

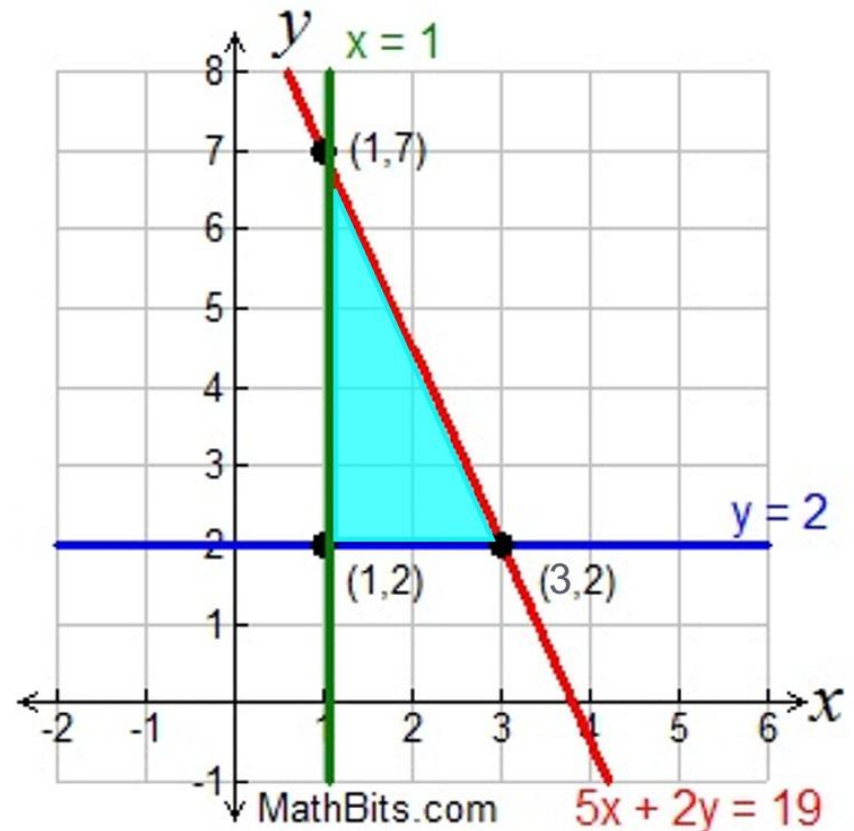
Διάλεξη 3 – Γραμμικός Προγραμματισμός: Εφαρμογές και Ερμηνεία

Γραμμικός Προγραμματισμός: Εφαρμογές και Ερμηνεία

- Η διαδικασία της βελτιστοποίησης δεν ολοκληρώνεται με τον υπολογισμό της λύσης.
- Η ουσία βρίσκεται στην κατανόηση του τι σημαίνει αυτή η λύση για το σύστημα.
- Η λύση είναι αποτέλεσμα της μαθηματικής δομής
- Η ερμηνεία αποκαλύπτει τους μηχανισμούς του προβλήματος
- Η σημερινή διάλεξη μετατοπίζει την έμφαση:
- από τον υπολογισμό \rightarrow στην κατανόηση.

Σύνδεση με Διάλεξη 2

- Στη Διάλεξη 2:
 - ορίσαμε το εφικτό σύνολο F
 - κατανοήσαμε τη γεωμετρική του μορφή
 - εντοπίσαμε τη βέλτιστη λύση σε κορυφή
- Όμως:
 - η λύση είναι μόνο ένα σημείο
 - το σύστημα περιέχει περισσότερη πληροφορία
- Το ερώτημα τώρα είναι:
 - Ποια στοιχεία του μοντέλου καθορίζουν τη λύση;
 - Ποιοι περιορισμοί είναι πραγματικά κρίσιμοι;



Από Λύση σε Απόφαση

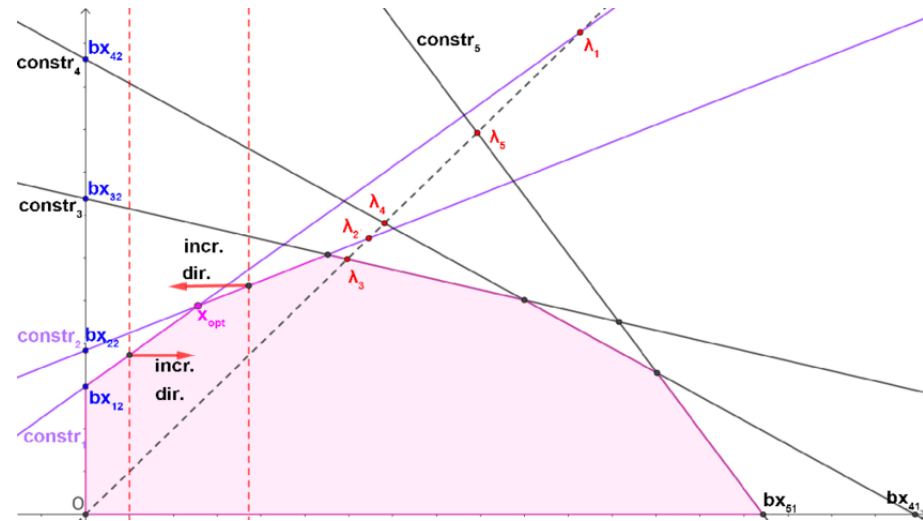
- Η λύση:
- (x^*, y^*)
- Δεν αποτελεί απλώς μαθηματικό αποτέλεσμα.
- αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη κατανομή πόρων
- εκφράζει μία επιλογή μεταξύ εναλλακτικών
- ενσωματώνει όλους τους περιορισμούς
- Η βελτιστοποίηση δεν παράγει αριθμούς.
- Παράγει αποφάσεις.

Παράδειγμα Product Mix

- $\text{Max } z = 40x_1 + 30x_2$
 - $2x_1 + x_2 \leq 100$
 - $x_1 + 2x_2 \leq 80$
 - $x_1, x_2 \geq 0$
-
- x_1, x_2 : ποσότητες προϊόντων
 - περιορισμοί: διαθέσιμοι πόροι
-
- Το μοντέλο περιγράφει ένα σύστημα παραγωγής.
 - Η λύση καθορίζει πώς χρησιμοποιούνται οι πόροι.

Ερμηνεία Λύσης

- Η λύση:
- (x_1^*, x_2^*)
- δείχνει ποια προϊόντα παράγονται και σε ποια ποσότητα
- καθορίζει ποιοι πόροι εξαντλούνται
- υποδηλώνει ποιες επιλογές απορρίπτονται
- Η λύση δεν είναι ουδέτερη.
- Είναι συγκεκριμένη στρατηγική λειτουργίας.



Έννοια Trade-off

- Η αύξηση ενός μεταβλητού:

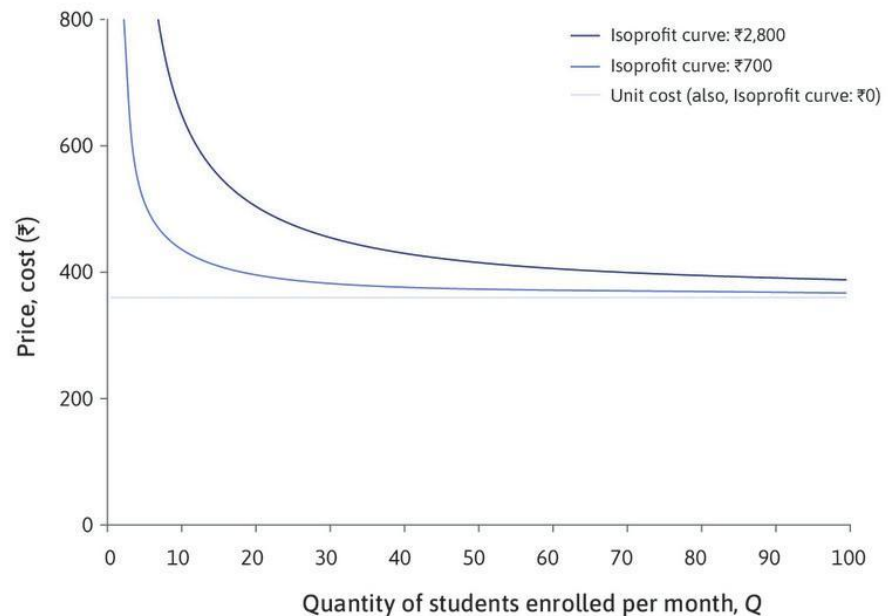
- αυξάνει το κέρδος
- αλλά καταναλώνει περισσότερους πόρους

- Παράδειγμα:

- αύξηση $x_1 \rightarrow$ λιγότερος διαθέσιμος πόρος για x_2

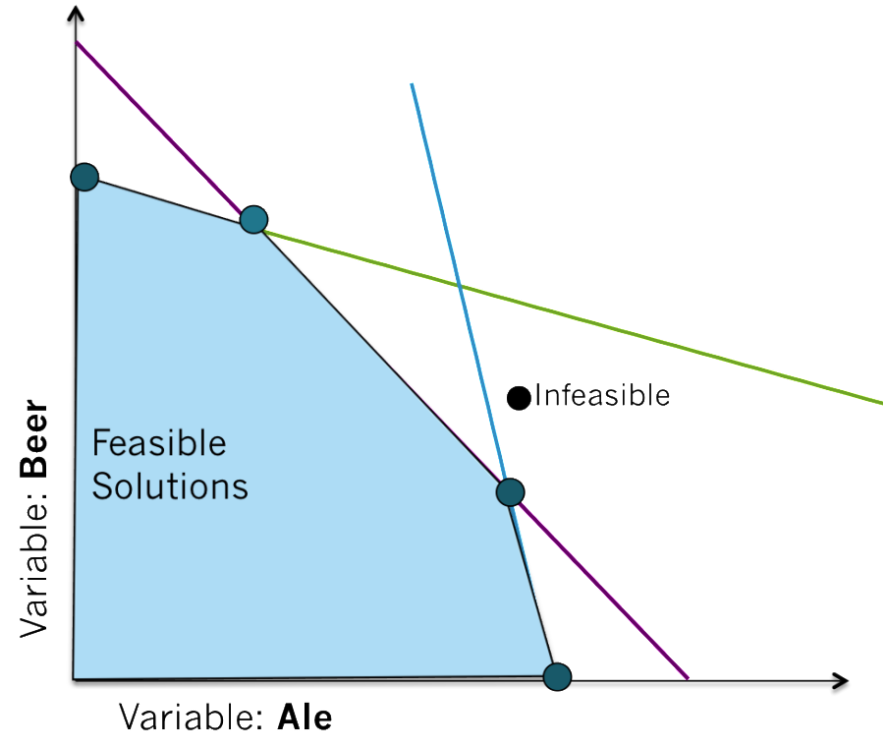
- Συνεπώς:

- οι αποφάσεις είναι αλληλεξαρτώμενες
- κάθε επιλογή συνεπάγεται απώλεια εναλλακτικών



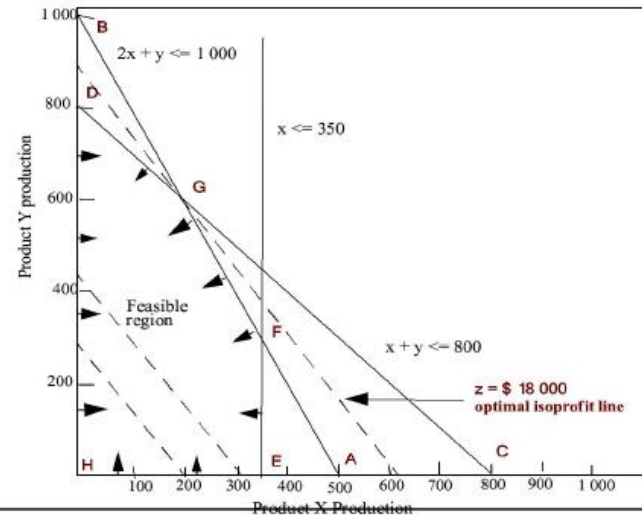
Περιορισμοί ως Δομή

- Οι περιορισμοί:
- $Ax \leq b$
- δεν είναι απλές τεχνικές συνθήκες
- αποτελούν τη δομή του συστήματος
- Καθορίζουν:
 - τι επιτρέπεται
 - τι αποκλείεται
 - πώς αλληλεπιδρούν οι μεταβλητές



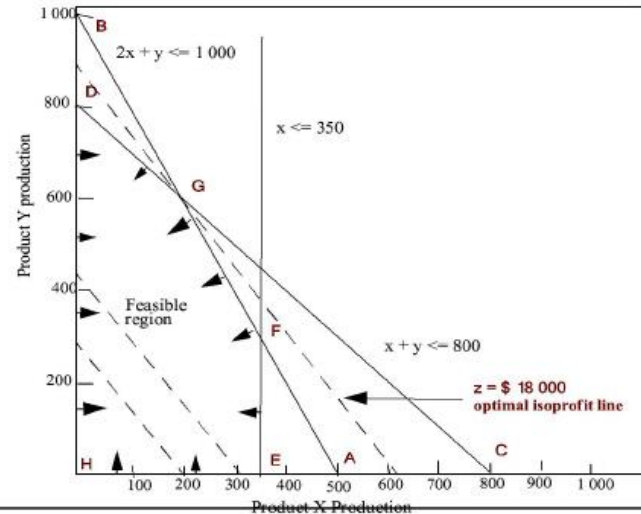
Ευαισθησία (Sensitivity)

- Έστω μεταβολή:
- $b_1 \rightarrow b_1 + \Delta$
- αλλάζει το εφικτό σύνολο
- μετατοπίζεται η περιοχή λύσεων
- Η βέλτιστη λύση δεν είναι σταθερή.
- Εξαρτάται από τις παραμέτρους του προβλήματος.



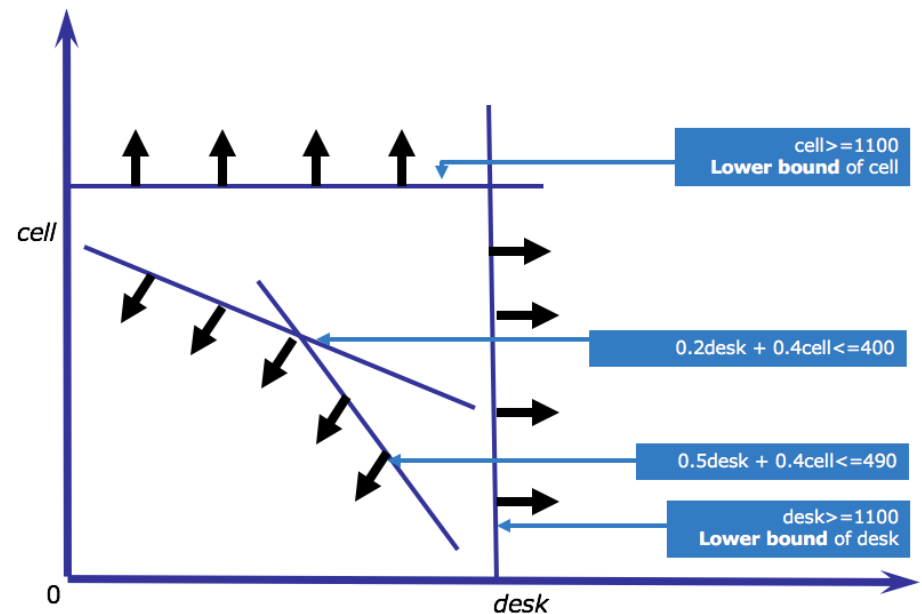
Παράδειγμα Μεταβολής

- Αν αυξηθεί ο πόρος:
- $2x_1 + x_2 \leq 100 \rightarrow 120$
- επιτρέπονται περισσότερες λύσεις
- επεκτείνεται το F
- Κρίσιμο ερώτημα:
 - αυξάνεται πάντα το z^* ;
 - ή υπάρχουν περιορισμοί που δεν επηρεάζουν;



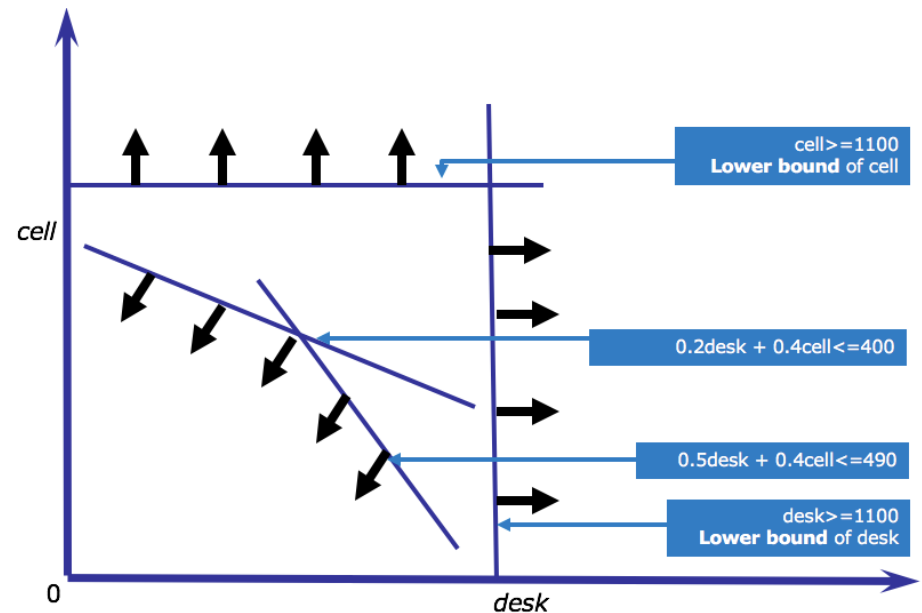
Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- Στη βέλτιστη λύση:
- $a_i x^* = b_i$
- ο περιορισμός “αγγίζει” τη λύση
- καθορίζει το όριο της απόφασης
- Ο περιορισμός είναι ενεργός.
- Χωρίς αυτόν, η λύση θα άλλαζε.



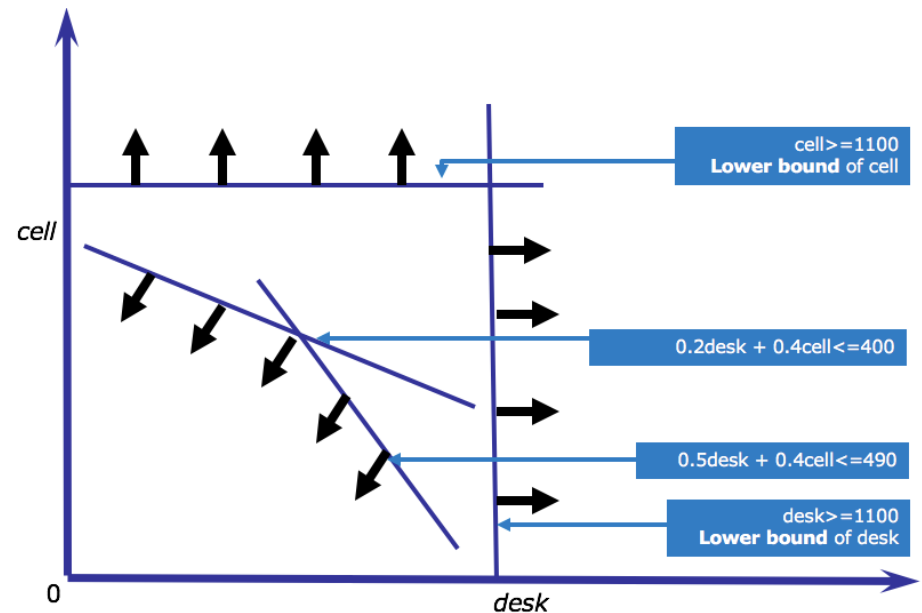
Μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- Αν:
- $a_i x^* < b_i$
- • υπάρχει περιθώριο πόρου
- • ο περιορισμός δεν επηρεάζει τη λύση
- Η παρουσία του δεν αλλάζει το αποτέλεσμα.



Κρίσιμη Διάκριση

- Οι περιορισμοί διακρίνονται σε:
 - δεσμευτικούς (binding)
 - μη δεσμευτικούς (non-binding)
- Μόνο οι πρώτοι:
 - επηρεάζουν τη θέση της λύσης
 - καθορίζουν τη γεωμετρία στο σημείο βελτιστοποίησης



Εισαγωγή στη Δυσικότητα

- Κάθε πρόβλημα:
- $\max c^T x, Ax \leq b$
- έχει αντίστοιχο:
- • δυϊκό πρόβλημα
- Η δυσικότητα δεν είναι τεχνική λεπτομέρεια.
- Είναι εναλλακτικός τρόπος ερμηνείας.

Διαισθητική Ερμηνεία

- Το αρχικό πρόβλημα:
- επιλέγει μεταβλητές (παραγωγή)
- Το δυϊκό:
- αποτιμά περιορισμούς (πόρους)
- Αντί να ρωτάμε “τι να κάνουμε”
- ρωτάμε “τι αξίζει κάθε περιορισμός”.

Δυϊκές Μεταβλητές

- Ορίζουμε:
- $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$
- μία για κάθε περιορισμό
- εκφράζουν οριακή αξία πόρου
- Δεν είναι φυσικές ποσότητες.
- Είναι τιμές.

Δυσικό Πρόβλημα

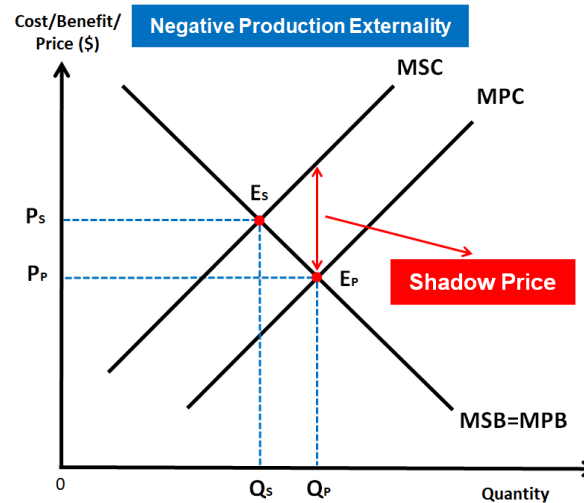
- $\text{Min } w = b_1y_1 + b_2y_2$
 - $2y_1 + y_2 \geq 40$
 - $y_1 + 2y_2 \geq 30$
 - $y_1, y_2 \geq 0$
-
- ελαχιστοποιεί το κόστος πόρων
 - διασφαλίζει επάρκεια παραγωγής

Οικονομική Ερμηνεία

- Οι μεταβλητές γ :
- εκφράζουν αξία πόρων
- δείχνουν πόσο “κοστίζει” ο περιορισμός
- Ονομάζονται shadow prices.

Shadow Price

- Αν:
- $b_1 \rightarrow b_1 + 1$
- τότε:
- $z^* \rightarrow z^* + \gamma_1$



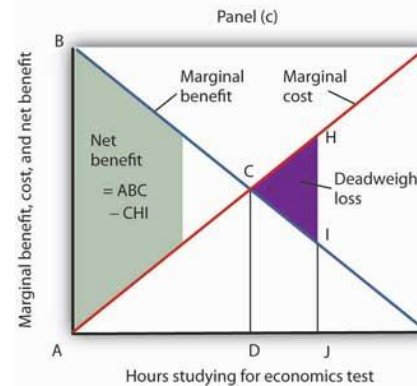
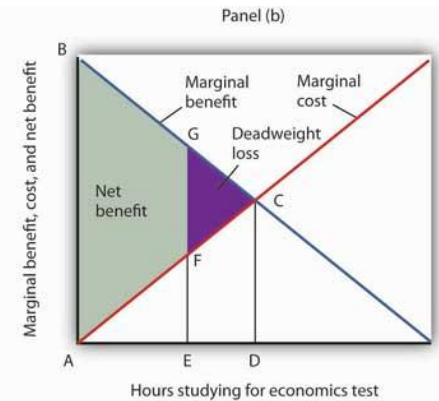
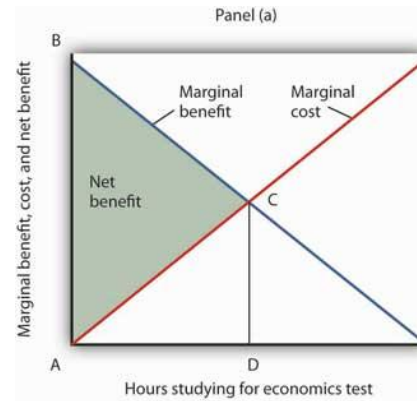
Key:

- MPC = Marginal Private Cost
 - MSC = Marginal Social Cost
 - MPB = Marginal Private Benefit
 - MSB = Marginal Social Benefit
 - E_P = Equilibrium for Profit Maximisation
 - E_S = Equilibrium for Maximum Social Welfare
 - Q_P = Profit Max. Output / Actual Output
 - Q_S = Socially Desirable Output
 - $Q_S Q_P$ = Over-production
- www.economicsonline.co.uk

- το γ_1 είναι οριακή αύξηση του στόχου
- δείχνει πόσο χρήσιμος είναι ο πόρος

Ερμηνεία Τιμών

- Αν $\gamma_i = 0 \rightarrow$ ο πόρος δεν περιορίζει το σύστημα
- Αν $\gamma_i > 0 \rightarrow$ ο πόρος είναι κρίσιμος
- Η δυϊκή τιμή αποκαλύπτει τη σημασία του περιορισμού.

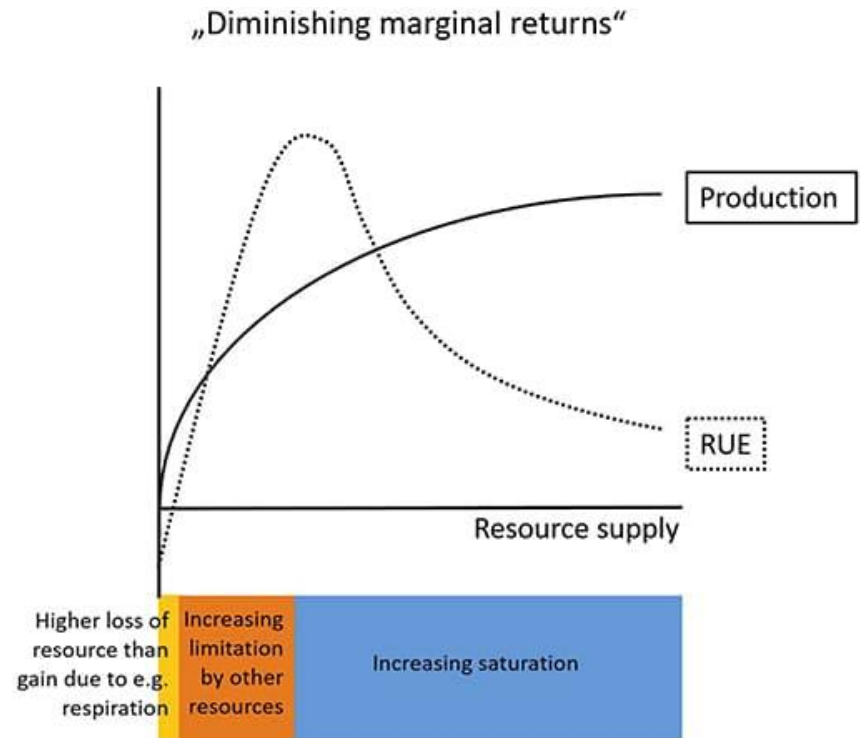


Ισότητα Πρωτεύοντος-Δυϊκού

- Στη βέλτιστη λύση:
- $z^* = w^*$
- ίδια αριθμητική τιμή
- διαφορετική ερμηνεία
- Παραγωγή και πόροι ισορροπούν.

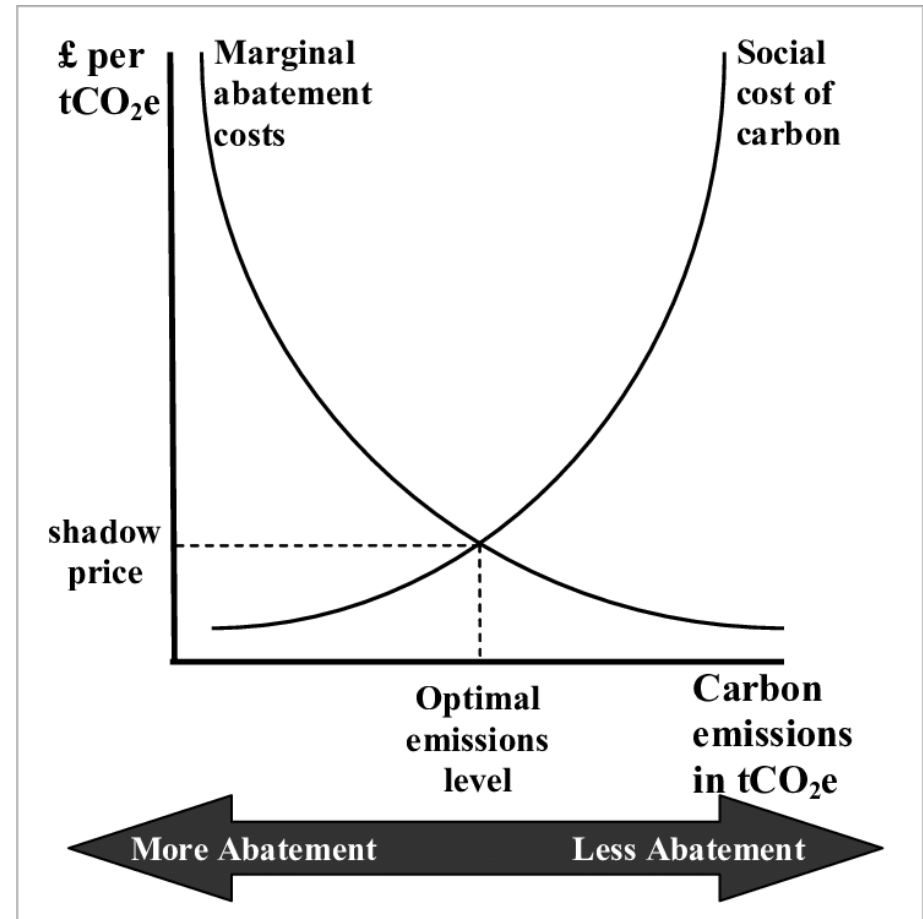
Συμπληρωματική Χαλαρότητα

- $\gamma_i (b_i - a_i x^*) = 0$
- αν υπάρχει πλεόνασμα
→ $\gamma_i = 0$
- αν ο περιορισμός είναι ενεργός → μπορεί $\gamma_i > 0$
- Συνδέει άμεσα τα δύο προβλήματα.



Σχεδιαστική Ερμηνεία

- Η δυϊκότητα δείχνει ότι:
 - οι περιορισμοί έχουν οικονομική αξία
 - οι πόροι δεν είναι ουδέτεροι
- Η βελτιστοποίηση αποκαλύπτει:
 - ποιοι περιορισμοί είναι σημαντικοί
 - ποιοι είναι αδιάφοροι



Σφάλμα 1

- Θεωρούμε τη λύση απόλυτη.
- Η λύση (x_1^*, x_2^*) είναι βέλτιστη μόνο για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων
- Αν μεταβληθούν οι περιορισμοί: $b \rightarrow b + \Delta$, το εφικτό σύνολο αλλάζει και η λύση μπορεί να μετακινηθεί
- Συνεπώς:
- η βελτιστοποίηση δίνει λύση υπό συνθήκες
- όχι καθολική ή διαχρονική απάντηση

Σφάλμα 2

- Αγνοούμε τους περιορισμούς.
- Οι περιορισμοί $Ax \leq b$:
 - καθορίζουν ποια λύση είναι εφικτή
 - επηρεάζουν άμεσα τη θέση της βέλτιστης λύσης
- Αν δεν εξετάσουμε:
 - ποιοι είναι δεσμευτικοί
 - ποιοι έχουν πλεόνασμα
- τότε δεν γνωρίζουμε τι πραγματικά περιορίζει το σύστημα.

Σφάλμα 3

- Λανθασμένος στόχος:
- $\max c^T x$
- εκφράζει τι θεωρούμε “καλύτερο”
- Αν αλλάξει: $c \rightarrow c'$
- αλλάζει η κατεύθυνση βελτιστοποίησης
- προκύπτει διαφορετική λύση
- Συνεπώς:
 - η μέθοδος βρίσκει σωστά το μέγιστο
 - αλλά αυτό μπορεί να μην αντιστοιχεί στο πραγματικό ζητούμενο

Κεντρικό Μήνυμα

- $\max c^T x$
- $Ax \leq b$
- και
- $\min b^T y$
- $A^T y \geq c$
- δύο ισοδύναμες προσεγγίσεις
- Η βελτιστοποίηση:
 - βρίσκει λύση
 - αποκαλύπτει δομή
 - αποτιμά περιορισμούς