Διάλεξη 2

Γραμμικός Προγραμματισμός: Γεωμετρία και Εφικτός Χώρος

Γραμμικός Προγραμματισμός: Γεωμετρία και Εφικτός Χώρος

- Η μαθηματική διατύπωση ενός προβλήματος σχεδίασης δεν αποτελεί μόνο σύνολο εξισώσεων.
- Αποτελεί πλήρη περιγραφή ενός χώρου δυνατών αποφάσεων.

- Η βελτιστοποίηση δεν είναι απλός υπολογισμός
- Είναι εντοπισμός του καλύτερου σημείου μέσα σε έναν αυστηρά ορισμένο χώρο

- Η κατανόηση του χώρου αυτού είναι απαραίτητη πριν από οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης.

Σύνδεση με Διάλεξη 1

- Στην προηγούμενη διάλεξη ορίσαμε τη βασική δομή ενός προβλήματος:

- μεταβλητές απόφασης
- περιορισμούς
- συνάρτηση στόχου

- Max / Min $c_1x_1 + c_2x_2$
- υπό τους περιορισμούς:
- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$
- $x_1, x_2 \ge 0$

- Το μοντέλο είναι πλήρες από πλευράς διατύπωσης
- Δεν είναι ακόμη πλήρες από πλευράς κατανόησης

- Η σημερινή διάλεξη μετατρέπει τη δομή σε γεωμετρική μορφή.

Το Κεντρικό Αντικείμενο

- Το πρόβλημα δεν είναι η εύρεση ενός αριθμού.

• Το ζητούμενο είναι η κατανόηση του συνόλου:

- $F = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :$ όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται $\}$

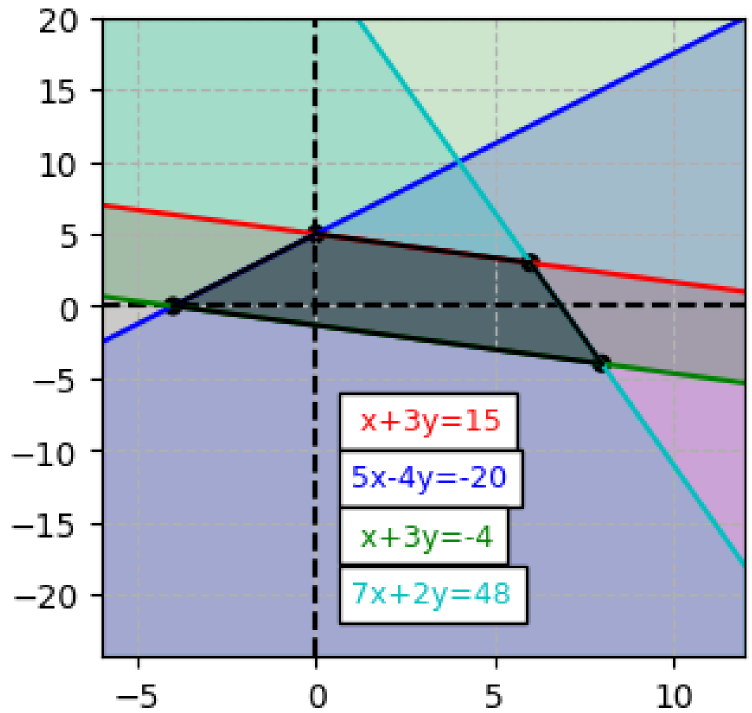
• Το σύνολο F περιέχει όλες τις εφικτές λύσεις

• Η βελτιστοποίηση περιορίζεται αποκλειστικά σε αυτό

- Το κρίσιμο ερώτημα:

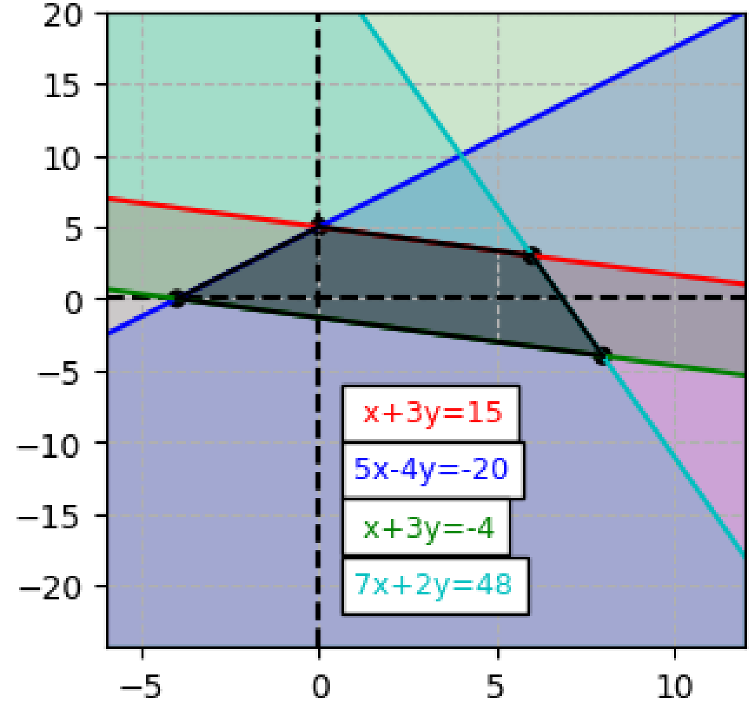
• Πώς περιγράφεται το F;

• Ποια είναι η μορφή του;



Παράδειγμα Μοντέλου

- Max z = 30x + 20y
- 2x + y ≤ 100
- x + y ≤ 80
- x ≥ 0, y ≥ 0



- Οι μεταβλητές εκφράζουν ποσότητες παραγωγής
- Οι περιορισμοί εκφράζουν διαθέσιμους πόρους

- Το ερώτημα δεν είναι ακόμη η λύση.
- Το ερώτημα είναι η γεωμετρική ερμηνεία.

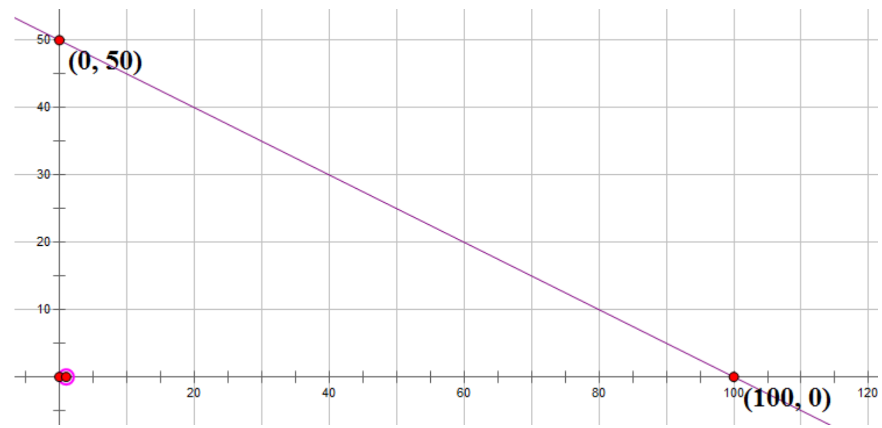
Εξίσωση ως Σύνολο

- $2x + y = 100$

- $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 100 \}$

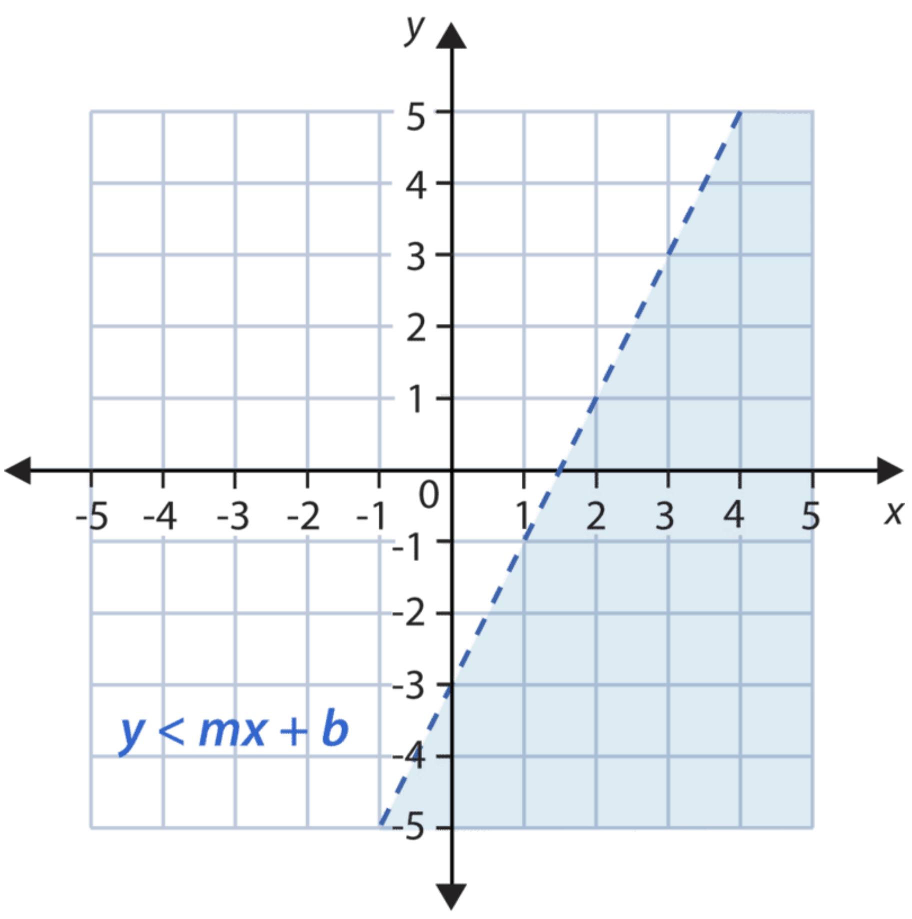
- Δεν πρόκειται για μία λύση
- Πρόκειται για σημεία

- Όλα τα σημεία αυτά:
- ικανοποιούν ακριβώς τον περιορισμό
- σχηματίζουν ευθεία στο επίπεδο



Ανισότητα ως Περιοχή

- $2x + y \leq 100$
- $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \leq 100 \}$
- • Η ευθεία αποτελεί το όριο
- • Όλα τα σημεία κάτω από αυτή είναι εφικτά
- Συνεπώς:
- • ο περιορισμός δημιουργεί ημιεπίπεδο
- • αποκλείει όλα τα σημεία που τον παραβιάζουν



Έννοια Περιορισμού

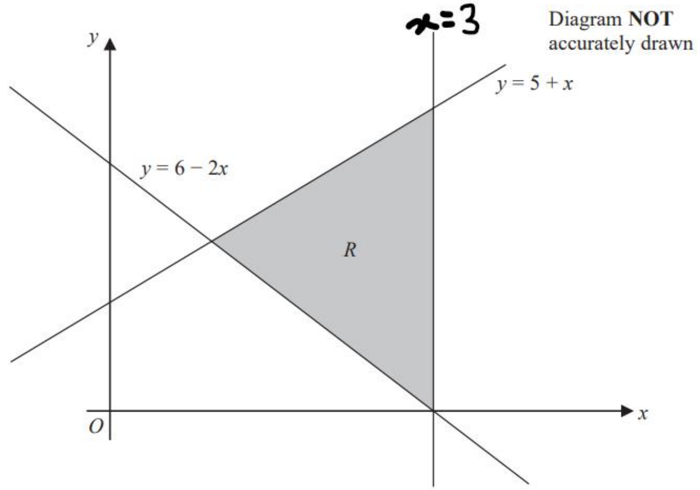
- Κάθε περιορισμός:

• δεν δημιουργεί επιλογές
• αφαιρεί επιλογές

- Η δομή του προβλήματος βασίζεται σε αποκλεισμούς.

- Συνεπώς:

• το σύνολο λύσεων προκύπτει μέσω περιορισμού
• όχι μέσω κατασκευής



The diagram shows the shaded region R, which is bounded by three straight lines, one of which is parallel to the y-axis.
One vertex of R lies on the x-axis.

Find three inequalities that define R.

Πολλαπλοί Περιορισμοί

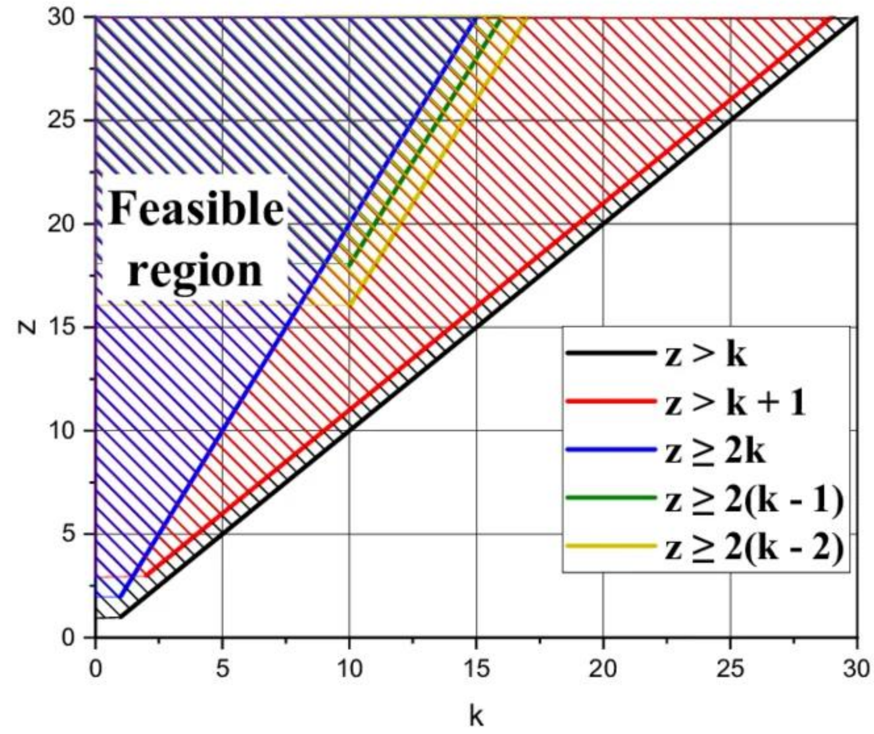
- $2x + y \leq 100$
- $x + y \leq 80$

- $F = F_1 \cap F_2$

• τομή ημιεπιπέδων
• μόνο τα κοινά σημεία παραμένουν

- Κάθε νέος περιορισμός:

• μειώνει το F
• αυξάνει τη δομική αυστηρότητα

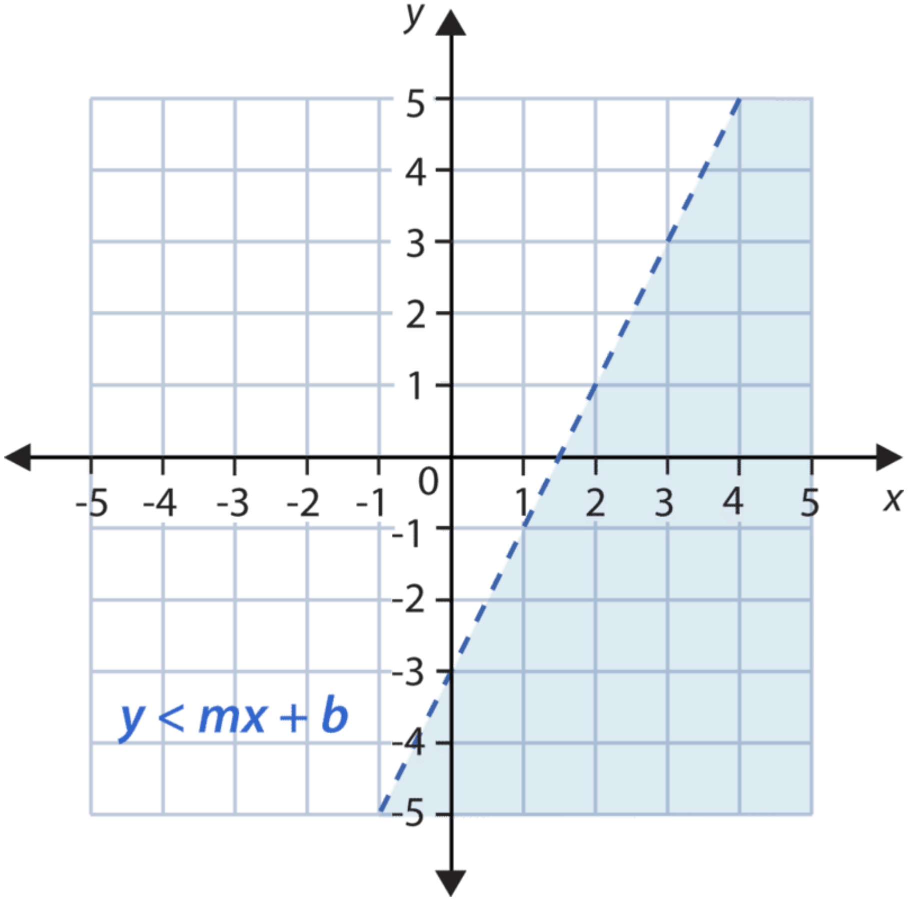


Μη Αρνητικότητα

- $x \geq 0, y \geq 0$

- φυσική ερμηνεία των μεταβλητών
- αποκλεισμό μη ρεαλιστικών λύσεων

- Γεωμετρικά:
- περιορισμός στο πρώτο τεταρτημόριο

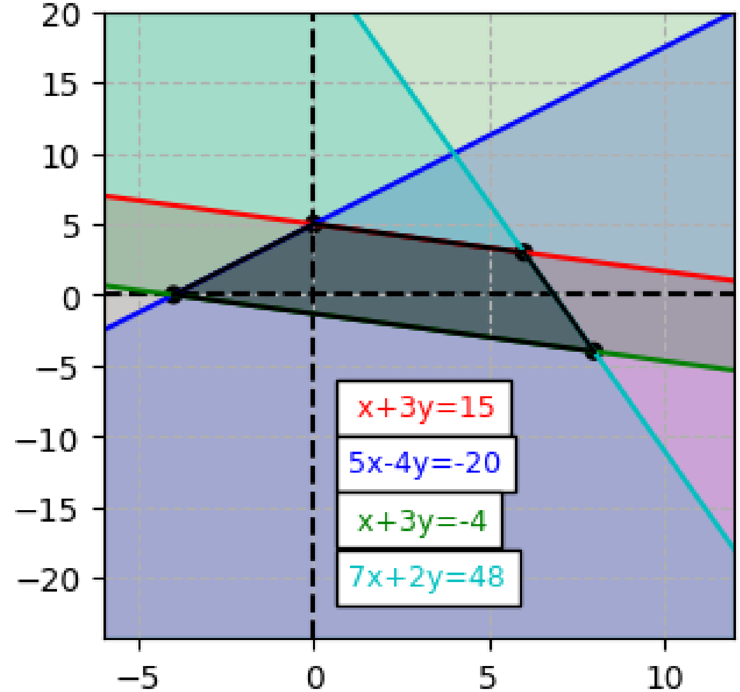


Ορισμός Εφικτού Συνόλου

- F = { (x,y) :
- 2x + y ≤ 100
- x + y ≤ 80
- x ≥ 0, y ≥ 0 }

- • Το F είναι πλήρως καθορισμένο
- • Δεν υπάρχουν ασάφειες

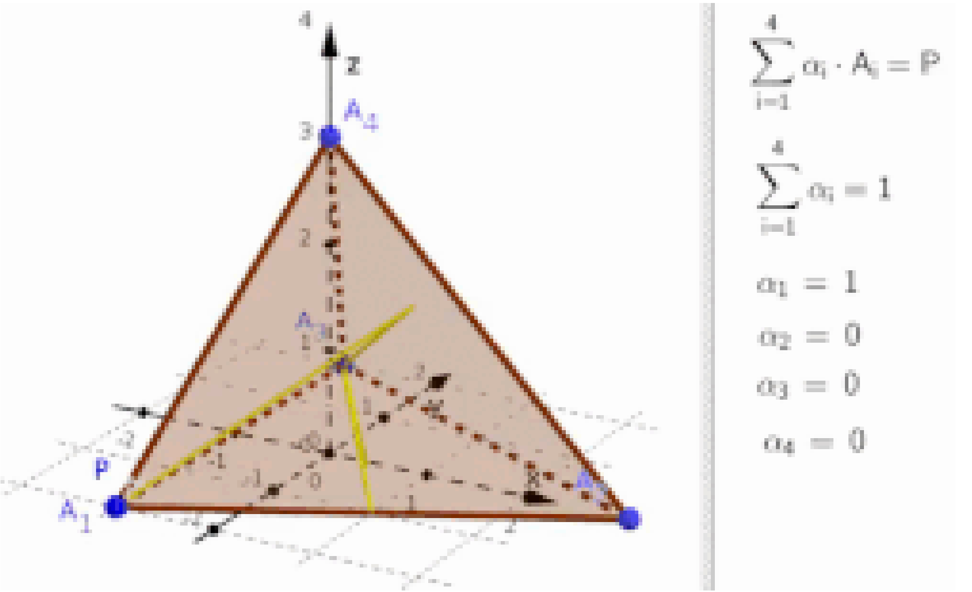
- Η βελτιστοποίηση θα γίνει αποκλειστικά εντός του F.



Κυρτότητα

- $\lambda A + (1-\lambda)B \in F$, για $0 \leq \lambda \leq 1$

- Το σύνολο είναι κυρτό
- κάθε ενδιάμεση λύση είναι επίσης εφικτή



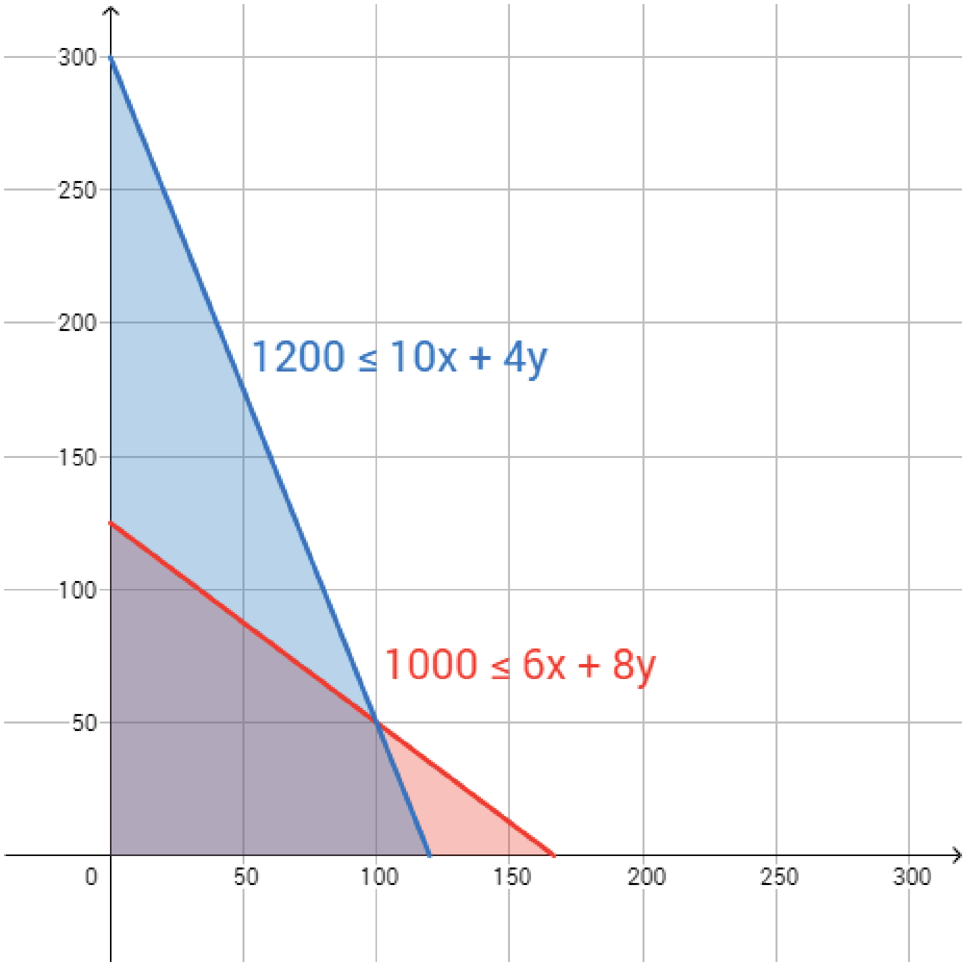
- Η κυρτότητα είναι θεμελιώδης ιδιότητα.

Γεωμετρική Μορφή

- Το σύνολο F:

- είναι πολύγωνο
- ορίζεται από ευθείες
- έχει πεπερασμένο αριθμό κορυφών

- Το σύνολο όλων των λύσεων έχει σαφή γεωμετρική μορφή.



Ερμηνεία Σημείων

- $(x,y) \in F$

- πλήρη απόφαση
- συγκεκριμένη κατανομή πόρων

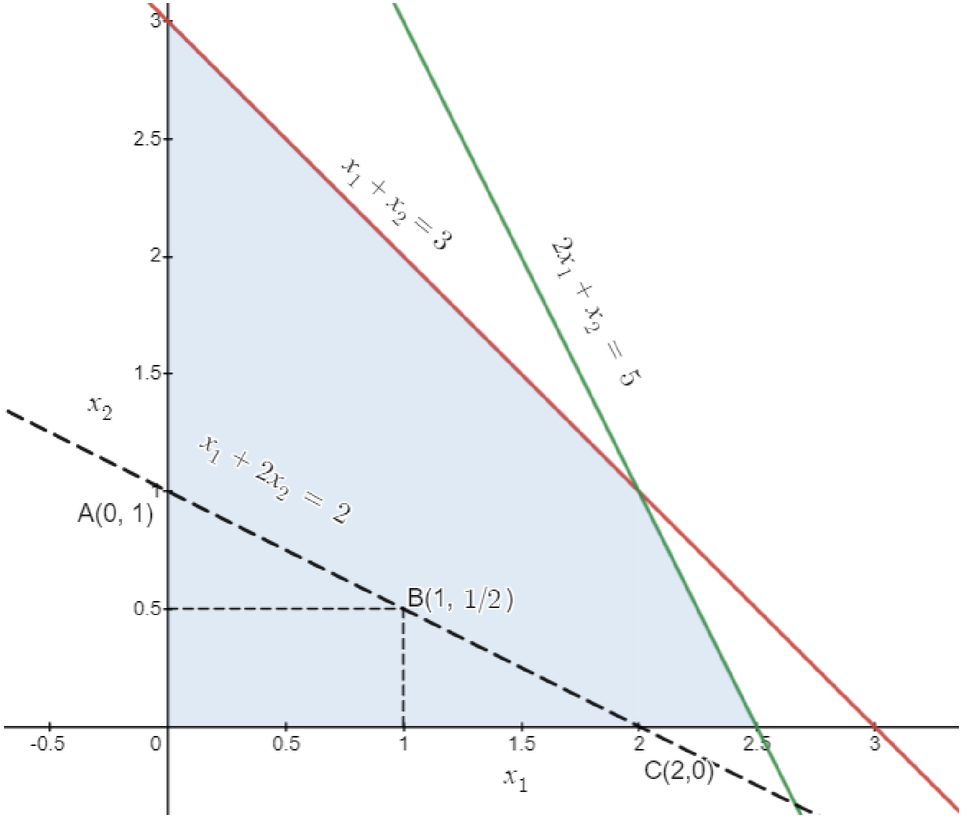
- Το πρόβλημα έχει άπειρες εφικτές λύσεις.
- Η βελτιστοποίηση επιλέγει μία.

Συνάρτηση Στόχου

- Max z = 30x + 20y

- • αντιστοιχεί αριθμητική τιμή σε κάθε λύση
- • δημιουργεί διάταξη στο F

- Η έννοια του “καλύτερου” εισάγεται μέσω του z.

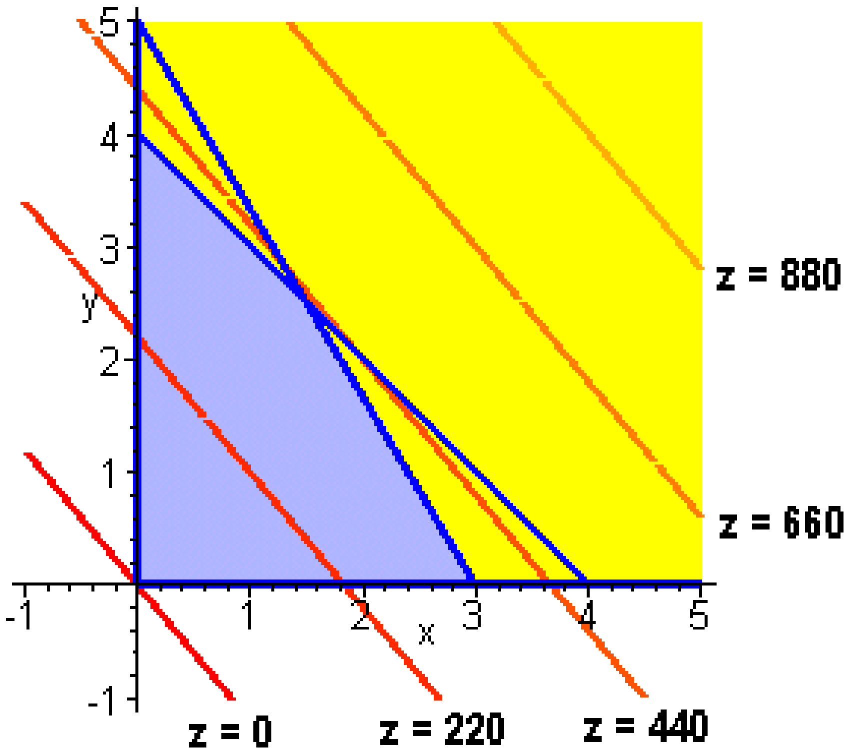


Γραμμές Ίσης Τιμής

- $30x + 20y = k$

- ευθείες ίσης απόδοσης
- παράλληλες μεταξύ τους

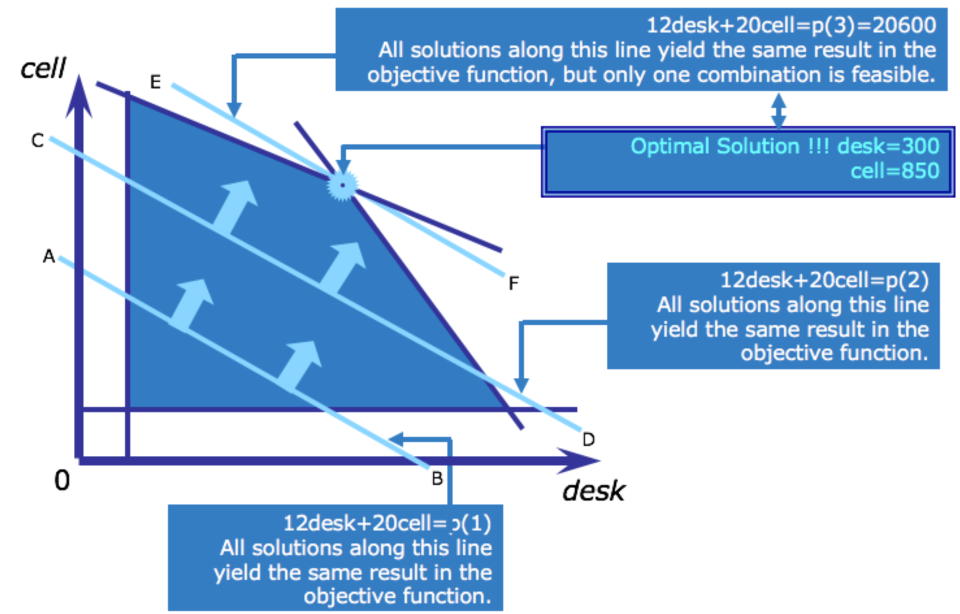
- Κάθε τιμή k αντιστοιχεί σε επίπεδο απόδοσης.



Κατεύθυνση Βελτιστοποίησης

- Καθώς αυξάνεται το k:

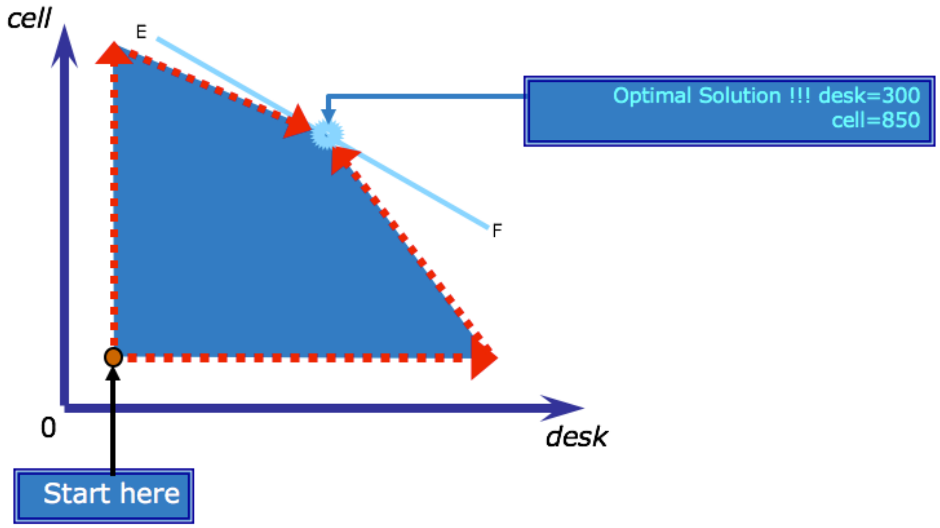
- η ευθεία μετακινείται
- αναζητούμε τη μέγιστη τιμή



- max z(x,y), (x,y) ∈ F

Βέλτιστη Λύση

- $(x^*,y^*) \in F$
- $z(x^*,y^*) \geq z(x,y),$
  $\forall (x,y) \in F$



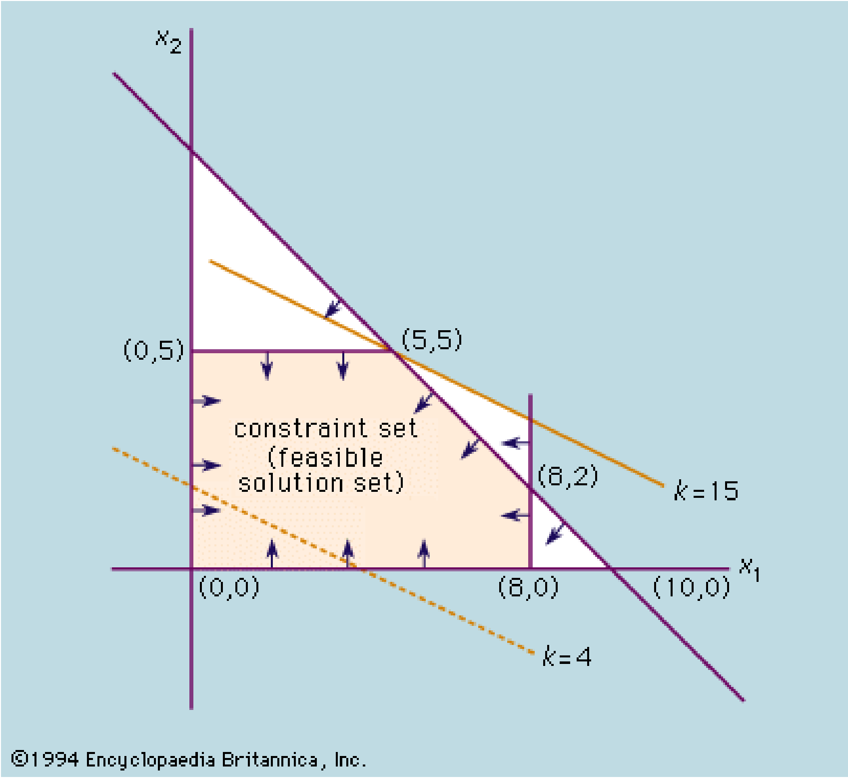
- είναι η καλύτερη εφικτή
- δεν υπάρχει καλύτερη
εντός του F

Κορυφές

- Ax = b

- τομές περιορισμών
- ακραία σημεία

- Το πλήθος τους είναι πεπερασμένο.

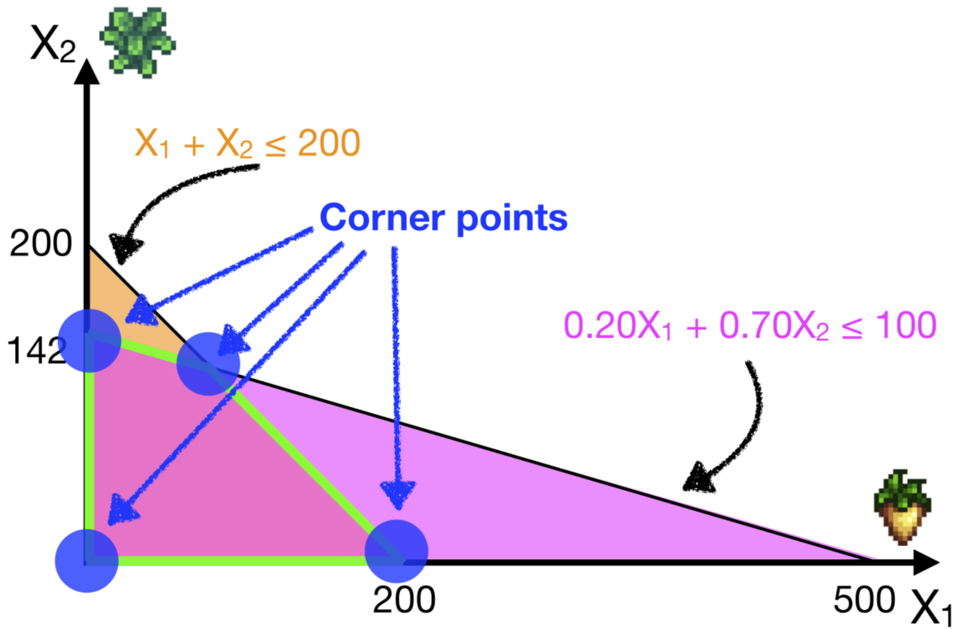


Θεμελιώδες Αποτέλεσμα

- Σε γραμμικά προβλήματα:

- αν υπάρχει βέλτιστη λύση
- τότε βρίσκεται σε κορυφή

- Η αναζήτηση περιορίζεται σε πεπερασμένο σύνολο σημείων.



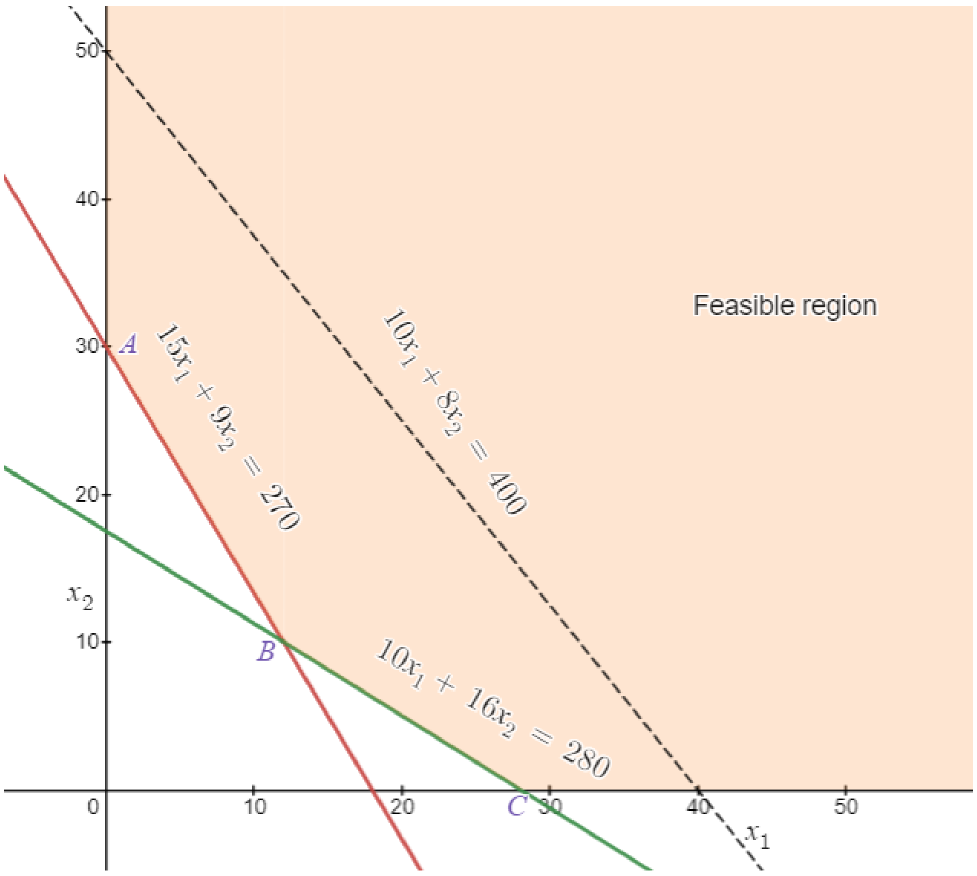
Υπολογισμός Κορυφών

- 2x + y = 100
- x + y = 80

- και οριακές περιπτώσεις:

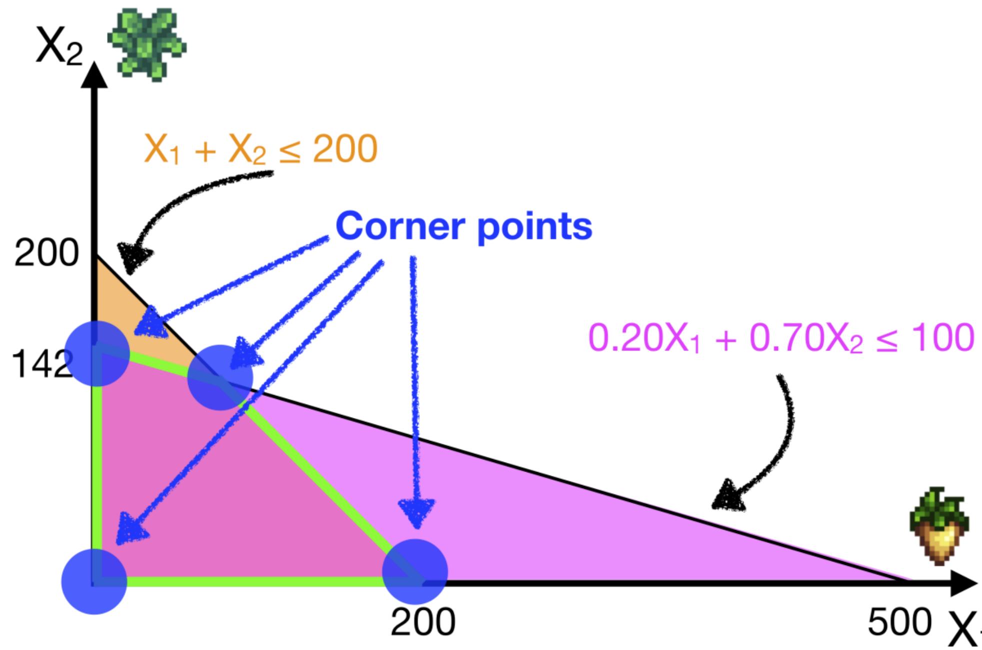
- x = 0
- y = 0

- Παίρνουμε όλες τις υποψήφιες λύσεις.



Αξιολόγηση

- $z = 30x + 20y$

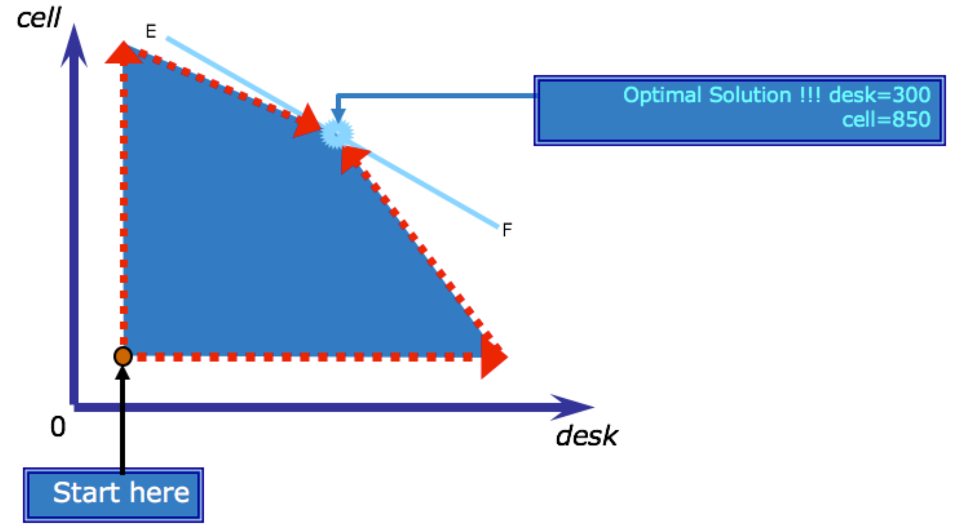


- υπολογισμός σε κάθε κορυφή
- σύγκριση τιμών

- Επιλέγουμε τη μέγιστη.
- Η διαδικασία είναι συστηματική.

Ερμηνεία Βέλτιστης Λύσης

- (20,60)

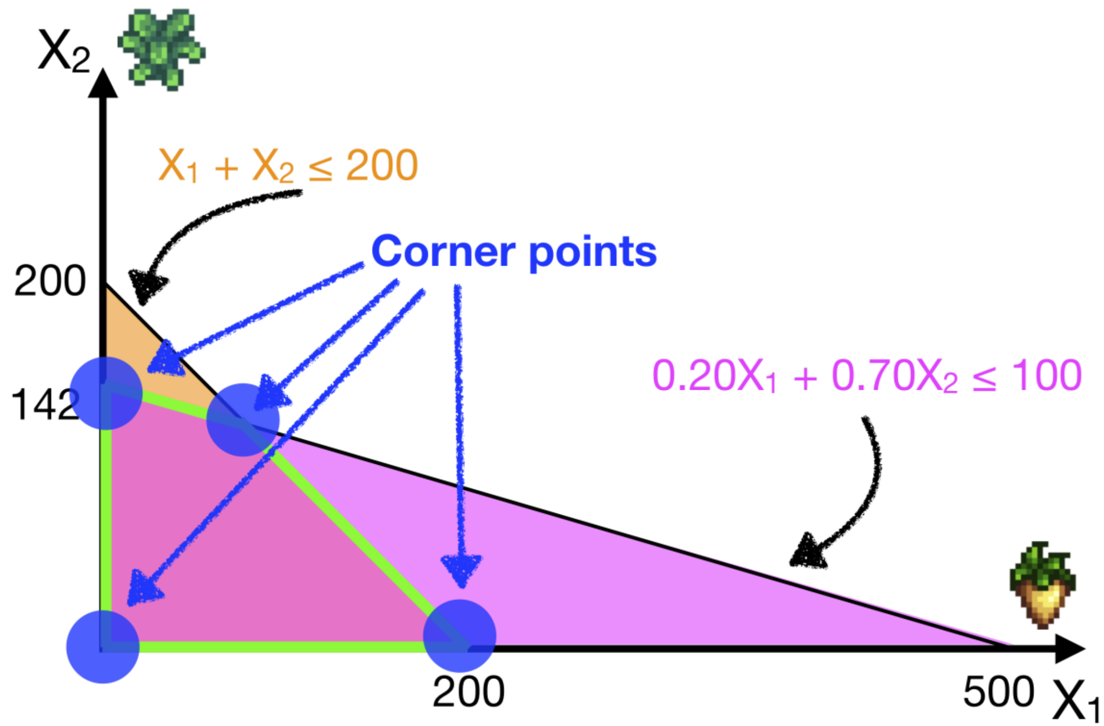


- ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς
- μεγιστοποιεί το z

- Αποτελεί συγκεκριμένη επιλογή.

Εσωτερικά Σημεία

- $(x,y) \in \text{int}(F)$
- $z(x+d) > z(x)$
- δεν μπορεί να είναι βέλτιστο
- υπάρχει περιθώριο βελτίωσης



Κεντρικό Μήνυμα

- max $c^T x$, $x \in F$
- $F = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$

- ορίζει χώρο λύσεων
- επιλέγει βέλτιστο σημείο

- Η βελτιστοποίηση είναι γεωμετρική διαδικασία.
- Η ποιότητα της λύσης εξαρτάται από τη δομή του μοντέλου.