Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΟΡΙΖΟΥΣΑ, ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ

ΜΑΡΙΑ-ΕΛΕΝΗ ΠΟΥΛΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ορίζουσες

Ορισμός 1. *Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα A μπορούμε να αντιστοιχίσουμε εναν πραγματικό αριθμό που τον ονομάζουμε ορίζουσα του πίνακα A και το συμβολίζουμε με* $\det(A)$ *ή* $|A|$.

Οι πιο γνωστές μας ορίζουσες είναι:

(i) του πίνακα $1x1$, δηλαδή έστω $A = [a_{11}]$ τότε $\det(A) = a_{11}$.
(ii) του πίνακα $2x2$, δηλαδή έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ τότε

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

και τέλος ίσως και

(iii) του πίνακα $3x3$, δηλαδή έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ τότε

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση Έστω ότι έχουμε ένα πίνακα $3x3$, δηλαδή έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός μπορεί να γραφεί ως ένας σύνθετος πίνακας αποτελούμενος απο τα διανύσματα στήλες του. Επομένως εαν $a_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}), a_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ και $a_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ τότε μπορούμε να γράψουμε τον A ως $A = [a_1, a_2, a_3]$. Μέσω του ορισμού μπορεί κανείς να αποδείξει ότι η ορίζουσα του πίνακα A μας δίνεται απο την ακόλουθη σχέση

$$|A| = a_1 \cdot (a_2 \times a_3).$$

Δηλαδή η απόλυτη τιμή μιας ορίζουσα ενός $3x3$ πίνακα μας δίνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται απο τα διανύσματα a_1, a_2 και a_3. Ενώ η ορίζουσα ενός $2x2$ πίνακα μας δίνει το εμβαδό του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα $a_1 = (a_{11}, a_{21})$ και $a_2 = (a_{12}, a_{22})$ δηλαδή έχουμε

$$|A| = a_1 \times a_2.$$

όπου a_1, a_2 είναι οι διαδοχικές πλευρές.

Ορισμός 2. *Η ορίζουσα ενός* $n \times n$ *πίνακα A ονομάζεται ορίζουσα* n-**τάξεως** *και η απόλυτη τιμή της μας δίνει τον όγκο ενός* $n-$*παραλληλεπιπέδου.*

Υπολογισμός ορίζουσας με την βοήθεια του αναπτύγματος

Ορισμός 3. *Η* **ελάσσονα** *ορίζουσα του στοιχείου a_{ij} ενός πίνακα n-διαστάσεων είναι η $(n-1)$ διαστάσεων ορίζουσα που προκύπτει με διαγραφή της i-γραμμής και της j-στήλης της αρχικής ορίζουσας.*

Παράδειγμα 1. *Έστω ότι έχουμε τον ακόλουθο πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

η ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου a_{23} είναι η

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

δηλαδή διαγράφουμε την δεύτερη γραμμή και τρίτη στήλη του πίνακα. Ενώ η ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου a_{32} είναι η

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

δηλαδή έχουμε διαγράψει την τρίτη γραμμή και δεύτερη στήλη του πίνακα.

Παρατήρηση 1. *Όπως σε κάθε τετραγωνικό πίνακα αντιστοιχούμε και έναν πραγματικό αριθμό που είναι η ορίζουσα του, έτσι και σε κάθε στοιχείο της ορίζουσας αντιστοιχούμε και μια ελάσσονα ορίζουσα. Επομένως ο πίνακας A του προηγούμενου παραδείγματος έχει 9 ελάσσονες ορίζουσες.*

Ορισμός. Η **προσημασμένη ελάσσονα** ορίζουσα του στοιχείου a_{ij} είναι η ελάσσονα ορίζουσα του a_{ij} πολλαπλασιασμένη με το $(-1)^{i+j}$ και συμβολίζεται ως A_{ij}.

Παράδειγμα 2. *Έστω ο πίνακας του προηγούμενου παραδείγματος. Η προσημασμένη ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου a_{23} είναι η*

$$(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1(-1-4) = 5$$

ενώ για το στοιχείο a_{32} είναι η

$$(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -1(0+3) = -3.$$

Ορισμός 4. *Η ορίζουσας ενός n διαστάσεων πίνακα είναι το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων με τις αντίστοιχες προσημασμένες ελάσσονες ορίζουσες μιας οποιασδήποτε γραμμής (αντ. μιας οποιασδήποτε στήλης). Το άθροισμα αυτό ονομάζεται* **ανάπτυγμα** *ορίζουσας.*

Για παράδειγμα το ανάπτυγμα της i γραμμής ένος n διαστάσεων πίνακα είναι

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in}.$$

Παρατήρηση 2. *Αφού η ορίζουσα ενός πίνακα κατά απόλυτη τιμή είναι όγκος τότε η τιμή της θα είναι μια και μοναδική και επομένως δεν επιρεάζεται απο την επιλογή γραμμής ή στήλης του αναπτύγματός της.*

Άσκηση 1. *Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα της πρώτης γραμμής, δηλαδή $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. Επομένως έχουμε

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 2. *1. Να βρεθούν οι τιμές των οριζουσών*

$$i)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},\quad ii)\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},\quad iii)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix},\quad iv)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Να δείξετε ότι

$$i)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

$$ii)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

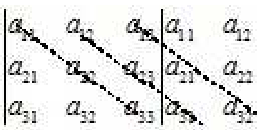
Κανόνας Sarrus

Μόνο για τις ορίζουσες πινάκων $3x3$ υπάρχει ένας ακόμα τρόπος υπολογισμού τους. Η μεθοδολογία έχει τα εξής βήματα:

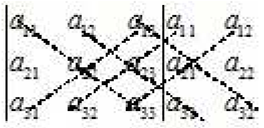
1) Δίπλα στην ορίζουσα επαναλαμβάνουμε τις δυο πρώτες στήλες, δηλαδή

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2) Φέρνουμε τρεις διαγώνιες ευθείες ξεκινώντας απο την κύρια διαγώνιο του πίνακα και δουλεύοντας προς τα δεξιά.



Οι διαγώνιες αυτές ευθείες θα έχουν θετικό πρόσημο και κάθε μια δημιουργεί τα εξής γινόμενα, $a_{11}a_{22}a_{33}, a_{12}a_{23}a_{31}, a_{13}a_{21}a_{32}$.
3) Στην συνέχεια φέρνουμε και άλλες τρείς με αρνητικό πρόσημο που με τη σειρά τους δημιουργούν τα γινόμενα $-a_{13}a_{22}a_{31}, -a_{11}a_{23}a_{32}, -a_{12}a_{21}a_{33}$.



Τέλος, ο κανόνας Sarrus λέει ότι η ορίζουσα του $3x3$ πίνακα θα είναι το άθροισμα των γινομένων

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ιδιότητες των Οριζουσών

Τα επόμενα θεωρήματα μας βοηθούν στον υπολογισμό της τιμής μιας ορίζουσας.

Θεώρημα. *Έστω ο $n \times n$ πίνακας A.*

1. *Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει όταν αντιμεταθέσουμε δύο στήλες (ή γραμμές) του A, τότε $|B| = -|A|$.*
2. *Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει όταν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας στήλης (αντ. γραμμής) του A με ένα αριθμό λ, τότε $|B| = l|A|$.*
3. *Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει όταν προσθέσουμε στα στοιχεία μιας στήλης (αντ. γραμμής) του A τα στοιχεία μιας άλλης στήλης (αντ. γραμμής), τότε $|B| = |A|$.*
4. *Αν δύο γραμμές ή στήλες ενός πίνακα A είναι ίσες τότε $|A| = 0$.*
5. *Αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μια στήλης του πίνακα A είναι μηδέν, τότε $|A| = 0$.*
6. *Αν A, B nxn πίνακες τότε $|AB| = |A||B|$.*
7. *$|A| = |A^T|$.*

Παράδειγμα 3. *Έστω ένας πίνακας $A, 2x2$, τότε από την πρώτη διότητα του Θεωρήματος έχουμε*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

αφού και στις δύο περιπτώσεις $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Για την δεύτερη

$$\begin{vmatrix} ta_{11} & ta_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

αφού και στις δύο περιπτώσεις $ta_{11}a_{22} - ta_{12}a_{21} = t(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$. Για την τρίτη

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

αφού και στις δύο περιπτώσεις $(a_{11} + a'_{11})a_{22} - (a_{12} + a'_{12})a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a'_{11}a_{22} - a'_{12}a_{21}$. Για την τέταρτη περίπτωση έχουμε την ακόλουθη ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Νδεντ Αλλάζοντας την σειρά των γραμμών η πρώτη ιδιότητα θα μας έδινε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

που ισχύει μόνο αν $|A| = 0$. *Για την πέπμτη έχουμε*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Από την προηγούμενη ιδιότητα θα πάρουμε $|A| = 0$ *αφού* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$

Πρόταση 1. *Έστω ένας τριγωνικός πίνακας* A nxn, *τότε η ορίζουσα του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του, δηλαδή*

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

Παρατήρηση 3. *1. Από την ιδιότητα 3 βλέπουμε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα μένει αμετάβλητη μετά απο τις στοιχείωσεις πράξεις ή αλλιώς γραμμοπράξεις* $\Gamma_i \to \Gamma_i + c \cdot \Gamma_j$, *(βλ. κεφάλαιο γραμμικών συστημάτων). Επομένως για τον υπολογισμό μιας μεγάλης ορίζουσας μπορεί κανείς μέσω τον γραμμοπράξεων να δημιουργήσει όπως κάνουμε και στην απαλοιφή Gauss έναν τριγωνικό πίνακα και συνεπώς μέσω της παραπάνω πρότασης να υπολογίσει την ορίζουσα. Ακόμα και αν δεν έρθει ο πίνακας σε τριγωνική μορφή πάλι εποφελούμαστε αφού μέσω της δημιουργίας μηδενικών σοιχείων κάνουμε λιγότερους υπολογισμούς στο ανάπτυγμα. Για παράδειγμα η ορίζουσα*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

μετά απο τις στοιχειώδεις πράξεις καταλήγει στην

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

που έχει ορίζουσα 10.

2. Απο τη μέθοδο απαλοιφής Gauss γνωρίζουμε ότι όταν μηδενίζεται μια ολόκληρη γραμμή μετά απο τις γραμμοπράξεις αυτό σημαίνει ότι έχουμε απειρία λύσεων, δηλαδή ότι κάποιο απο τα διανύσματα του πίνακα A, *όπου* $A \cdot X = B$ *παράγεται απο τα υπόλοιπα επομένως είναι γραμμικά εξαρτημένο. Συνεπώς ένας ακόμα τρόπος υπολογισμού των γραμμικών εξαρτημένων διανυσμάτων είναι και η εύρεση της ορίζουσας του πίνακα* A. *Εαν η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός τότε τα διανύσματα του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση. Αν είναι ίση με το μηδέν τότε είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

Θεώρημα. *Έστω πίνακας* A nxn *τότε*

1. *Ο* A *είναι αντιστρέψιμος ανν* $\det(A) \neq 0$.
2. *Όταν ο* A *είναι αντιστρέψιμος τότε* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Ασκήσεις

1. Με την παραδοχή ότι η τιμή της ορίζουσας του πίνακα $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$ είναι $\det(A) = 5$, να βρείτε τις τιμές των οριζουσών
   i) $\det(3A)$, ii) $\det(2A^{-1})$, iii) $\det((2A)^{-1})$.

2. Για ποιες τιμές του k οι κατωτέρω πίνακες δεν είναι αντιστρέψιμοι;
   i) $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$, ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Συμπληρωματικός Πίνακας

Ορισμός 5. *Έστω ο $n \times n$ πίνακας A και A_{ij} οι προσημασμένες ελάσσονες ορίζουσες των στοιχείων a_{ij} του πίνακα A. Ο πίνακας*

$$adj A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

ονομάζεται **συμπληρωματικός ή πίνακας των προσημασμένων ελάσσονων οριζουσών** *του A και ικανοποιεί τη σχέση*

$$A \cdot adj A = adj A \cdot A = |A| \cdot I$$

όπου I είναι ο αντίστοιχος μοναδιαίος πίνακας.

Παράδειγμα 4. *Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Τότε γιαα να υπολογίσουμε τον συμπληρωματικό του βρίσκουμε αρχικά τις προσημασμένες ελάσσονες ορίζουσες, δηλαδή*

$$\begin{aligned} &A_{11} = 2,\ A_{12} = 6,\ A_{13} = -16, \\ &A_{21} = 4,\ A_{22} = 2,\ A_{23} = 16, \\ &A_{31} = 12,\ A_{32} = -10,\ A_{33} = 16. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα *Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας τότε*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A).$$

Παράδειγμα 5. *Έστω ο πίνακας* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. *Τότε για να βρούμε τον αντίστροφο του αρκεί να υπολογίσουμε την ορίζουσα του. Για τον υπολογισμό της θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα της τρίτης γραμμής για να εποφεληθούμε και απο το μηδέν κάνοντας λιγότερες πράξεις. Άρα*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2A_{13} - 4A_{32} = 64 \neq 0$$

Συνεπώς ο A *αντιστρέφεται με*

$$A^{-1} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}.$$

Μια Μέθοδος Εύρεσης του A^{-1}

Θα περιγράψουμε μια μέθοδο εύρεσης του A^{-1}, εαν υπάρχει, χρησιμοποιώντας της στοιχειώδεις πράξεις που είδαμε στα γραμμικά συστήματα. Η περιγραφή θα γίνει μέσω συγκεκριμένου παραδείγματος.

Παράδειγμα

1. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Τοποθετούμε τον μοναδιαίο πίνακα I_3 δεξιά του A και έχουμε τον πίνακα

$$[A|I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στόχος μας είναι αυτός ο πίνακας να μετατραπεί σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα. Αν αυτός ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι ο μοναδιαίος τότε υπάρχει ο αντίστροφος του A και είναι ο πίνακας δεξιά της διαχωριστικής γραμμής. Αν δεν καταφέρουμε να κατασκευάσουμε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα τότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Δηλαδή θέλουμε

$$[A|I_3] \sim [I_3|A]$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 2R_1, \quad R_3 \to R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 + 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}; \quad R_3 \to (-1)R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad R_2 \to R_2 + R_3, \quad R_1 \to R_1 - 3R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = [I_3|A^{-1}] \quad R_1 \to R_1 - 2R_2$$

Επομένως

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

προκύπτει ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
ο οποίος δείχνει ότι δεν υπάρχει αντίστροφος.