Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Καλώς ήρθατε στην

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Αυτές οι σημειώσεις αποτελούν μια εισαγωγή στο μάθημα, μια μικρή γεύση των πολλαπλών εφαρμογών που έχει η γραμμική Άλγεβρα. Θα προσπαθήσω να αποφύγω όσο μπορώ τις αποδείξεις. Για αυτές παρακαλώ απευθυνθείτε στην βιβλιογραφία που ακολουθεί στο τέλος των σημειώσεων.

Εμείς θα ξεκινήσουμε από το κεφάλαιο των πινάκων. Στο τέλος των σημειώσεων θα καταλάβετε ότι μπορεί να ξεκινήσει να διαβάζει κάποιος τη γραμμική άλγεβρα και από το κεφάλαιο των διανυσματικών χώρων.

Πάμε λοιπόν.

ΠΙΝΑΚΕΣ

Έστω το παρακάτω αντικείμενο

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ο Α ονομάζεται πίνακας (ή μήτρα) διαστάσεων $m \times n$, όπου m είναι το πλήθος των γραμμών και n το πλήθος των στηλών του αντίστοιχα. Έτσι κάθε στοιχείο στον πίνακα Α έχει μοναδική θέση η οποία προσδιορίζεται από τον δείκτη που το ακολουθεί. Για παράδειγμα το στοιχείο a_{34} βρίσκεται στην τρίτη γραμμή και τέταρτη στήλη.

Οι πίνακες συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα και τα αντίστοιχα στοιχεία τους με μικρά. Τα κεφαλαία γράμματα των πινάκων ακολουθούν οι διαστάσεις τους για παράδειγμα $A_{m\times n}$.

Παρατήρηση Το σύνολο των πινάκων των οποίων τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί το συμβολίζουμε με $\Pi_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ενώ το σύνολο των πινάκων των οποίων τα στοιχεία είναι μιγαδικοί αριθμοί το συμβολίζουμε με $\Pi_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Ορισμός: Ένας πίνακας που έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών ονομάζεται **τετραγωνικός.** Οι τετραγωνικοί πίνακες συμβολίζονται μόνο με τον ένα αριθμό των διαστάσεων τους.

Παράδειγμα. Ο Α είναι τετραγωνικός διάστασης 3x3, επομένως μπορεί να συμβολιστεί ως A_3, όπου

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ορισμός: Ένας πίνακας $A_{1\times n}$, ονομάζεται **πίνακας γραμμή** γιατί αποτελείται από μια γραμμή και n στήλες.

Παράδειγμα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$.

Ορισμός: Ένας πίνακας $A_{n\times 1}$, ονομάζεται **πίνακας στήλη** γιατί αποτελείται από μια στήλη και n γραμμές.

Παράδειγμα $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$.

Κάθε πίνακας μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο από διανύσματα γραμμές ή στήλες. Έτσι για παράδειγμα ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}.$$

Έχει τα εξής διανύσματα (γραμμές) $(b_{11}, b_{12}), (b_{21}, b_{22}), (b_{31}, b_{32})$ ή τα $(b_{11}, b_{21}, b_{31}), (b_{12}, b_{22}, b_{32})$ διανύσματα (στήλες). Ένα πράγμα πρέπει να τονίσουμε τώρα και να μην ξεχνάμε: τα διανύσματα μπορεί να έχουμε μάθει από το σχολείο ότι γράφονται έτσι $(\cdot, \cdot, \cdots, \cdot)$, (κυρίως για εξοικονόμηση χώρου) όμως πάντα εμείς πρέπει να τα σκεφτόμαστε ως διανύσματα πίνακες-στήλες.

Κρατάμε όμως μια παρατήρηση στο μυαλό μας: τα παραπάνω διανύσματα ανήκουν σε διαφορετικούς χώρους, στους χώρους $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ αντίστοιχα. (Μέτρα τις συντεταγμένες στο καθένα!)

Συνεχίζουμε.

Ορισμός:. Κάθε τετραγωνικός πίνακας B έχει κύρια διαγώνιο που αποτελείται από τα στοιχεία της μορφής: $b_{11}, b_{22}, b_{33}, \cdots, b_{nn}$. Όταν ένας πίνακας έχει στην κύρια διαγώνιο του έστω και ένα στοιχείο μη μηδενικό και οπουδήποτε αλλού μηδέν τότε ονομάζεται **διαγώνιος**. Για παράδειγμα

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$, όπου $c_{11}, c_{22}, c_{33} \neq 0$ ή $D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ή $d_{22} \neq 0$.

Ορισμός: Εάν όλα τα στοιχεία ενός πίνακα είναι μηδενικά τότε ο πίνακας ονομάζεται **μηδενικός**.

Παράδειγμα Ο μηδενικός πίνακας συμβολίζεται πάντα με το αριθμό 0.

$$0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ένας πολύ χρήσιμος πίνακας είναι ο **μοναδιαίος**.

Ορισμός: Ο **μοναδιαίος** πίνακας είναι τετραγωνικός με όλα τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο του να είναι μονάδες ενώ τα υπόλοιπα να είναι μηδενικά. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με το γράμμα I κεφαλαίο πάντα. Για παράδειγμα

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται **άνω τριγωνικός** (αντ. **κάτω τριγωνικός**) όταν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω (αντ. πάνω) από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Παράδειγμα Ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, ενώ ο πίνακας B είναι κάτω τριγωνικός

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -8 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Ορισμός: Το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου ενός τετραγωνικού πίνακα ονομάζεται **ίχνος** και συμβολίζεται, για παράδειγμα για έναν nxn πίνακα A, ως tr(A), δηλαδή

$$tr(\mathrm{A})=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}+\cdots+\alpha_{nn}$$

Ορισμός: Έστω ένας πίνακας A. Ο πίνακας A^T ονομάζεται **ανάστροφος** του A και κατασκευάζεται αναστρέφοντας τις γραμμές του A σε στήλες ή αλλιώς κάνοντας τις στήλες του A γραμμές. Το ίδιο είναι εάν αποφασίσει κανείς να κάνει τις γραμμές στήλες.

Παράδειγμα Έστω A ο παρακάτω τετραγωνικός πίνακας.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mu\varepsilon \quad A^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση Δεν χρειάζεται για να αναστρέφεται ένας πίνακας να είναι τετραγωνικός.

Πρόταση Αν $A,B\in\Pi_{mxn}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε ισχύουν τα παρακάτω

1. $\left(A^T\right)^T=A,$
2. $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T,$
3. $\left(\lambda A\right)^T=\lambda A^T,$
4. $\left(A\cdot B\right)^T=B^T\cdot A^T$, (εάν ορίζεται η πράξη πολλαπλασιασμού, βλέπε πολλαπλασιασμός πινάκων)

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας Α ονομάζεται **συμμετρικός** (αντ**. αντισυμμετρικός**) εάν ισχύει η σχέση

$$A=A^T \text{ (αντ. } A=-A^T\text{)}$$

Παράδειγμα Έστω ο παρακάτω συμμετρικός πίνακας Α

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

Παρατηρήστε τα στοιχεία του πίνακα. Η κύρια διαγώνιος παραμένει σταθερή και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι συμμετρικά ως προς αυτήν.

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας Α ονομάζεται **ορθογώνιος** εάν ισχύει η σχέση

$$A\cdot A^T=A^T\cdot A=I_n$$

Μια μικρή παρένθεση: τα στοιχεία ενός πίνακα μπορεί να είναι πραγματικοί αριθμοί αλλά και μιγαδικοί ή φανταστικοί. Επομένως μπορούμε επίσης να έχουμε τους ακόλουθους τύπους πινάκων.

Ορισμός: Ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι μιγαδικοί αριθμοί ονομάζεται **ερμιτιανός**.

Παράδειγμα Ο πίνακας Α είναι ερμιτιανός.

$$A=\begin{bmatrix} 1+3i & 0 \\ -2-i & -7i \\ 4+6i & 2 \end{bmatrix}.$$

Εμείς εδώ θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με το σύνολο $\Pi_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$.

Πάμε στον ορισμό των βασικών πράξεων.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Ορισμός: Η πρόσθεση των πινάκων ορίζεται μόνο ανάμεσα σε πίνακες **ίδιων** διαστάσεων, δηλαδή πίνακες ίδιου αριθμού γραμμών και στηλών.

Παράδειγμα Έστω δύο πίνακες Α, Β διαστάσεων 3x2 τότε η πρόσθεση τους θα είναι ένας νέος πίνακας Γ ίδιων διαστάσεων του οποίου τα στοιχεία στην i γραμμή και j στήλη ακολουθούν το αλγόριθμο $a_{ij}+b_{ij}=\gamma_{ij}$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & & \beta_{2n} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & & \beta_{3n} \\ \vdots & & & & \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & & \beta_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \cdots & \gamma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \gamma_{m3} & \cdots & \gamma_{mn} \end{bmatrix}$$

Για να δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα.

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Όπως γνωρίζουμε η πρόσθεση μας βοηθάει να ορίσουμε την αφαίρεση.

Ορισμός: Η αφαίρεση δύο πινάκων, δηλαδή Α-Β, είναι η πρόσθεση του αντίθετου στοιχείου του δεύτερου στον πρώτο, Α+(-Β)

$$A+(-B)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 5\\ 4 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-7 & 0\\ -1 & -2\\ -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ -3 & 3\\ 3 & -4\end{bmatrix}.$$

Ορισμός: Αν δύο πίνακες Α,Β είναι ίσοι τότε αυτό σημαίνει ότι τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, δηλαδή

$$A=B \;\Rightarrow\; a_{ij}=b_{ij}\;\;\forall\ \text{i,j}.$$

Πρόταση: Αν $A,B,\Gamma\in\Pi_{mxn}$ τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

1. Α+Β=Β+Α, (αντιμεταθετική)
2. Α+(Β+Γ)=(Α+Β)+Γ, (προσεταιριστική)
3. Α+0=0+Α=Α, (ουδέτερου στοιχείου)
4. Α+(-Α)=(-Α)+Α=0, (αντίθετου στοιχείου)

όπου με 0 συμβολίζουμε τον μηδενικό πίνακα ίδιου μεγέθους με τον Α για να επιτρέπεται η πράξη.

Συνεχίζοντας ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα.

ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Ορισμός: Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός τότε ο πολλαπλασιασμός $\lambda\cdot A$ που δίνει έναν νέο πίνακα Γ του οποίου τα στοιχεία ακολουθούν τον αλγόριθμο $\lambda\cdot a_{ij}=\gamma_{ij}$, δηλαδή

$$\Gamma=\lambda\cdot A=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \cdots & \lambda a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & & \gamma_{2n}\\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & & \gamma_{3n}\\ & & & & \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \gamma_{m3} & & \gamma_{mn}\end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα Έστω ο Α να είναι ο ίδιος με το προηγούμενο αριθμητικό παράδειγμα και λ=2 τότε έχουμε

$$\Gamma=2\cdot A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -4 & 10\\ 8 & -2\end{bmatrix} \qquad (2)$$

Παρατήρηση: 1. Η πρόσθεση στο σύνολο των πινάκων ονομάζεται **εσωτερική πράξη** και αυτό είναι γιατί ορίζεται ανάμεσα σε στοιχεία από το ίδιο σύνολο δίνοντας μας ένα νέο στοιχείο που θα ανήκει και αυτό στο ίδιο σύνολο.

2. Η πράξη του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα όμως ονομάζεται **εξωτερική πράξη** γιατί ορίζεται ανάμεσα σε ένα αριθμό που τον παίρνουμε από το σύνολο των πραγματικών αριθμών και έναν πίνακα. Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής είναι ένας νέος πίνακα που θα ανήκει στο ίδιο σύνολο πινάκων.

3. Και η εσωτερική πράξη αλλά η εξωτερική πράξη **δεν** αλλάζουν το μέγεθος, δηλαδή τις διαστάσεις των πινάκων που μας δίνουν για αποτέλεσμα. Παραμένουμε δηλαδή στο ίδιο σύνολο από το οποίο ξεκινήσαμε, βλέπε σχέση (1) και (2).

Πρόταση: Αν $A,B\in\Pi_{mxn},\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

1. (κ+λ)A=κA+λA,
2. λ(A+B)=λA+λB,
3. κ(λA)=(κλ)A,
4. 1A=A.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι κάπως πιο ιδιαίτερος. Αρχικά προϋποθέτει οι διαστάσεις των πινάκων που συμμετέχουν στην πράξη να είναι πολύ συγκεκριμένες, δηλαδή αν το ζητούμενο είναι $A\cdot B$ πρέπει οι στήλες του πίνακα Α να είναι ίδιου αριθμού με τις γραμμές του Β. Εάν κάτι τέτοιο δεν ισχύει τότε δεν μπορεί να ορισθεί η πράξη του πολλαπλασιασμού ανάμεσα στους πίνακες αυτούς. Τώρα, συνεχίζοντας ας υποθέσουμε ότι ικανοποιείται η προϋπόθεση αυτή πιο θα είναι το αποτέλεσμα της πράξης αυτής; Το γινόμενο αυτό θα μας δώσει ένα νέο πίνακα του οποίου οι διαστάσεις ακολουθούν το παρακάτω σχεδιάγραμμα.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times r}=\Gamma_{m\times r}$$

Πρέπει να είναι ίδια

Η διάσταση του πίνακα που δημιουργείται.

Επομένως ο πίνακας Γ θα έχει το ίδιο αριθμό γραμμών με τον πίνακα Α και τον ίδιο αριθμό στηλών με τον πίνακα Β. Για αρχή είναι ωραίο το παραπάνω κολπάκι γιατί έτσι δεν πρόκειται να κάνουμε λάθος. Πάμε να δούμε τώρα πως κατασκευάζεται ο πίνακας Γ.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots & \beta_{1r} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2r} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \cdots & \beta_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & . & \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \beta_{n3} & & \beta_{nr} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & & \gamma_{1r} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & & \gamma_{2r} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & & \gamma_{3r} \\ & & & & \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & \gamma_{nr} \end{bmatrix}$$

όπου τα στοιχεία του Γ υπολογίζονται ως εξής:

Η πρώτη στήλη είναι

$$\begin{aligned} &a_{11}\cdot\beta_{11}+a_{12}\cdot\beta_{21}+a_{13}\cdot\beta_{31}+\cdots+a_{1n}\cdot\beta_{n1}=\gamma_{11}\\ &\alpha_{21}\cdot\beta_{11}+a_{22}\cdot\beta_{21}+a_{23}\cdot\beta_{31}+\cdots+a_{2n}\cdot\beta_{n1}=\gamma_{21}\\ &a_{31}\cdot\beta_{11}+a_{32}\cdot\beta_{21}+a_{33}\cdot\beta_{31}+\cdots+a_{3n}\cdot\beta_{n1}=\gamma_{31}\\ &\vdots\\ &a_{m1}\cdot\beta_{11}+a_{m2}\cdot\beta_{21}+a_{m3}\cdot\beta_{31}+\cdots+a_{mn}\cdot\beta_{n1}=\gamma_{m1} \end{aligned}$$

Η δεύτερη στήλη είναι

$$\begin{aligned} &a_{11}\cdot\beta_{12}+a_{12}\cdot\beta_{22}+a_{13}\cdot\beta_{32}+\cdots+a_{1n}\cdot\beta_{n2}=\gamma_{12}\\ &a_{21}\cdot\beta_{12}+a_{22}\cdot\beta_{22}+a_{23}\cdot\beta_{32}+\cdots+a_{2n}\cdot\beta_{n2}=\gamma_{22}\\ &a_{31}\cdot\beta_{12}+a_{32}\cdot\beta_{22}+a_{33}\cdot\beta_{32}+\cdots+a_{3n}\cdot\beta_{n2}=\gamma_{32}\\ &\vdots\\ &a_{m1}\cdot\beta_{12}+a_{m2}\cdot\beta_{22}+a_{m3}\cdot\beta_{32}+\cdots+a_{mn}\cdot\beta_{n2}=\gamma_{m2} \end{aligned}$$

Ομοίως κατασκευάζονται οι υπόλοιπες μέχρι την τελευταία στήλη, δηλαδή

$$\begin{aligned} &a_{11}\cdot\beta_{1r}+a_{12}\cdot\beta_{2r}+a_{13}\cdot\beta_{3r}+\cdots+a_{1n}\cdot\beta_{nr}=\gamma_{1r}\\ &a_{21}\cdot\beta_{1r}+a_{22}\cdot\beta_{2r}+a_{23}\cdot\beta_{3r}+\cdots+a_{2n}\cdot\beta_{nr}=\gamma_{2r}\\ &a_{31}\cdot\beta_{1r}+a_{32}\cdot\beta_{2r}+a_{33}\cdot\beta_{3r}+\cdots+a_{3n}\cdot\beta_{nr}=\gamma_{3r}\\ &\vdots\\ &a_{m1}\cdot\beta_{1r}+a_{m2}\cdot\beta_{2r}+a_{m3}\cdot\beta_{3r}+\cdots+a_{mn}\cdot\beta_{nr}=\gamma_{mr} \end{aligned}$$

Μεθοδολογία: Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα Α με την πρώτη στήλη του Β δημιουργώντας το στοιχείο της πρώτης γραμμής και πρώτης στήλης του πίνακα Γ. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή πάλι του Α με τη δεύτερη στήλη του Β δημιουργώντας έτσι το στοιχείο της πρώτης γραμμής και δεύτερης στήλης του πίνακα Γ. Ακολουθούμε την διαδικασία αυτή πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες του πίνακα Β με την πρώτη γραμμή του πίνακα Α δημιουργώντας έτσι όλα τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του πίνακα Γ. Όταν τελειώσουμε από στήλες του Β προχωράμε στην επόμενη γραμμή του πίνακα Α πολλαπλασιάζοντας την με κάθε στήλη του Β.

Παρατήρηση: Ένας διαφορετικός τρόπος προσέγγισης του πολλαπλασιασμού των πινάκων είναι να σκεφτούμε τους πίνακες ως μια συλλογή διανυσμάτων γραμμών και στηλών. Επομένως ο πολλαπλασιασμός δυο πινάκων είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων γραμμών του πίνακα Α με τα διανύσματα στήλη του Β.

Παραδείγματα. Ένας πίνακας $A_{2\times 3}$ όταν πολλαπλασιαστεί με το πίνακα $B_{3\times 2}$ θα μας δώσει το ακόλουθο πίνακα

$$A\cdot B=\Gamma_{2\times 2}$$

αλλά και το

$$B\cdot A=\Gamma_{3\times 3}$$

Ενώ ένας πίνακας $A_{1\times 3}$ όταν πολλαπλασιαστεί με ένα πίνακα $B_{3\times 2}$ θα μας δώσει

$$A\cdot B=\Gamma_{1\times 2}$$

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τα παραπάνω και σε αντίθεση με το σύνολο των πραγματικών αριθμών, για παράδειγμα, δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στο σύνολο των πινάκων και μάλιστα όπως φαίνεται στο δεύτερο παράδειγμα ο πολλαπλασιασμός μπορεί να μην ορίζεται, συγκεκριμένα δεν μπορεί να υπάρξει το γινόμενο του $B_{3\times 2}$ με τον $A_{1\times 3}$.

Παράδειγμα. Έστω $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 10 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ τότε έχουμε

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 10 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 6 \\ -14 & 8 \\ 46 & 20 \end{bmatrix}$$

Ενώ η πράξη $B\cdot A$ δεν ορίζεται.

Πρόταση (Άλγεβρα): Έστω A,B,Γ πίνακες τέτοιοι ώστε να ορίζονται οι παρακάτω πολλαπλασιασμοί τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

1. $A\cdot\left(B\cdot\Gamma\right)=A\cdot\left(B\cdot\Gamma\right)$, (προσεταιριστική)
2. $A\cdot\left(B+\Gamma\right)=A\cdot B+A\cdot\Gamma$, (επιμεριστηκή από τα αριστερά)
3. $\left(B+\Gamma\right)\cdot A=B\cdot A+\Gamma\cdot A$, (επιμεριστηκή από τα δεξιά)
4. $\lambda\cdot\left(A\cdot B\right)=\left(\lambda\cdot A\right)\cdot B=A\cdot\left(\lambda\cdot B\right)$,
5. $I\cdot A=A\cdot I=A$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας.

Παρατήρηση: Τελειώνοντας με τις βασικές αλγεβρικές πράξεις έχουμε ότι δεν ορίζεται η διαίρεση στο σύνολο των πινάκων. Σκέψου! Αν ένας πίνακας δεν είναι τίποτα άλλο από ένα σύνολο από διανύσματα, είτε τα δεις ως διανύσματα σειρές είτε ως διανύσματα στήλες τότε όπως στα διανύσματα δεν ορίζεται η πράξη της διαίρεσης έτσι και στους πίνακες.

Το γεγονός αυτό όμως μας γεννάει την επόμενη ερώτηση.

Ερώτηση1: Πως μπορεί να λύσει κανείς την πιο απλή εξίσωση πινάκων όπως

$$A\cdot X = B$$

όπου Α, Χ, Β πίνακες διαστάσεων τέτοιων ώστε να ορίζεται η πράξη του πολλαπλασιασμού;

ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ας κάνουμε μια μικρή επιστροφή στο σχολείο και στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για την πράξη της πρόσθεσης ξέρουμε την ύπαρξη του βασικότερου στοιχείου που είναι το ουδέτερο, στην περίπτωση μας το μηδέν. Το στοιχείο αυτό μας βοηθάει στον ορισμό του αντίθετου στοιχείου του συνόλου που δεν είναι άλλο από το –x, για κάθε στοιχείο x. Στην πράξη του πολλαπλασιασμού έχουμε την ύπαρξη του μοναδιαίου στοιχείου, δηλαδή του στοιχείου που ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση,

$$x\cdot e = e\cdot x = x$$

για κάθε x. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών το στοιχείο αυτό είναι η μονάδα. Η μονάδα με την σειρά της μας βοηθάει στο να ορίσουμε το αντίστροφο στοιχείο x^{-1} για κάθε στοιχείο $x\in\mathbb{R}^*$ το οποίο ικανοποιεί τη σχέση

$$x\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x = e.$$

Κοιτάζοντας τώρα τους τετραγωνικούς πίνακες βλέπουμε ότι ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα: Το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων ορίζει μια **άλγεβρα** πάνω στο $\mathbb{R}$, δηλαδή ικανοποιεί τις ιδιότητες της Πρότασης (Άλγεβρα) με μοναδιαίο στοιχείο το μοναδιαίο ή ταυτοτικό πίνακα Ι.

Παρατήρηση: Για την πράξη του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των πραγματικών αριθμών όπως αναφέραμε παραπάνω ορίζεται το αντίστροφο στοιχείο x^{-1} για κάθε στοιχείο $x\in\mathbb{R}^*$. Για την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων στο σύνολο των τετραγωνικών πινάκων όμως γενικά δεν υπάρχει αντίστροφο στοιχείο, δηλαδή δεν υπάρχει πάντα πίνακας Β τέτοιος ώστε $A\cdot B = B\cdot A = I$ για κάθε Α.

Παράδειγμα: Ο πίνακας Α

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν έχει αντίστροφο πίνακα αφού

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x-z & y-w \\ -x+z & -y+w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-z=1 \\ -x+z=0 \end{cases} \kappa\alpha\iota \begin{cases} y-w=0 \\ -y+w=1 \end{cases}$$

που είναι άτοπο.

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας Α θα λέμε ότι είναι **αντιστρέψιμος** εάν έχει συμμετρικό στοιχείο ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού, δηλαδή

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$$

όπου $A,\ A^{-1}$ **τετραγωνικοί** πίνακες ίδιας διάστασης.

Παρατήρηση: Ο αντίστροφος ενός πίνακα είναι μοναδικός.

Άσκηση Να αποδείξετε ότι εάν υπάρχει ο αντίστροφος ενός πίνακα τότε αυτός είναι μοναδικός.

Λύση Έστω ότι ο πίνακας Α έχει δύο αντίστροφους, δηλαδή

$$A\cdot B=B\cdot A=I\ \ \kappa\alpha\iota\ A\cdot\Gamma=\Gamma\cdot A=I$$

με $\Gamma\neq B$ τότε έχουμε

$$\Gamma=\Gamma\cdot I=\Gamma\cdot\left(A\cdot B\right)=\left(\Gamma\cdot A\right)\cdot B=I\cdot B=B.$$

Πρόταση: Αν A,B τετραγωνικοί και αντιστρέψιμοι πίνακες τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

1. $\left(A\cdot B\right)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$,
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$,
3. $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$,\
4. $A\cdot B=A\cdot\Gamma\Rightarrow B=\Gamma$ (η ιδιότητα διαγραφής δεν ισχύει όταν ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος)

Παρατήρηση: Η σχέση $A\cdot B=0$ δεν συνεπάγεται ότι $A=0$ ή $B=0$. Επειδή ο πολλαπλασιασμός των πινάκων έχει ορισθεί ως το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων-γραμμών του πίνακα Α με τα διανύσματα-στήλες του Β, το γινόμενο τους μπορεί να είναι μηδέν χωρίς κανένας από τους δύο να είναι μηδενικός πίνακας. Στην περίπτωση όμως που ο Α (αντ. ο Β) αντιστρέφεται τότε συμπεραίνουμε ότι $B=0$ (αντ. ο $A=0$).

Ερώτηση: Αν τώρα υπάρχει αντίστροφος τότε τι κερδίζουμε;

Αρχικά μπορούμε να απαντήσουμε στην Ερώτηση 1 και να βρούμε την λύση της εξίσωσης

Άσκηση: Να βρεθεί ο X όταν

$$A \cdot X = B. \quad (*)$$

Λύση: Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με το A^{-1} και τα δύο σκέλη της εξίσωσης για να πάρουμε

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Προσοχή επειδή δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν μπορούμε να κάνουμε του κεφαλιού μας. Όταν πολλαπλασιάζουμε μια σχέση πρέπει να τηρούμε την πλευρά της πράξης αυστηρά.

Επομένως έχουμε

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

1. ΜΈΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ A^{-1}

Θα ξεκινήσουμε με τον μπακαλίστικο τρόπο ο οποίος είναι φοβερά αντιαισθητικός και χρονοβόρος αλλά είναι ο μοναδικός που δεν χρειάζεται παραπάνω θεωρία.

Θα πάρουμε την σχέση (*) και θα θέσουμε τόσους αγνώστους όσα και τα στοιχεία του πίνακα A^{-1}.

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε τον ακόλουθο πίνακα A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Τώρα αυτός είναι συμμετρικός αλλά αυτό δεν μας απασχολεί τώρα και υποθέτουμε ότι υπάρχει ο αντίστροφος του τον ορίζουμε ως

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, δηλαδή

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γνωρίζουμε πολλαπλασιασμό πινάκων πλέον και άρα θα πάρουμε

$$\begin{bmatrix} 2a-d+g & 2d-e+h & 2c-f+i \\ -a+d & -b+e & -c+f \\ a+6g & b+6h & c+6i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

που από την ισότητα θα καταλήξουμε σε ένα 9x9 σύστημα, επειδή επιλέξαμε ένα 3x3 πίνακα. Θα ήταν σαφώς χειρότερα για μεγαλύτερο σε διάσταση πίνακα.

Ας λύσουμε από περιέργεια το σύστημα

$$\begin{cases} 2a-d+g=1 \\ -a+d=0 \\ a+6g=0 \end{cases}, \begin{cases} 2d-e+h=0 \\ -b+e=1 \\ b+6h=0 \end{cases}, \begin{cases} 2c-f+i=1 \\ -c+f=0 \\ c+6i=0 \end{cases}.$$

Λοιπόν μετά από πράξεις έχουμε

….

Σίγουρα θα υπάρχει ένας πιο γρήγορος τρόπος! (Βλέπε κεφάλαιο α) Χαρακτηριστικά Μεγέθη, β) Γραμμικά Συστήματα)