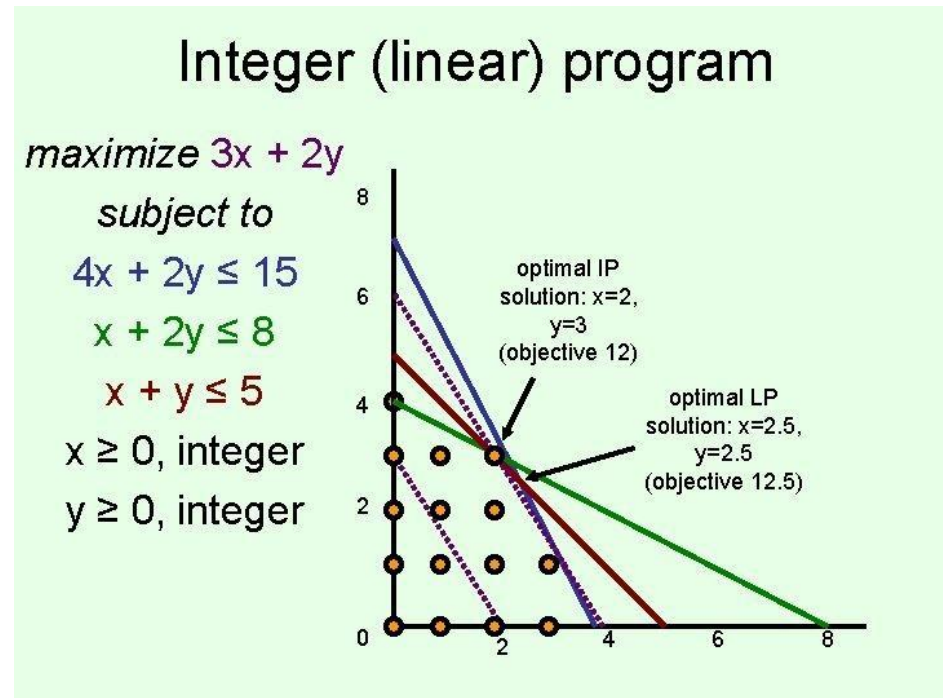
- Αν αφαιρέσουμε:
 - $z \in \{0,1\}$
- Τότε:
 - $z \in [0,1]$
- Προκύπτει:
 - γραμμικό πρόβλημα
- Η γεωμετρία:
 - επανεμφανίζεται
- Η λύση:
 - είναι ευκολότερη
 - αλλά όχι απαραίτητα υλοποιήσιμη

Solution of the integer problem



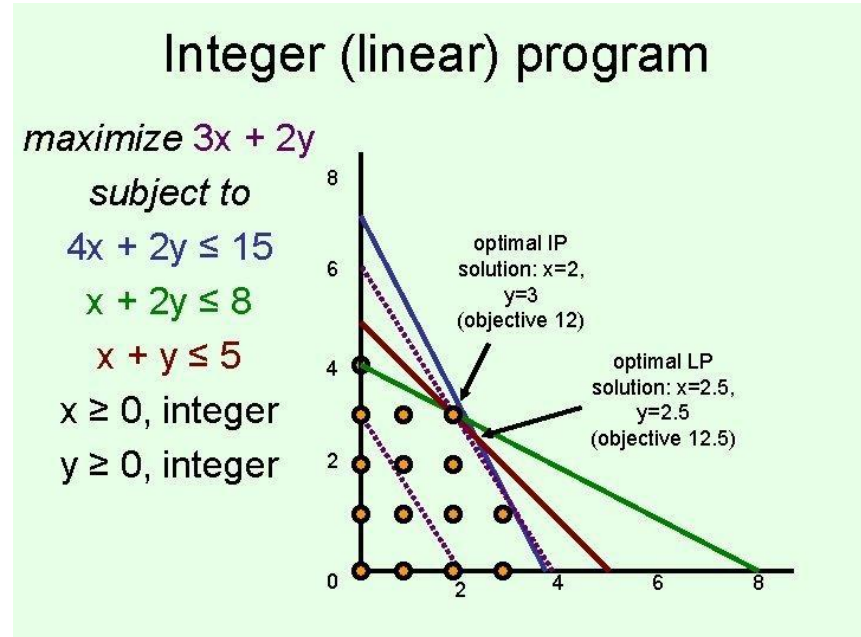
Σχέση Χαλάρωσης – Αρχικού Προβλήματος

- Το χαλαρωμένο πρόβλημα:
 - έχει μεγαλύτερο εφικτό σύνολο
- Συνεπώς:
 - $z_{\{LP\}} \geq z_{\{IP\}}$ (σε μεγιστοποίηση)
- Η λύση:
 - αποτελεί άνω φράγμα
- Η διαφορά:
 - εκφράζει την επίδραση της διακριτότητας



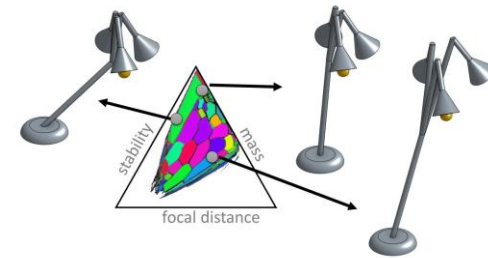
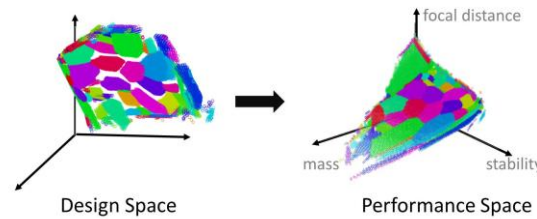
Παράδειγμα Χαλάρωσης

- Ακέραιο πρόβλημα:
 - $z \in \{0,1\}$
- Χαλαρωμένο:
 - $z \in [0,1]$
- Λύση:
 - $z = 0.6$
- Η λύση:
 - δεν είναι εφικτή στο αρχικό πρόβλημα
- Παρέχει όμως:
 - πληροφορία για το σύστημα



Ερμηνεία

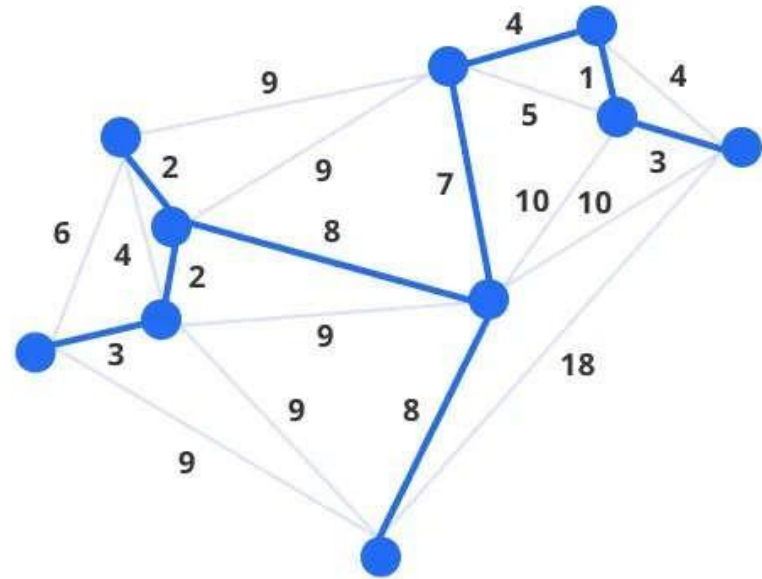
- Η χαλάρωση:
 - δεν δίνει τελική λύση
 - δίνει κατεύθυνση
- Η διακριτότητα:
 - εισάγει δυσκολία
 - αλλά εκφράζει ρεαλισμό
- Το μοντέλο:
 - γίνεται πιο πιστό
 - αλλά πιο δύσκολο στην επίλυση
- Η μετάβαση αυτή:
 - αποκαλύπτει τα όρια των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν μέχρι τώρα



Κεντρικό Μήνυμα

- Μέχρι τώρα:
- η βελτιστοποίηση ήταν γεωμετρική
- Από εδώ και πέρα:
- γίνεται συνδυαστική
- Η μετάβαση:
- από $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ ή $\{0,1\}$
- αλλάζει:
- τη δομή του εφικτού συνόλου
- τις μεθόδους επίλυσης
- την υπολογιστική δυσκολία

Combinatorial Optimization



Κεντρικό Μήνυμα

- Ο χώρος λύσεων:
 - δεν είναι συνεχής
 - είναι σύνολο διακριτών επιλογών
- Η βελτιστοποίηση:
 - δεν είναι πλέον αναζήτηση σε χώρο
 - αλλά επιλογή μεταξύ συνδυασμών
- Η διακριτότητα:
 - είναι απαραίτητη για τη μοντελοποίηση πραγματικών συστημάτων
 - και εισάγει την έννοια της υπολογιστικής δυσκολίας