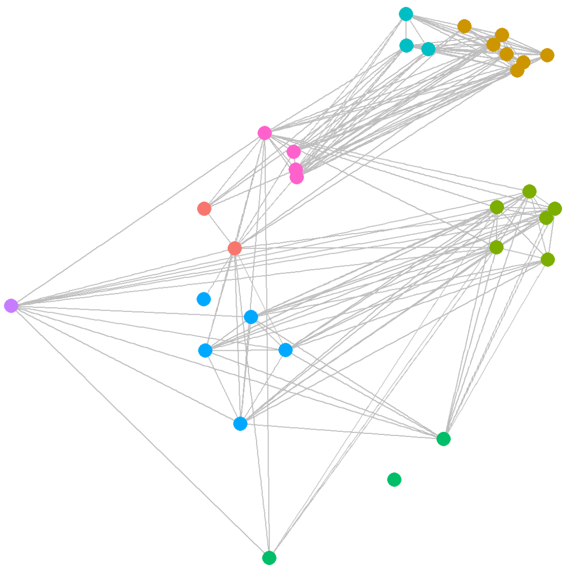
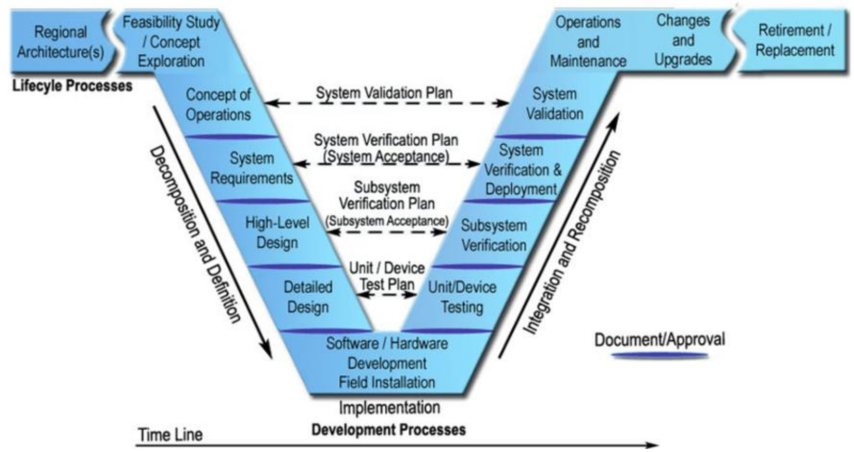
1. Διακριτά Μαθηματικά για Μηχανικούς Σχεδίασης

- Διάλεξη 1 – Δομή, Περιορισμοί και Εφικτός Χώρος
  - Έμφαση στη μαθηματική σαφήνεια και την ευθύνη της μοντελοποίησης.



2. Τι Είναι Αυτό το Μάθημα;

- Το μάθημα αφορά:
- Τη μαθηματική δομή αποφάσεων
- Την έννοια του περιορισμού
- Τη διατύπωση εφικτού χώρου
- Τη βελτιστοποίηση υπό συνθήκες
- Δεν είναι μάθημα αποδείξεων. Είναι μάθημα δομημένης σκέψης για μηχανικούς σχεδίασης.



3. Δομή Εξαμήνου – 13 Διαλέξεις

1. Μοντελοποίηση και εφικτός χώρος
2. Γραμμικός προγραμματισμός – γεωμετρική διαίσθηση
3. Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών προβλημάτων
4. Ακέραιος και δυαδικός προγραμματισμός
5. Λογικοί περιορισμοί και αρχιτεκτονική συστημάτων
6. Γραφήματα και αναπαράσταση δικτύων
7. Συντομότερη διαδρομή και ροές
8. Ελάχιστα δέντρα κάλυψης
9. Συνδυαστική και πολυπλοκότητα
10. Εκρηκτική αύξηση χώρου λύσεων
11. Εισαγωγή σε ευρετικές μεθόδους
12. Πολλαπλά κριτήρια και trade-offs
13. Ανακεφαλαίωση – μοντελοποίηση πραγματικού συστήματος

- Το μάθημα προχωρά από δομή → μέθοδο → εφαρμογή.

Τι θα μάθουν οι φοιτητές σε αυτό το μάθημα

- **Μετά το τέλος του μαθήματος οι φοιτητές θα μπορούν να:**
- Μετατρέπουν πραγματικά προβλήματα σε **δομημένα μαθηματικά μοντέλα**
- Ορίζουν σωστά:
  - Μεταβλητές απόφασης
  - Περιορισμούς
  - Αντικειμενική συνάρτηση
- Κατανοούν τι σημαίνει **βελτιστοποίηση**
- Αναλύουν προβλήματα κατανομής πόρων
- Μοντελοποιούν δίκτυα (δρομολόγηση, ροές, συνδέσεις)
- Λαμβάνουν αποφάσεις υπό αβεβαιότητα
- Αξιολογούν εναλλακτικές με πολλαπλά κριτήρια

Οι φοιτητές θα αναπτύξουν:

Δομημένη σκέψη
- Πώς να “σπάνε” ένα σύνθετο πρόβλημα σε στοιχεία

Κατανόηση συμβιβασμών (trade-offs)
- Κόστος vs Ποιότητα
- Απόδοση vs Βιωσιμότητα
- Ταχύτητα vs Ακρίβεια

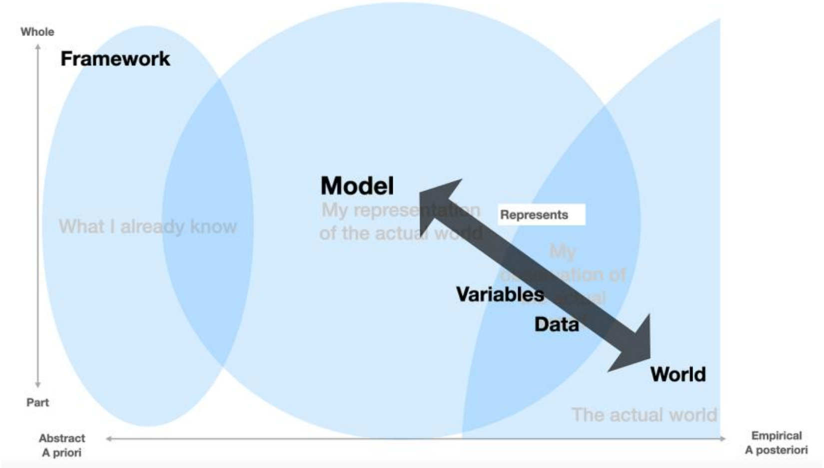
Ποσοτική τεκμηρίωση αποφάσεων
- Από το «νομίζω» → στο «τεκμηριώνω»

Κατανόηση πολυπλοκότητας
- Γιατί κάποια προβλήματα είναι εύκολα
- Γιατί κάποια είναι υπολογιστικά δύσκολα
- Πότε χρειάζονται ευρετικές μέθοδοι

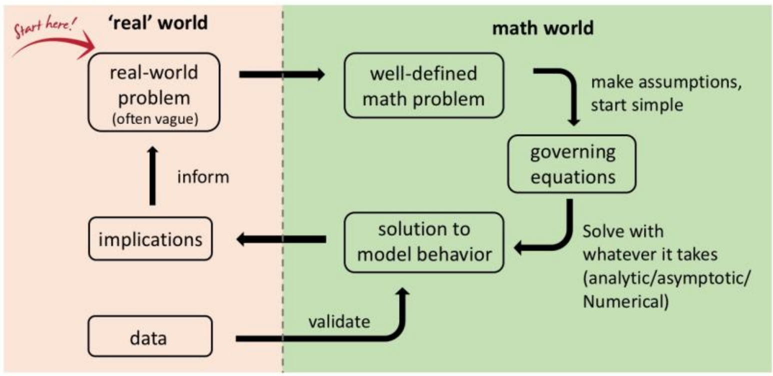
Κεντρικό μήνυμα του μαθήματος:
- Κάθε απόφαση έχει δομή.
  Οι περιορισμοί δεν περιορίζουν τη δημιουργικότητα —
  τη διαμορφώνουν.

4. Το Μάθημα ως Μεθοδολογία Σκέψης

- Το μάθημα αφορά τη μετατροπή ενός προβλήματος σχεδίασης σε μαθηματική δομή.
  - Δεν ξεκινάμε από υπολογισμούς αλλά από εννοιολογική αποσαφήνιση.
  - Τι ακριβώς αποφασίζουμε;
  - Ποια είναι τα πραγματικά όρια;
  - Τι σημαίνει «καλύτερη» λύση;
  - Η βελτιστοποίηση είναι αποτέλεσμα σωστής δομής.



Typical mathematical modeling process



5. Παράδειγμα Σχεδίασης

σχεδιάζουμε modular γραφείο.

Μεταβλητές:

- x_1 = αριθμός γραφείων τύπου Α
  x_2 = αριθμός γραφείων τύπου Β

Περιορισμός κόστους:

- $200x_1 + 150x_2 \leq 10.000$

Περιορισμός βάρους:

- $40x_1 + 30x_2 \leq 2.000$

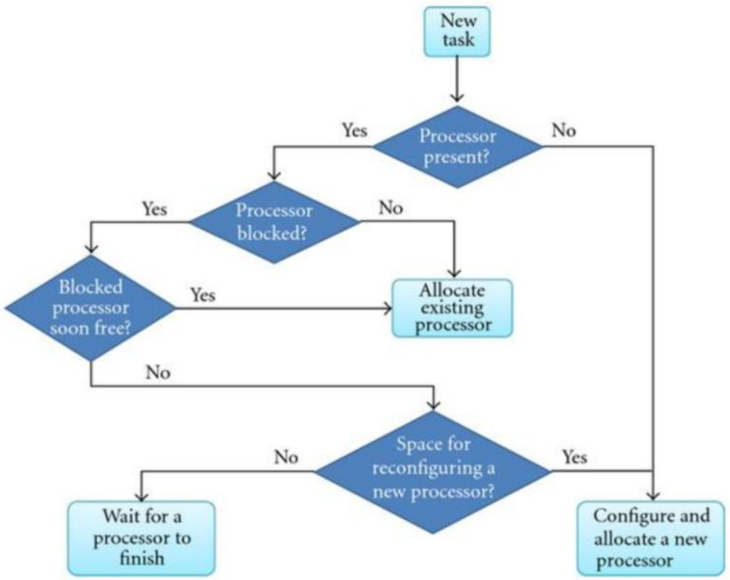
Στόχος (π.χ. μεγιστοποίηση κέρδους):

- Max $80x_1 + 60x_2$

Η σχεδίαση μετατρέπεται σε διακριτό γραμμικό σύστημα.

6. Γιατί Είναι Κρίσιμο για Μηχανικούς Σχεδίασης

- Κάθε σχεδιαστικό πρόβλημα περιλαμβάνει πεπερασμένες επιλογές.
  - Υπάρχουν αντικρουόμενα κριτήρια και trade-offs.
  - Οι πόροι είναι περιορισμένοι και οι εξαρτήσεις δομικές.
  - Η διαίσθηση αποτυγχάνει σε σύνθετα συστήματα.
  - Η μαθηματική δομή εισάγει συστηματικότητα και τεκμηρίωση.



7. Παράδειγμα: Trade-offs σε Σχεδίαση Προϊόντος

Παράδειγμα: Trade-off σε Drone

Μεταβλητές:

- x = χωρητικότητα μπαταρίας (Ah)
  y = βάρος συστήματος (kg)

Σχέση βάρους:

- $y = 2 + 0.4x$

Περιορισμός μέγιστου βάρους:

- $y \leq 6$

Στόχος: μεγιστοποίηση αυτονομίας

- Max $3x$

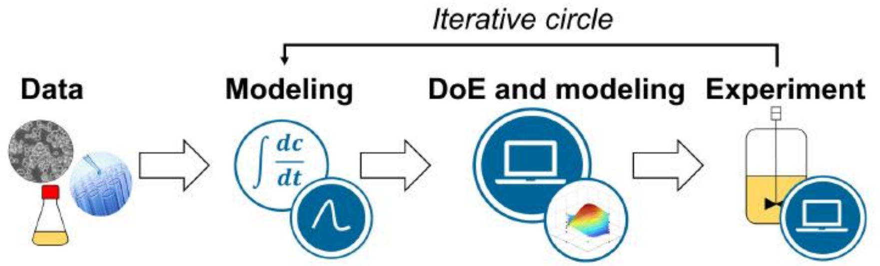
Η αύξηση της μπαταρίας αυξάνει και το βάρος.
Η εξίσωση εκφράζει το trade-off.

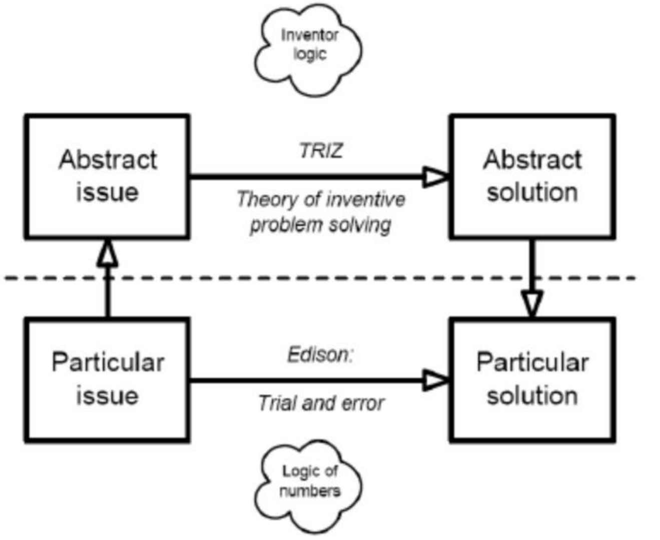
8. Από το Πρόβλημα στο Μοντέλο

Πραγματικό πρόβλημα → Εννοιολογικός καθορισμός → Μαθηματική αναπαράσταση.

- Σε αυτό το στάδιο συμβαίνουν τα περισσότερα λάθη.
- Αν το μοντέλο δεν αντανακλά σωστά τη δομή,
- η λύση θα είναι τεχνικά σωστή αλλά εννοιολογικά άκυρη.

Figure 1: General workflow for the application of model-assisted DoE (mDoE).





9. Παράδειγμα: Από Ιδέα σε Μεταβλητές

Παράδειγμα: Data Center

Μεταβλητές:

- x_1 = αριθμός servers τύπου A
  x_2 = αριθμός servers τύπου B

Ισχύς:

- $5x_1 + 3x_2 \leq 200$ (kW)

Χωρητικότητα:

- $100x_1 + 80x_2 \geq 5.000$ (GB)

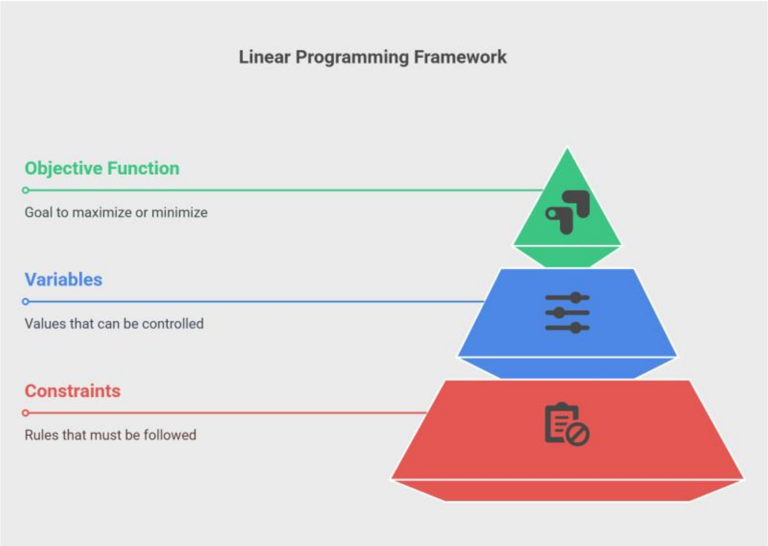
Στόχος:

- Min $2.000x_1 + 1.500x_2$

Μετατρέπουμε την έννοια “αποδοτικότητα” σε ανισότητες.

10. Τα Τρία Θεμέλια του Μοντέλου

1. Μεταβλητές απόφασης – τι ελέγχουμε.
2. Περιορισμοί – τι μας δεσμεύει.
3. Συνάρτηση στόχου – τι επιδιώκουμε να βελτιώσουμε.



Οι τρεις αυτοί ρόλοι καθορίζουν ολόκληρη τη δομή του προβλήματος.

11. Παράδειγμα: Σχεδίαση Παραγωγικής Γραμμής

Παραγωγική Γραμμή

Μεταβλητές:

- x = μονάδες προϊόντος A
  y = μονάδες προϊόντος B

Χρόνος:

- $3x + 2y \leq 120$

Εργατικό κόστος:

- $10x + 8y$

Στόχος:

- Min $10x + 8y$

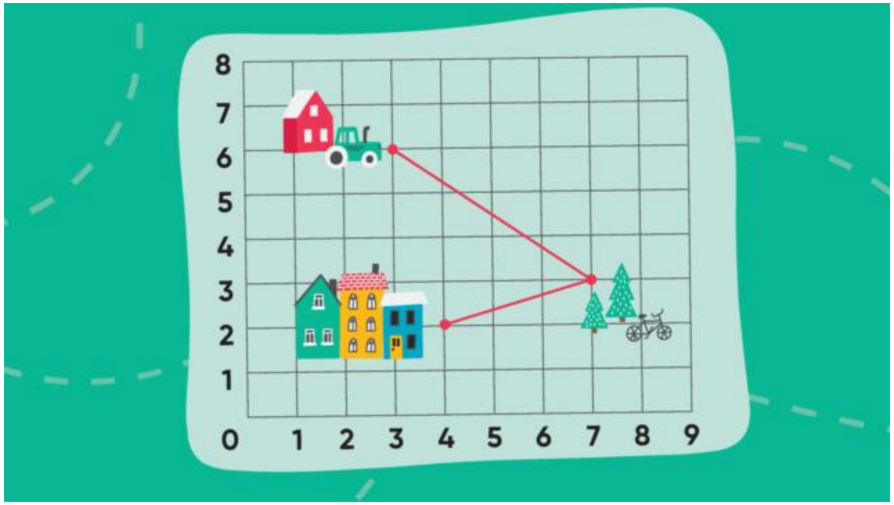
Οι περιορισμοί καθορίζουν τι είναι εφικτό.
Η συνάρτηση στόχου καθορίζει τι είναι επιθυμητό.

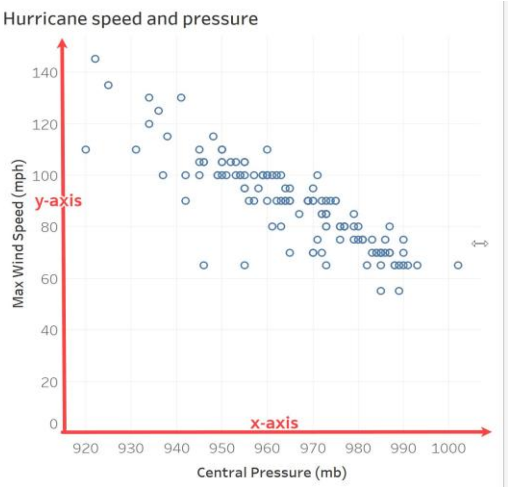
12. Μεταβλητές Απόφασης – Χώρος Λύσεων

x = μονάδες προϊόντος A.

y = μονάδες προϊόντος B.

- Κάθε τιμή (x, y) αντιστοιχεί σε διαφορετικό σενάριο.
- Το σύνολο όλων των πιθανών τιμών είναι ο χώρος πιθανών λύσεων.
- Ακόμη δεν έχουμε αποκλείσει τίποτα.





13. Παράδειγμα: Επιλογή Υλικού

Επιλογή Υλικού

- x_1 = kg αλουμινίου
  x_2 = kg ατσαλιού

Περιορισμός αντοχής:

- $5x_1 + 8x_2 \geq 400$

Περιορισμός κόστους:

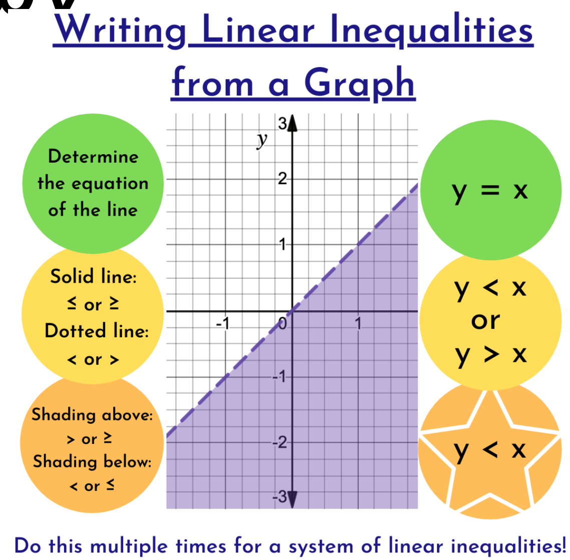
- $3x_1 + 6x_2 \leq 500$

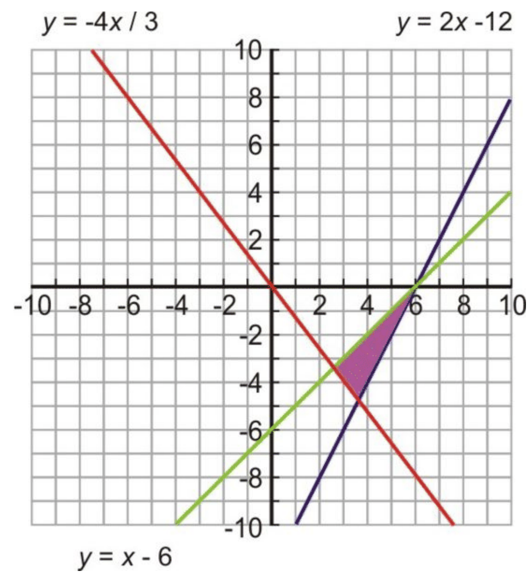
Το “επαρκώς ανθεκτικό” μετατρέπεται σε γραμμική ανισότητα.

ερωτήσεις

14. Περιορισμοί – Ερμηνεία Ανισοτήτων

- $2x + y \leq 100$.
  - Κάθε *Χ* καταναλώνει 2 μονάδες χρόνου.
  - Κάθε *Υ* καταναλώνει 1 μονάδα χρόνου.
  - Η ανισότητα δηλώνει ότι δεν επιτρέπεται υπέρβαση πόρων.
  - Κάθε λύση που παραβιάζει την ανισότητα είναι μη εφικτή.





15. Παράδειγμα: Περιορισμός Προϋπολογισμού

Περιορισμός Προϋπολογισμού

- x_1 = εξαρτήματα τύπου A
  x_2 = εξαρτήματα τύπου B

Κόστος:

- $50x_1 + 30x_2 \leq 5.000$

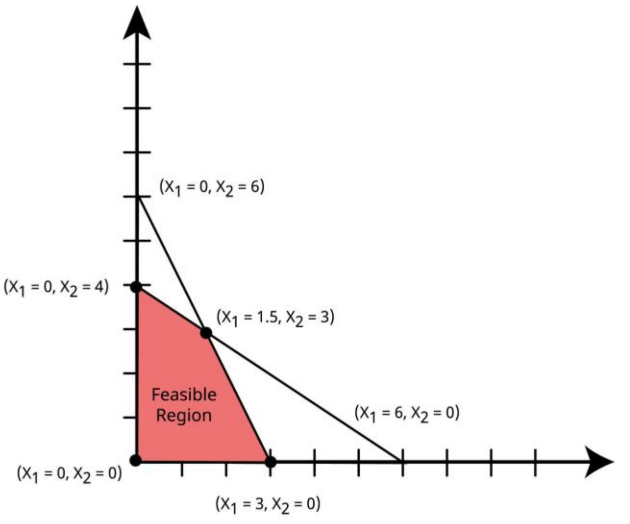
Χωρητικότητα:

- $x_1 + x_2 \geq 100$

Το budget είναι μαθηματικός περιορισμός.

16. Το Εφικτό Σύνολο

- Το σύνολο όλων των λύσεων που ικανοποιούν ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς.
  - Οι περιορισμοί μετατρέπουν τον χώρο λύσεων σε εφικτό χώρο.
  - Η βελτιστοποίηση εξετάζει μόνο το εφικτό σύνολο.
  - Αλλαγή περιορισμού σημαίνει αλλαγή ολόκληρου του εφικτού χώρου.



17. Παράδειγμα: Σχεδίαση Δικτύου Διανομής

Σχεδίαση Δικτύου Διανομής

- x_{ij} = ποσότητα που μεταφέρεται από αποθήκη i σε πελάτη j

Περιορισμός προσφοράς:

- $\Sigma_j x_{ij} \le S_i$

Περιορισμός ζήτησης:

- $\Sigma_i x_{ij} = D_j$

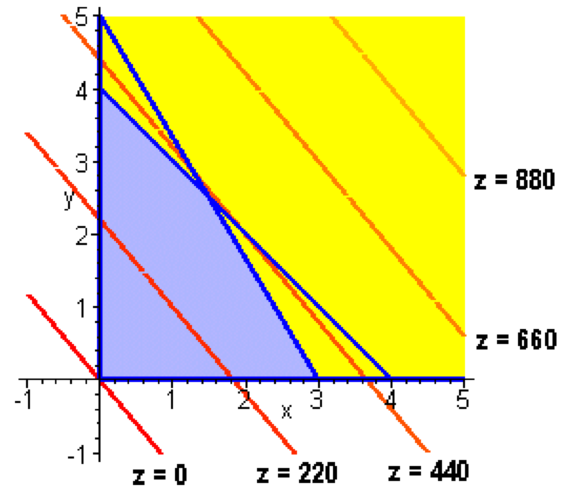
Στόχος:

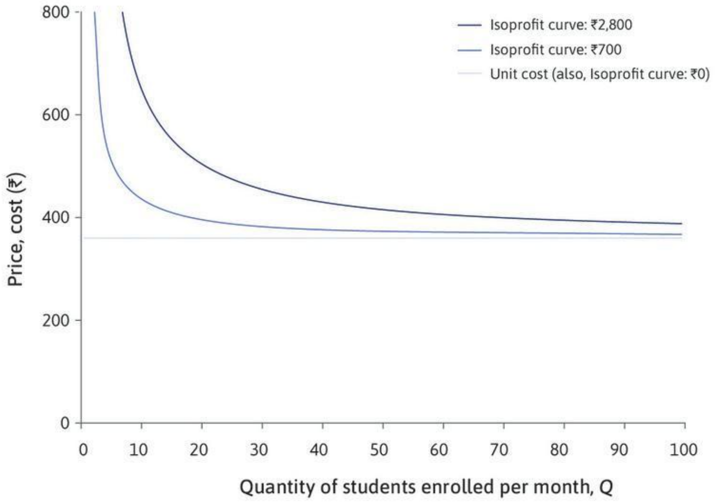
- Min $\Sigma_i \Sigma_j c_{ij} x_{ij}$

Το δίκτυο γίνεται σύστημα γραμμικών σχέσεων.

18. Συνάρτηση Στόχου – Κριτήριο Σύγκρισης

- Max 30x + 20y.
  - Σε κάθε εφικτή λύση αντιστοιχεί μία αριθμητική τιμή.
  - Η μέθοδος συγκρίνει τις τιμές αυτές.
  - Επιλέγει τη μεγαλύτερη (ή μικρότερη).
  - Εισάγεται έτσι κριτήριο διάταξης μέσα στο εφικτό σύνολο.





19. Παράδειγμα Ελαχιστοποίηση Ενέργειας

Ελαχιστοποίηση Ενέργειας

- x = αριθμός ενεργών μονάδων

Κατανάλωση:

- $E = 4x$

Περιορισμός απόδοσης:

- $10x \geq 200$

Στόχος:

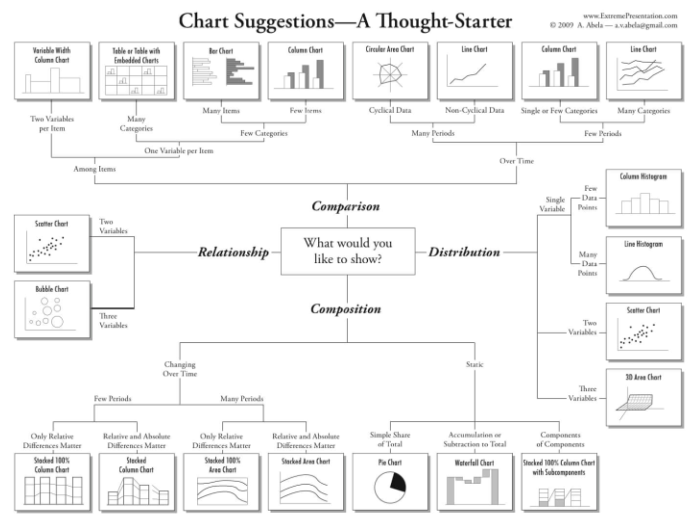
- Min $4x$

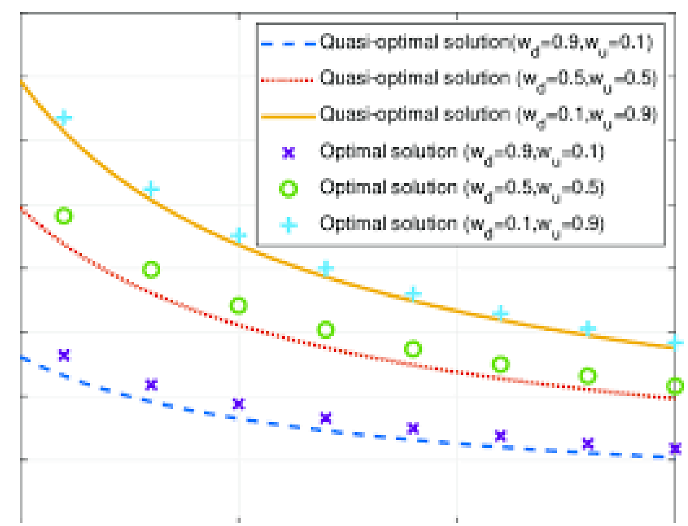
Το “αποδοτικό σύστημα” γίνεται αριθμητική σχέση.

20. Πώς Βρίσκεται η Καλύτερη Λύση;

1. Ορίζουμε το εφικτό σύνολο.
2. Υπολογίζουμε την τιμή στόχου σε κάθε εφικτή λύση.
3. Συγκρίνουμε και επιλέγουμε τη βέλτιστη.

   – Η διαδικασία είναι συστηματική και όχι διαισθητική.
   – Η μαθηματική μέθοδος οργανώνει τη σύγκριση.





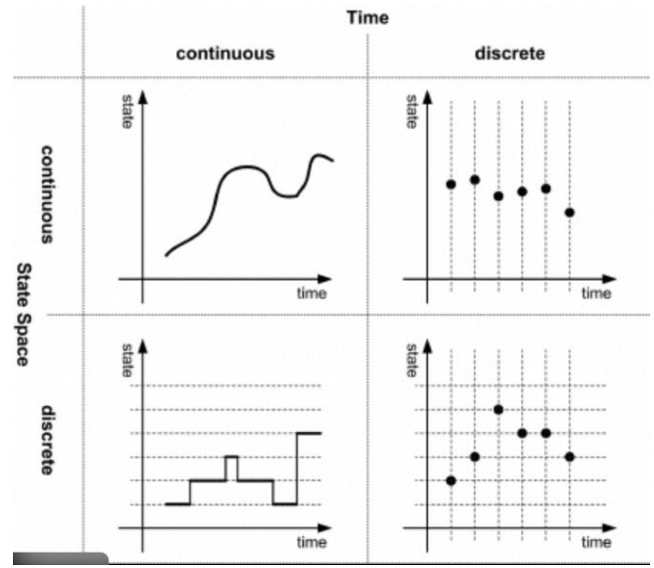
21. Παράδειγμα: Πώς Βρίσκεται η Καλύτερη Λύση

Σύγκριση Σχεδίων

- Σχέδιο Α:
  $C = 5x + 3y = 12.000$
- Σχέδιο Β:
  $C = 10.500$
- Σχέδιο Γ:
  $C = 11.300$
- Η βέλτιστη λύση είναι εκείνη με ελάχιστο C.

22. Διακριτές και Ακέραιες Αποφάσεις

- x ∈ ℕ, z ∈ {0,1}.
  - Δεν επιτρέπονται κλασματικές τιμές.
  - Ο χώρος λύσεων γίνεται διακριτός.
  - Η πολυπλοκότητα αυξάνεται σημαντικά.
  - Απαιτούνται ειδικές διακριτές μέθοδοι.



23. Παράδειγμα Επιλογή Προμηθευτή

Σχεδιάζουμε σύστημα και πρέπει να επιλέξουμε **έναν** προμηθευτή.

Μεταβλητές:

- $z_1 = 1$ αν επιλεγεί προμηθευτής A, αλλιώς 0
  $z_2 = 1$ αν επιλεγεί προμηθευτής B, αλλιώς 0

Περιορισμός επιλογής:

- $z_1 + z_2 = 1$

Κόστος:

- $C = 5.000z_1 + 6.000z_2$

Ποιότητα:

- $Q = 80z_1 + 95z_2$

Αν θέλουμε ελαχιστοποίηση κόστους με ελάχιστη ποιότητα 85:

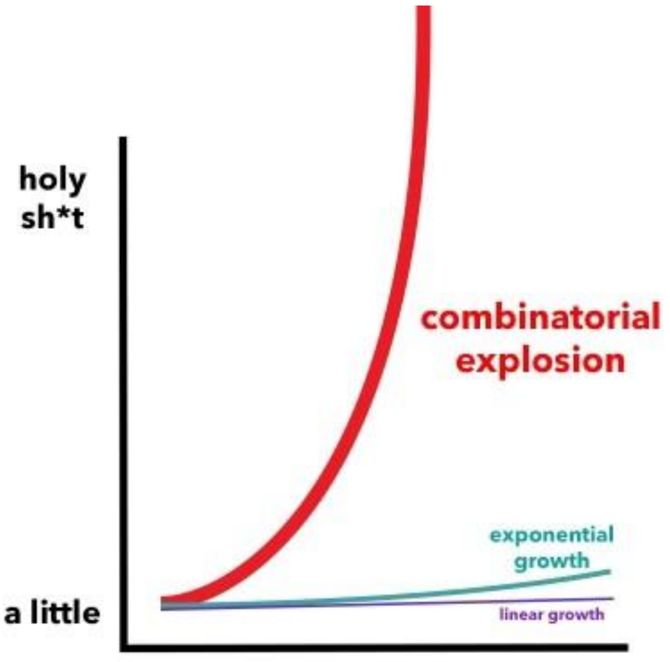
- $80z_1 + 95z_2 \geq 85$

Στόχος:

- Min $5.000z_1 + 6.000z_2$

24. Συνδυαστική Έκρηξη

- 20 δυαδικές μεταβλητές → 2^{20} δυνατοί συνδυασμοί.
  - Πάνω από ένα εκατομμύριο σενάρια.
  - Η διαίσθηση δεν επαρκεί.
  - Η μέθοδος χρησιμοποιεί δομή για να περιορίσει δραστικά την αναζήτηση.



25. Συνδυαστική Έκρηξη

Σχεδιάζουμε προϊόν με 10 χαρακτηριστικά.

- Κάθε χαρακτηριστικό:
  $z_i \in \{0,1\}$
- Αριθμός δυνατών διαμορφώσεων:

$2^{10} = 1.024$

- Αν γίνουν 20 χαρακτηριστικά:

$2^{20} = 1.048.576$

- Με περιορισμό κόστους:

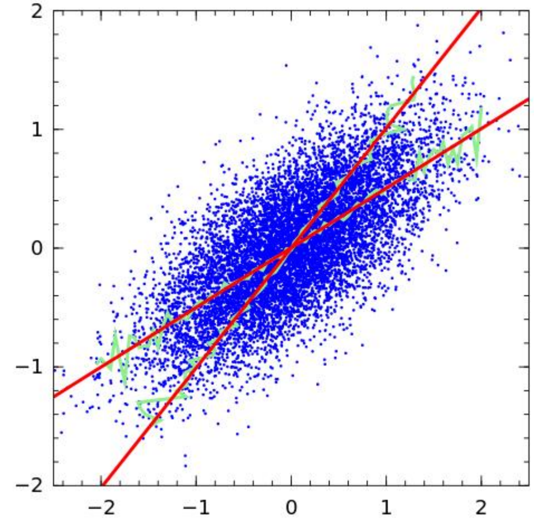
$\Sigma\, c_i\, z_i \leq 5.000$

- Στόχος:

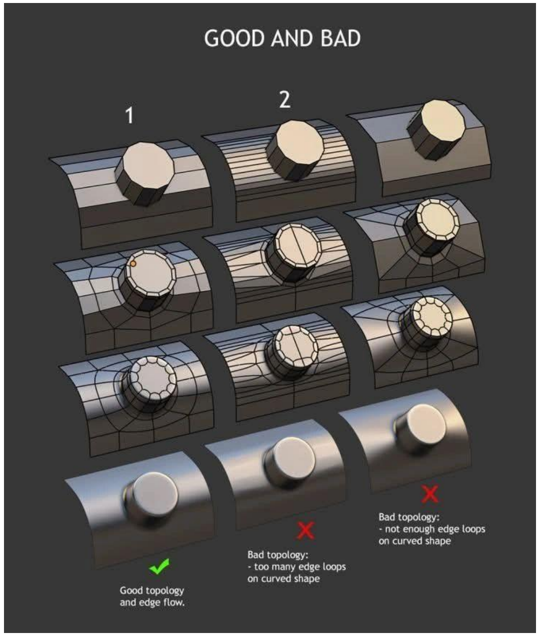
$\text{Min}\ \Sigma\, v_i\, z_i$

- Το πρόβλημα:
- Ο αριθμός λύσεων αυξάνεται εκθετικά.
  Η διαίσθηση δεν επαρκεί.
- Χρειαζόμαστε μαθηματική δομή για να διαχειριστούμε τον χώρο επιλογών.

26. Εννοιολογικό Λάθος 1 – Λάθος Μεταβλητές



- Μεταβλητές που δεν εκφράζουν πραγματικές αποφάσεις.
  - Το μοντέλο είναι μαθηματικά σωστό αλλά ουσιαστικά άχρηστο.
  - Παράδειγμα: «ποιότητα» ως ενιαία μεταβλητή ενώ είναι πολυδιάστατη.



27. Παράδειγμα – Λάθος Μεταβλητές

Σχεδίαση Φορητού Υπολογιστή

- Θέλουμε να "μεγιστοποιήσουμε την ποιότητα".

Λάθος μοντελοποίηση:

- Max Q
  Κόστος ≤ 1.000€
- Το Q όμως δεν είναι απόφαση.
  Δεν ξέρουμε από τι προκύπτει.

Πραγματικές Σχεδιαστικές Μεταβλητές

- x_1 = τύπος επεξεργαστή (επίπεδο απόδοσης)
  x_2 = χωρητικότητα μνήμης (GB)
  x_3 = χωρητικότητα μπαταρίας
  x_4 = ποιότητα οθόνης

Τότε:

- $Q = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4$

Κόστος:

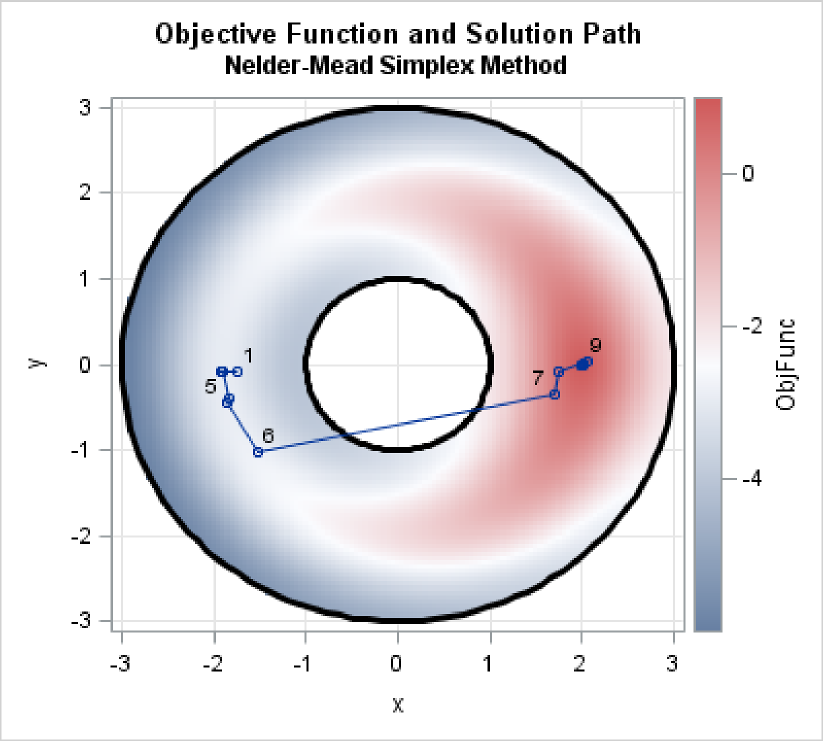
- $300x_1 + 50x_2 + 80x_3 + 120x_4 \leq 1.000$

Το Λάθος

- Αν ορίσουμε μόνο τη μεταβλητή Q:
- Δεν ελέγχουμε πραγματικές επιλογές.
- Δεν μπορούμε να επιβάλουμε ρεαλιστικούς περιορισμούς.
- Το μοντέλο είναι μαθηματικά σωστό αλλά μηχανικά άχρηστο.

28. Εννοιολογικό Λάθος 2 – Ελλιπείς Περιορισμοί

- Παράλειψη κρίσιμου περιορισμού.
  - Η «βέλτιστη» λύση μπορεί να είναι φυσικά ή οικονομικά αδύνατη.
  - Το πρόβλημα είναι σχεδιαστικό και όχι τεχνικό.



29. Παράδειγμα Σχεδίαση Παραγωγής

- x = μονάδες προϊόντος
- Κέρδος ανά μονάδα: 50€

Στόχος:

- Max 50x

Μοντέλο (Ελλιπές)

Μοναδικός περιορισμός που βάλαμε:

- $2x \le 200$
  $\Rightarrow x \le 100$

Άρα το μοντέλο δίνει:

- $x = 100$

Τι Ξεχάσαμε

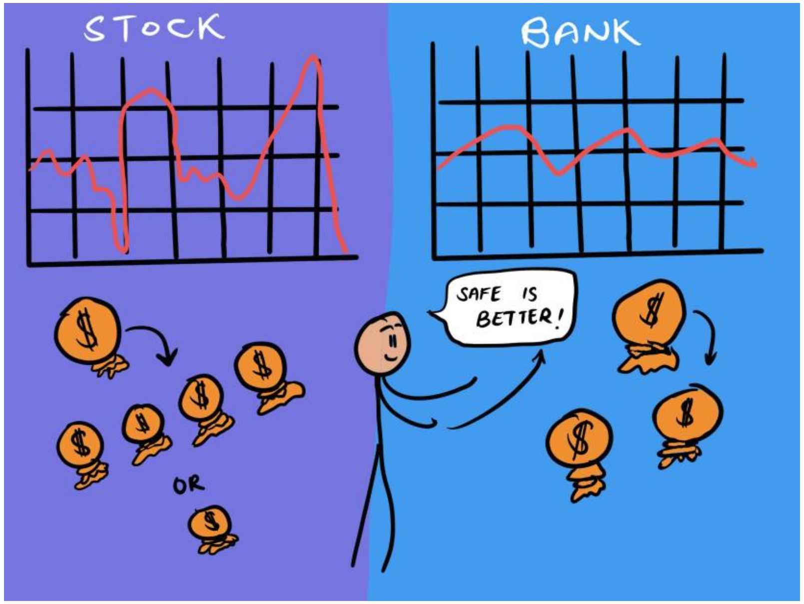
- Υπάρχει και περιορισμός χρόνου μηχανής:
- $3x \le 180$
  $\Rightarrow x \le 60$

Άρα η λύση $x = 100$ παραβιάζει τον χρόνο.

- Το μοντέλο ήταν μαθηματικά σωστό.
  Αλλά ήταν ελλιπές.
- Η βελτιστοποίηση δεν “ξέρει” ότι υπάρχει χρόνος αν δεν τον δηλώσουμε.

30. Εννοιολογικό Λάθος 3 – Ασαφής Στόχος

- Συγχώνευση διαφορετικών κριτηρίων χωρίς σαφή στάθμιση.
  - Το αποτέλεσμα είναι αριθμητικά καθαρό αλλά εννοιολογικά ασαφές.
  - Η μέθοδος μεγιστοποιεί αυτό που της δώσαμε,
  - όχι απαραίτητα αυτό που θέλαμε.



31. Παράδειγμα – Ασαφής Στόχος

Σχεδίαση Ηλεκτρικού Οχήματος

- x = χωρητικότητα μπαταρίας
  y = βάρος οχήματος

Αυτονομία:
  $R = 4x$

Κόστος:
  $C = 2x + 3y$

Κατανάλωση ενέργειας:
  $E = 5y$

Ασαφής Διατύπωση

- «Να είναι το όχημα όσο το δυνατόν καλύτερο.»
- Τι σημαίνει "καλύτερο";
- Μέγιστη αυτονομία; → Max R
- Ελάχιστο κόστος; → Min C
- Ελάχιστη κατανάλωση; → Min E
- **Λανθασμένη Συγχώνευση**
- Max $4x – 2x – 3y – 5y$
- Ανακατεύουμε διαφορετικές έννοιες
  χωρίς σαφή προτεραιότητα.
- Το πρόβλημα δεν είναι μαθηματικό.
  Είναι στρατηγικό.

32. Το Κεντρικό Μήνυμα

- Η μοντελοποίηση ορίζει εφικτό χώρο και κριτήριο σύγκρισης.
  - Αποκαλύπτει περιορισμούς και trade-offs.
  - Παρέχει τεκμηριωμένες λύσεις.
  - Η ευθύνη ξεκινά πριν τον υπολογισμό.