Υλικά – 3η Ομάδα Ασκήσεων

Ημερομηνία παράδοσης: 10η Ιουνίου 2004

Αστοχία

(1) Αντικείμενο από πολυστυρένιο (PS) θα πρέπει να μην αστοχεί σε εφελκυστικό φορτίο 1.25 MPa. Προσδιορίστε το μήκος της μεγαλύτερης επιφανειακής ρωγμής αν η επιφανειακή ενέργεια του PS είναι 0.5 J/m^2 και το μέτρο ελαστικότητας 3.0 GPa.

$$K_{Ic} = \sigma_f \sqrt{\pi a} \Rightarrow \sqrt{2\gamma E} = \sigma_f \sqrt{\pi a} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{\sqrt{2\gamma E}}{\sigma_f \sqrt{\pi}} \Rightarrow a = \frac{2\gamma E}{\sigma_f{}^2 \pi} \simeq 0.611 \text{mm}$$

(2) Μια βίδα 10 kg από χάλυβα υψηλής αντοχής (E = 210 GPa, σ_y = 200 MPa) συγκρατεί δυο άκαμπτες πλάκες σε θερμοκρασία 300 °C. Η σχεδίαση απαιτεί η βίδα να είναι προτεταμένη σε φορτίο 100 MPa το οποίο δεν θα πρέπει να μειωθεί περισσότερο από 10 % σε συνθήκες λειτουργίας. Για να προσδιοριστεί η μέγιστη ζωή λειτουργίας της βίδας πραγματοποιείται δοκιμή ερπυσμού με τάση 50 MPa και δίνει ρυθμό παραμόρφωσης 9.5×10^{-15} s^{-1}.
α) Αν οι τάσεις στην βίδα είναι αρκετά υψηλές ώστε ο ερπυσμός να είναι ο κυρίαρχος μηχανισμός παραμόρφωσης (με εκθέτη, n = 4) ποια είναι η μέγιστη διάρκεια ζωής της β;
(Υ*πόδειξη:* Οι άκαμπτες πλάκες εμποδίζουν οποιαδήποτε εφελκυστική παραμόρφωση στην βίδα.)
β) Αν η θερμοκρασία αυξηθεί δραματικά (1000 °C) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω δεδομένα για να υπολογίσουμε πόσο χρόνο η βίδα θα υποστηρίξει την προφόρτιση; Εξηγείστε.

α) Αν ο κύριος μηχανισμός παραμόρφωσης είναι ο ερπυσμός σταθερής κατάστασης η σχέση τάσης – ρυθμού παραμόρφωσης είναι:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_o \left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right)^n \Rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}_o}{\sigma_o{}^n} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\sigma^n} = \frac{9.5 \times 10^{-15} \text{s}^{-1}}{(50 \text{ MPa})^4} = 1.52 \times 10^{-21} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{MPa}^4} .$$

Ο ρυθμός παραμόρφωσης της βίδας είναι συνδυασμός ελαστικότητας και ερπυσμού:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\lambda\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{\eta}} + \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\rho\pi\upsilon\sigma\mu o\acute{\upsilon}} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \left(1.52 \times 10^{-21} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{MPa}^4}\right)\sigma^4$$

Η προϋπόθεση ότι η βίδα συγκρατεί τις δυο άκαμπτες πλάκες επιβάλλει ότι ο ρυθμός παραμόρφωσης είναι μηδέν, οπότε από την παραπάνω σχέση:

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} = -\left(1.52 \times 10^{-21} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{MPa}^4}\right)\sigma^4 \Rightarrow \frac{d\sigma}{\sigma^4} = -E\left(1.52 \times 10^{-21} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{MPa}^4}\right)dt \Rightarrow$$

$$\int dt = \frac{1}{-E\left(1.52 \times 10^{-21} \dfrac{1}{\text{s} \cdot \text{MPa}^4}\right)} \int \frac{d\sigma}{\sigma^4} \Rightarrow t = \frac{1}{-E\left(1.52 \times 10^{-21} \dfrac{1}{\text{s} \cdot \text{MPa}^4}\right)} \left.\frac{-1}{3\sigma^3}\right|_{100MPa}^{90MPa} \Rightarrow$$

$$t = 3.88 \times 10^8 \text{ s}$$

Άρα ο μέγιστος χρόνος ζωής της βίδας είναι πάνω από 12 χρόνια.

β) Τα δεδομένα δεν επαρκούν γιατί αφορούν συστήματα που λειτουργούν στους 300 °C. Θα χρειαζόταν επιπλέον δοκιμή ερπυσμού στους 1000 °C για να προσδιοριστεί η σχέση ερπυσμού σε αυτήν την θερμοκρασία.

(3) Μια μεγάλη πλάκα σε ένα τεχνικό εξάρτημα που είναι σε συνεχή λειτουργία 10 ώρες κάθε μέρα υποβάλλεται σε μέση εφελκυστική τάση 200 MPa κατά την λειτουργία του. Σε αυτήν την τάση υπερτίθενται δονήσεις με εύρος 30 MPa και συχνότητα κυκλικής φόρτισης 50 Hz. Μη καταστροφικός έλεγχος με ανάλυση 0.2 mm δεν αποκάλυψε ρωγμές στο εξάρτημα. Αν υπήρχε ρωγμή στην κρίσιμη περιοχή το φορτίο λειτουργίας θα ήταν κάθετο στο επίπεδο της ρωγμής και θα προέκυπταν συνθήκες μικρής κλίμακας διαρροής. Δίνονται: K_{Ic} = 100 MPa m$^{1/2}$, ΔK_o = 3 MPa m$^{1/2}$ για R = 0 και 1.5 MPa m$^{1/2}$ για R = 0.85 και είναι ανεξάρτητο από την κυκλική συχνότητα.

(α) Ποιος από τους ακόλουθους παράγοντες είναι ο/οι πιο σημαντικός/οί για την ασφαλή σχεδίαση του εξαρτήματος έναντι καταστροφικής αστοχίας: (i) το K_{Ic}, (ii) το ΔK_o ή (iii) τον ρυθμό διάδοσης της ρωγμής στην περιοχή όπου ισχύει ο νόμος του Paris; Γιατί;
(β) Προτείνετε μια διαδικασία για τον υπολογισμό της ζωής κόπωσης της πλάκας.

(α) Υπάρχουν δυο διαφορετικές φορτίσεις κόπωσης, οι εναλλαγές συχνότητας 50 Hz και η κόπωση λόγω καθημερινής έναρξης – παύσης λειτουργίας. Η μέγιστη τάση που επιβάλλεται είναι

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta} + \frac{\Delta\sigma}{2} = 215\,\text{MPa}\,.$$

Το κρίσιμο μέγεθος ατέλειας είναι

$$K_{Ic} = \sigma_{\max}\sqrt{\pi a} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{K_{Ic}}{\sigma_{\max}\sqrt{\pi}} \Rightarrow a \simeq 6.9\,\text{cm}$$

το οποίο είναι πολύ μεγαλύτερο από οποιαδήποτε προϋπάρχουσα ατέλεια (< 0.2 mm). Αν, λοιπόν θεωρήσουμε ότι η μεγαλύτερη ρωγμή είναι 0.2 mm τότε για τις δύο καταπονήσεις έχουμε:

$\Delta K_1 = \Delta\sigma\sqrt{\pi\left(0.2\times10^{-3}\right)} \simeq 0.75\,\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$, για R = 185/215 = 0.83, και

$\Delta K_2 = \Delta\sigma\sqrt{\pi\left(0.2\times10^{-3}\right)} \simeq 4.99\,\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$, R = 0/200 = 0.

Επομένως για την πρώτη καταπόνηση είμαστε αρκετά κάτω από το ΔK_o, δηλ., σχεδόν μηδενική διάδοση ρωγμής κόπωσης, ενώ για την δεύτερη είμαστε πάνω από το κατώφλι, δηλ., μέσα στην περιοχή του Paris.
Όλοι οι παράγοντες που αναφέρονται έχουν κάποιο ρόλο στο πρόβλημα: Το K_{Ic} θα ήταν εξαιρετικά σημαντικό αν υπήρχαν ατέλειες με μέγεθος κοντά στο κρίσιμο. Αρχικά δεν υπάρχουν, όμως το *τελικό* μέγεθος καθορίζεται από την αντοχή σε θραύση έχει σημασία. Ο ρυθμός διάδοσης της ρωγμής στην περιοχή του Paris είναι πολύ σημαντικός γιατί καθορίζει τον χρόνο ζωής της πλάκας. Επίσης χρειαζόμαστε ακριβή γνώση του ΔK_o καθώς και οι δυο αρχικές τιμές του ΔK είναι κοντά στο κατώφλι.
(β) Από την έκφραση του ΔK_1 μπορούμε να υπολογίσουμε το κρίσιμο μέγεθος ατέλειας για να ξεπεράσουμε το κατώφλι ΔK_o. Αυτό είναι a = 3.18 mm. Μπορούμε σε γενικές γραμμές να θεωρήσουμε ότι η ρωγμή θα αναπτυχθεί πολύ αργά εξαιτίας της έναρξης – παύσης λειτουργίας έως μέγεθος 3.18 mm και στην συνέχεια πολύ γρήγορα υπό την κυκλική καταπόνηση. Ενδεικτικά αν m = 2 και $C = 10^{-8}$ 1/(κύκλος·MPa^2) μπορούμε να προσδιορίσουμε τον ολικό χρόνο ζωής.

$N = \frac{1}{CY^2\left(\Delta\sigma\right)^2\pi}\ln\frac{a_f}{a_o} = 2207\,\text{κύκλοι}$, δηλ., περίπου 6 χρόνια για να φτάσει μια ρωγμή στα 3.18 mm.

Από εκεί για να αναπτυχθεί έως τα 6.9 cm θα χρειαστούν:

$N = \frac{1}{CY^2\left(\Delta\sigma\right)^2\pi}\ln\frac{a_f}{a_o} = 108835\,\text{κύκλοι}$. Μπορεί να φαίνεται μεγάλο το νούμερο αλλά θυμηθείτε ότι γίνεται στα 50 Hz, άρα περίπου 40 min. Ανεξαρτήτως των τιμών του m και του C, ο χρόνος ζωής της πλάκας καθορίζεται από τον χρόνο που απαιτείται για την ανάπτυξη της ρωγμής κάτω από την επίδραση της έναρξης – παύσης λειτουργίας σε μήκος ικανό ώστε να μπορεί να αναπτυχθεί υπό την επίδραση της κυκλικής καταπόνησης.