Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

ΜΑΡΙΑ-ΕΛΕΝΗ ΠΟΥΛΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Χαρακτηριστικά Μεγέθη

Έστω η εξίσωση

$$AX = \lambda X \tag{1}$$

όπου ο πίνακας A είναι τετραγωνικός, ο X είναι πίνακας στήλη τέτοιος ώστε να ορίζεται η πράξη του πολλαπλασιασμού και τέλος $\lambda \in \mathbb{R}$. Η (1) μπορεί να γραφεί και ως

$$(A - \lambda I)X = 0$$

όπου ο I είναι ο μοναδιαίος πίνακας ίδιων διαστάσεων με τον A. Το σύστημα που προκύπτει είναι ομογενές και άρα έχουμε:

1. Αν $|A - \lambda I| \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση, την τετριμμένη $X = 0$.

2. Αν $|A - \lambda I| = 0$ τότε το σύστημα έχει παραμετρική απειρία λύσεων.

Ορισμός 1. *Οι τιμές του λ οι οποίες προκύπτουν απο την σχέση $|A - \lambda I| = 0$ ονομάζονται* **ιδιοτιμές** *του πίνακα A.*

Ορισμός 2. *Για κάθε ιδιοτιμή λ_i οι λύσεις X του συστήματος (1) που προκύπτουν ονομάζονται* **ιδιοδιανύσματα** *του πίνακα A και συμβολίζονται ως X_{λ_i}.*

Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων κάθε ιδιοτιμής λ_i ονομάζεται **ιδιόχωρος**, αποτελείται απο τα ιδιοδιανύσματα που προκύπτουν απο τη σχέση

$$(A - \lambda_i)X_{\lambda_i} = 0$$

και συμβολίζεται ως $V_{\lambda_i} = \{X_{\lambda_i} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_i X) = 0\}$.

Παράδειγμα 1. *Το διάνυσμα $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ αντίστοιχο προς την ιδιοτιμή $\lambda = 3$, αφού*

$$AX = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 3. *Η εξίσωση $|A - \lambda I| = 0$ ονομάζεται* **χαρακτηριστική εξίσωση** *του A. Αν ο A είναι $n \times n$ πίνακας, το ανάπτυγμα της $|\lambda I - A|$ είναι ένα πολυώνυμο της μορφής*

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0, \quad c_n \in \mathbb{R}$$

που ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο.**

Παρατήρηση 1. *Για $\lambda = 0$ απο το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουμε $P(0) = |A| = c_0$. Συνεπώς αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο εμφανίζει μη μηδενικό όρο τότε ο πίνακας A αντιστρέφεται και μάλιστα η ορίζουσα του είναι ίση με το c_0.*

Άσκηση 1. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.*

Λύση Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών χρησιμοποιούμε την εξίσωση $|A - \lambda I| = 0$, δηλαδή

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυωνυμο είναι το $|A - \lambda I| = \lambda(\lambda - 3) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ και οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$ που είναι οι ρίζες της εξίσωσης $|A - \lambda I| = 0$. Επίσης από τον μηδενικό όρο του πολυωνύμου έχουμε $|A| = 2$.

Παράδειγμα 2. *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία της Άσκησης 1 βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $|A-\lambda I| = -\lambda^3+8\lambda^2-17\lambda+4$ *και παάρνουμε τις ιδιοτιμές* $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2+\sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2-\sqrt{3}$.

Θεώρημα. *Αν A είναι ένας nxn πίνακας, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Το λ είναι μια ιδιοτιμή του A.*
2. *Το σύστημα $(A-\lambda I)X = 0$ έχει και μη μηδενικές λύσεις.*
3. *Υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $Q \in R^n$ τέτοιο ώστε $AQ = \lambda Q$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.*
4. *Το $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι μια λύση της εξίσωσης $|A-\lambda I| = 0$. Τα ιδιοδιανύσματα του A τα αντίστοιχα στην ιδιοτιμή λ είναι τα μη μηδενικά διανύσματα X τέτοια ώστε $AX = \lambda X$.*
5. *Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A τότε το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = \lambda X$ είναι φορέας διανυσματικού χώρου και ο χώρος αυτός είναι ο ιδιοχώρος του A ο αντίστοιχος της λ και συμβολίζεται με V_λ.*

Άσκηση 2. *Να βρεθούν οι βάσεις των ιδιοχώρων του πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Λύση Αρχικά από την χαρακτηριστική εξίσωση του A που είναι

$$|A-\lambda I = (\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0$$

βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = 1$. Άρα θα υπάρχουν δύο ιδιοχώροι για τον πίνακα A, ο $V_{\lambda_1=1}$ και ο $V_{\lambda_2=5}$. Στην συνέχεια υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα χρησιμοποιώντας την σχέση $(A-\lambda I)X = 0$, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Για $\lambda_1 = 5$ η (2) γίνεται

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Απο όπου παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{array} \quad (1)$$

Άρα $x_1 = -x_2$. Συνεπώς για $x_2 = k$ και για $x_3 = t$ παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα $(x_1, x_2, x_3) = (-k, k, t) = k(-1, 1, 0) + t(0, 0, 1)$ και άρα ο ιδιοχώρος είναι $V_{\lambda_1=5} = \{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)$. Τώρα πρέπει να ελέγξουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επειδή είναι δύο θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της γραμμικής εξάρτησης $v = \kappa w$, δηλαδή θα υποθέσουμε το w παράγει το v, για κάποιο κ. Συνεπώς

$$(-1, 1, 0) = \kappa(0, 0, 1)$$

από όπου παίρνουμε ότι $0 = -1$ δηλαδή δεν υπάρχει κ και επομένως τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα βάση.
Για $\lambda_2 = 1$ η (2) γράφεται

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Απο όπου παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcl} -2x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ & - & 4x_3 & = & 0. \end{array}$$

Επομένως $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$. Θέτοντας $x_1 = t$ το ιδιοδιανύσματα είναι της μορφής:

$$X = (t, t, 0) = t(1, 1, 0).$$

Άρα το διάνυσμα $(1, 1, 0)$ είναι μια βάση του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$.

Ορισμός 4. *Έστω λ μια ιδιοτιμή του $n \times n$ πίνακα A. Θα λέμε ότι η ιδιοτιμή λ έχει* **αλγεβρική πολλαπλότητα** *$\rho \in \mathbb{N}^*$ και θα γράφουμε $m(\lambda) = \rho$ ανν το λ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης του A με πολλαπλότητα ρ. Η διάσταση του ιδιοχώρου V_λ λέγεται* **γεωμετρική πολλαπλότητα** *της λ και συμβολίζεται $g(\lambda)$.*

Θεώρημα. *Η γεωμετρική πολλαπλότητα δεν μπορεί να υπερβαίνει την αλγεβρική πολλαπλότητα.*

Θεώρημα. *Κάθε σύνολο ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές, δηλαδή ιδιοτιμές μηδενικής πολλαπλότητας, είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Παρατήρηση 2. *Στην Άσκηση 2 βλέπουμε ότι η διοτιμή $\lambda = 5$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 αφού $(\lambda - 5)^2 = 0$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην πολλαπλότητα αυτή είναι δύο, τα $(-1, 1, 0), (0, 0, 1)$.*

Εφαρμογή Χαρακτηριστικού Πολυωνύμου

Θεώρημα. *Caley-Hamilton Έστω ένας $n \times n$ πίνακας A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο*

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0, \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Τότε $P(A) = 0$.

Μια άμεση εφαρμογή του παραπάνω Θεωρήματος είναι η εύρεση του αντίστροφου πίνακα, ίσως και η πιο απλή απο αυτές που έχουμε δει μέχρι τώρα. Αν $P(A) = 0$ τότε

$$P(A) = (-1)^n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_0 I = 0.$$

που ϑα μας δώσει

$$(-1)^{n+1}A^n - c_{n-1}A^{n-1} - \cdots - c_1 A = c_0 I.$$

σύμφωνα με τον τύπο $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ παίρνουμε ότι ο αντίστροφος πίνακας του A είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{c_0}((-1)^{n+1}A^{n-1} - c_{n-1}A^{n-2} - \cdots - c_1 I).$$

Παράδειγμα 3. *Απο το Παράδειγμα 2 γνωρίζουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι* $P(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4$. *Αντικαθιστώντας όπου* λ *το* A *παίρνουμε*

$$-A^3 + 8A^2 - 17A + 4I = 0.$$

Κάνοντας πράξεις έχουμε

$$A\frac{1}{4}(A^2 - 8A + 17I) = I.$$

Τέλος, ο αντίστροφος είναι $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 8A + 17I)$.

Θεώρημα. *Αν* $A \in M_n$ *και* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *οι ιδιοτιμές της* A *τότε*

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdot + \lambda_n = \mathrm{tr}(A)$
2. $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$
3. *Η* A *είναι* **ομαλή** *αν και μόνο αν για κάθε* $i \in \mathbb{N}_n^*$ *είναι* $\lambda_i \neq 0$.

Ορισμός 5. *Έστω* A, B *τετραγωνικοί πίνακες. Θα λέμε ότι ο πίνακας* A *είναι* **όμοιος** *με τον πίνακα* B, *αν και μόνο αν υπάρχει ομαλός πίνακας* R *τέτοιος ώστε* $A = RBR^{-1}$ *Αν οι πίνακες* A *και* B *είναι όμοιοι τότε* $|A - \lambda I| = |B - \lambda I|$.

Διαγωνιοποίηση

Θεώρημα. *Θα λέμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας* A *είναι* **διαγωνιοποιήσιμος** *αν και μόνο αν υπάρχει ομαλός πίνακας* R *τέτοιος ώστε ο πίνακας* $\Delta = R^{-1}AR$ *να είναι διαγώνιος, δηλαδή*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$$

όπου λ_i *είναι οι ιδιοτιμές του* A.

Θεώρημα. *Ένας* $n \times n$ *πίνακας* A *είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν το άθροισμα των διαστάσεων των ιδιοχώρων των ιδιοτιμών του πίνακα* A *είναι ίσο με* n.

Θεώρημα. *Αν ο* $n \times n$ *πίνακας* A *έχει* n, *διάφορες ανά δύο, ιδιοτιμές, είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Πρόταση 1. *Κάθε συμμετρικός πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Παρατήρηση 3. *Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει τουλάχιστον μια μιγαδική ρίζα τότε ο πίνακας δεν διαγωνιοποιείται.*

Μεθοδολογία Διαγωνιοποίησης

Για τη διαγωνιοποίηση του $n \times n$ πίνακα Α ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A
2. Βρίσκουμε την βάση καθε ιδιοχώρου
3. Αν το άθροισμα των διαστάσεων των ιδιοχώρων είναι μικρότερο του n ο πίνακας Α δεν διαγωνιοποιείται. Αν το άθροισμα των διαστάσεων των ιδιοχώρων είναι n τότε ο πίνακας Α διαγωνιοποιείται και
4. Σχηματίζουμε τον πίνακα R που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του Α. Ο πίνακας $\Delta = R^{-1}AR$ είναι ο ζητούμενος διαγώνιος πίνακας.

Παρατήρηση 4. *Έστω πίνακας A διαγωνιοποιήσιμος. Τότε* $A^k = P\Delta^k P^{-1}, k \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 4. *Έστω ο πίνακας της Άσκησης 2. Αποδείξαμε ότι έχει ιδιοτιμές τις* $\lambda_1 = 5$ *πολλαπλότητας 2 και την* $\lambda_2 = 1$. *Αυτές με την σειρά τους μας έδωσαν τα διοδιανύσματα* $(-1,1,0),(0,0,1),(1,1,0)$ *συνεπώς μια διαγωνιοποίηση θα είναι*

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Παρατήρηση 5. *Η σειρά με την οποία βάζουμε τις ιδιοτιμές (αντ. τα ιδιοδιανύσματα) στο πίνακα Δ (αντ. στο πίνακα P) δεν έχει σημασία. Όμως όποια σειρά ακολουθεί ο Δ (αντ. ο P) πρέπει και να ακολουθεί ο P(αντ. ο Δ.) Γι' αυτό και στο προηγούμενο παράδειγμα είπαμε ότι βρήκαμε μια διαγωνιοποίηση του πίνακα A. Μια άλλη θα ήταν*

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}.$$