Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΜΑΡΙΑ-ΕΛΕΝΗ ΠΟΥΛΟΥ

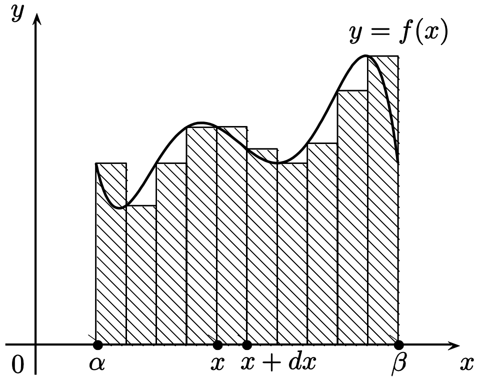
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Έστω $f/[\alpha,\beta]$ μια φραγμένη συνάρτηση και δ μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \beta.$$

Τότε χωρίζουμε το διάστημα [α,β] σε κλειστά υποδιαστήματα της μορφής $[x_i, x_{i+1}]$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για $f \geq 0$



Στόχος μας είναι η κατασκευή ορθογωνίων με βάση $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ και ύψος την μέγιστη τιμή της συνάρτησης στα διαστήματα αυτά, δηλαδή την $M_i(f)$

$$M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Στην συνέχεια ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με ύψος όμως την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης, δηλαδή την $m_i(f)$.

$$m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Ορίζομε τα αθροίσματα

$$U(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i \text{ και } L(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i$$

τα οποία ονομάζονται αντίστοιχα **άνω** και **κάτω άθροισμα** της συνάρτησης f για τη διαμέριση δ.

Στη συνέχεια παίρνουμε την διαμέριση δ με ύψος τις τιμές ενδιάμεσων σημείων της συνάρτησης, δηλαδή $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, τότε το άθροισμα

$$S(f,\delta,\gamma) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ονομάζεται **ενδιάμεσο άθροισμα** της συνάρτησης f για τη διαμέριση δ και την επιλογή γ.

Με άλλα λόγια, το εμβαδό Ε θα είναι το όριο μιας ακολουθίας από ενδιάμεσα αθροίσματα, δηλαδή

$$E = \lim_{n\to\infty} S(f,\delta_n,\gamma_n)$$

όπου (δ_n) είναι μια ακολουθία διαμερίσεων της $[\alpha,\beta]$, δηλαδή έχουμε

$$\mathbf{E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}.$$

Οι αριθμοί α, β ονομάζονται **άκρα του ορισμένου ολοκληρώματος**.

Το σύμβολο του ορισμένου ολοκληρώματος επεκτείνεται και όταν $\beta \leq \alpha$, ως εξής:

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0 \text{ και } \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \text{ όταν } \beta<\alpha.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

1. Αν οι συναρτήσεις $f, g/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμες και $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση $\kappa f + \lambda g/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει η σχέση

$$\int_\alpha^\beta (\kappa f + \lambda g)(x)\,dx = \kappa\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \lambda\int_\alpha^\beta g(x)\,dx.$$

2. Αν οι συναρτήσεις $f, g/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμες και $f(x) \le g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ τότε ισχύει ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

3. Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη με $\kappa \le f(x) \le \lambda$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση $\varphi/[\kappa,\lambda]$ είναι συνεχής, τότε η συνάρτηση $h = \varphi \circ f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.

   Η ιδιότητα αυτή έχει ενδιαφέρουσες εφαρμογές:
   Το τετράγωνο $f^2/[\alpha,\beta]$ μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f/[\alpha,\beta]$, το γινόμενο $f \cdot g/[\alpha,\beta]$ δύο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, η n-οστή ρίζα $\sqrt[n]{f}/[\alpha,\beta]$ μιας μη αρνητικής, ολοκληρώσιμης συνάρτησης και τέλος η απόλυτη τιμή $|f|/[\alpha,\beta]$ μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f/[\alpha,\beta]$ είναι όλες ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού
Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $\xi \in [\alpha,\beta]$, τότε η συνάρτηση $F/[\alpha,\beta]$ με

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$$

είναι παραγωγίσιμη στο ξ και ισχύει ότι $F'(\xi) = f(\xi)$.

Παράδειγμα

Για τον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης $G(x) = \int_0^{x^3} \frac{1}{2+\sqrt{t}}dt/\mathbb{R}$, αρχικά βλέπουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2+\sqrt{x}}/[0,+\infty)$ είναι συνεχής, και άρα από το πρώτο Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε ότι η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη, με

$$F'(x) = \frac{1}{2+\sqrt{x}} \text{ για κάθε } x \in [0,+\infty).$$

Επομένως θέτοντας $g(x) = x^3$, προκύπτει ότι

$$G'(x) = (F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = \frac{3x^2}{2+\sqrt{g(x)}} = \frac{2x+3}{2+\sqrt{x^3}}.$$

Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού
Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής και $F/[\alpha,\beta]$ είναι μια παράγουσά της, τότε ισχύει ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha).$$

Παράδειγμα

Για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x dx$$

θέτουμε $y = \cos x$. Τότε είναι $dy = -\sin x dx$ και με την αλλαγή των άκρων έχουμε y=1 και y=1/2. Επομένως

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} y^2 dy = \left[-\frac{y^3}{3}\right]_1^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{24}.$$

Θεώρημα Μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$ με

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha).}$$

Το θεώρημα αυτό δηλώνει ότι η μέση τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης $f/[\alpha,\beta]$ λαμβάνεται από την τη συνάρτηση σε κάποιο σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$.

Βασικές μέθοδοι υπολογισμού του ορισμένου ολοκληρώματος.

1. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση,
2. Παραγοντική Ολοκλήρωση.

Παράδειγμα

Για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$$

θέτουμε $y = e^x$ οπότε έχουμε

$$e^x dx = dy$$

Επομένως

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx = \int_1^e \frac{y}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{2}\left[\ln\left(y^2+1\right)\right]_1^e = \frac{1}{2}\left(\ln\left(e^2+1\right) - \ln 2\right).$$

Παράδειγμα

Για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int x \cos(2x) dx$$

χρησιμοποιούμε την παραγοντική ολοκλήρωση βρίσκοντας την παράγουσα του συνημιτόνου, δηλαδή

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos(2x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\sin(2x))' dx = \frac{1}{2}[x \sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin(2x) dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8}(-2+\pi)$$

ΕΜΒΑΔΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

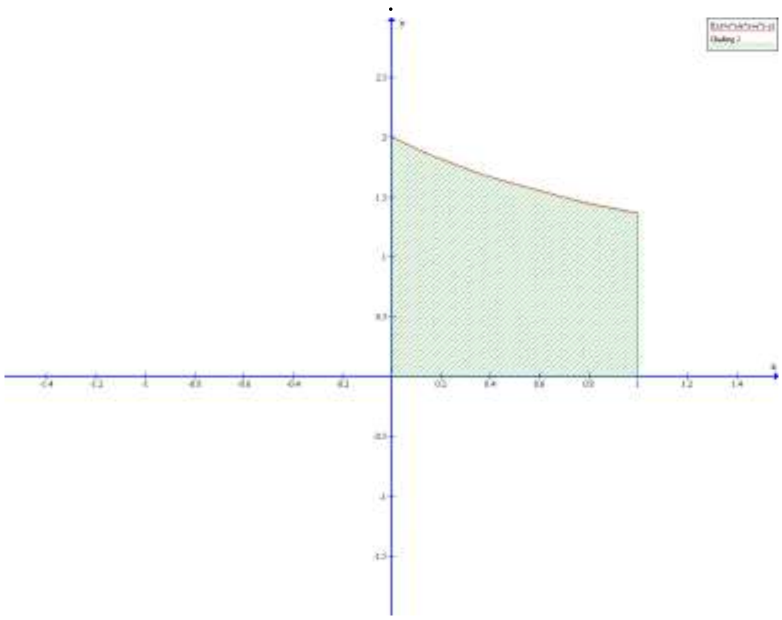
Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ τότε μπορούμε να διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν η συνάρτηση f είναι μη αρνητική στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδό Ε του χωρίου R θα είναι

$$\mathbf{E=\int_\alpha^\beta f(x)dx}$$

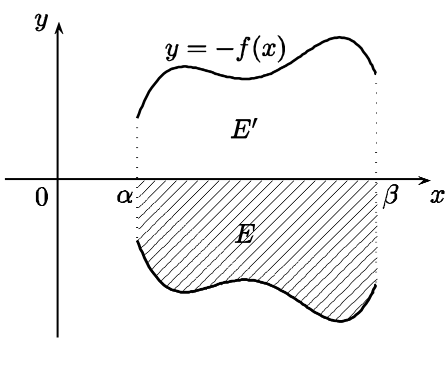
Παράδειγμα

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$ έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση



2. Αν η συνάρτηση f είναι μη θετική στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδό Ε του χωρίου R θα ισούται με το αντίστοιχο εμβαδό E' της μη αρνητικής συνάρτησης $-f$, οπότε

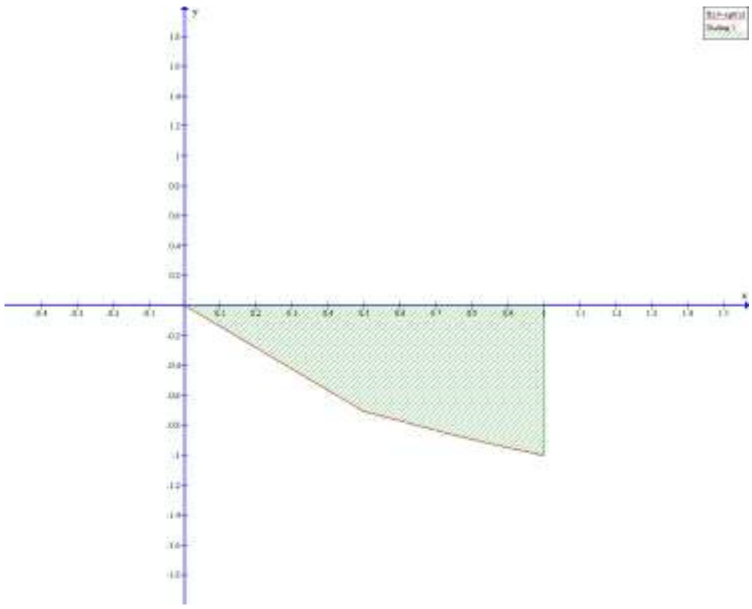
$$\mathbf{E=-\int_\alpha^\beta f(x)dx}.$$



Παράδειγμα

Για να υπολογίσουμε το εμβαδό της συνάρτησης $f(x)=-\sqrt{x}$ που περικλείεται από τις ευθείες x=0 και x=1

$$E = -\int_0^1 \left(-\sqrt{x}\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$



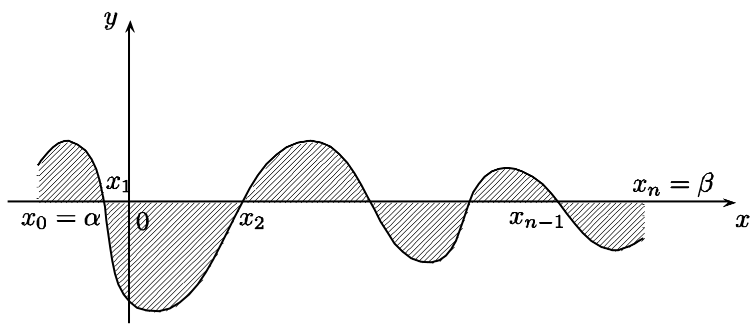
3. Αν η συνάρτηση f δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε η γραφική παράστασή της θα τέμνει τον άξονα των τετμημένων σε ορισμένα σημεία, τα οποία μαζί με τα άκρα του διαστήματος [α,β] θα αποτελούν μια διαμέριση, δηλαδή

$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \beta.$$

Επομένως το ολοκλήρωμα της συνάρτησης θα είναι

$$\mathbf{E} = \int_\alpha^\beta |\mathbf{f(x)}|\mathbf{dx} = \left|\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{f(x)dx}\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{f(x)dx}\right| + \cdots + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{f(x)dx}\right|.$$

Όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα η μελέτη της μονοτονίας της συνάρτησης μας είναι απαραίτητα για να μπορέσει κανείς να διώξει και το απόλυτο.



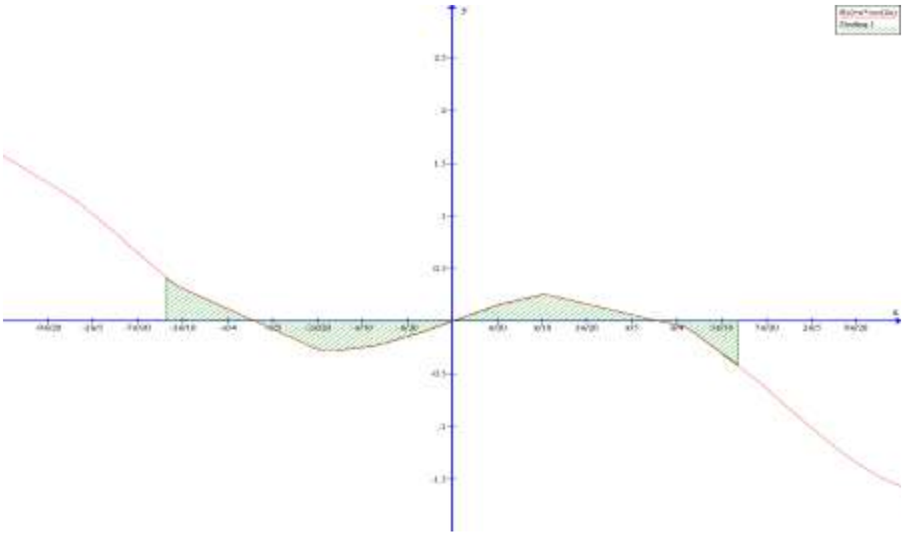
Παράδειγμα

Για τον υπολογισμό του εμβαδού $I = \int_{-1}^{1} x\cos(2x)dx$ έχουμε την ακόλουθη διάσπαση των άκρων

$$I=\int_{-1}^{1} x\cos(2x)\,dx=\int_{-1}^{-\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,dx-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} x\cos(2x)\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{1} x\cos(2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_{-1}^{-\frac{\pi}{4}}-\left[\frac{1}{2}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}+\left[\frac{1}{2}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$-\left[\frac{1}{2}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{1}=$$

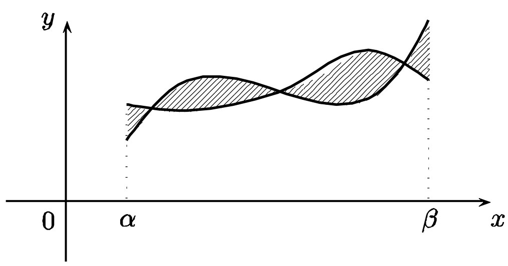


Εμβαδό μεταξύ των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων

Αν $f,g/[\alpha,\beta]$ είναι δυο συνεχείς συναρτήσεις, τότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ δίδεται από τον τύπο

$$E=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-g(x)\right|dx$$

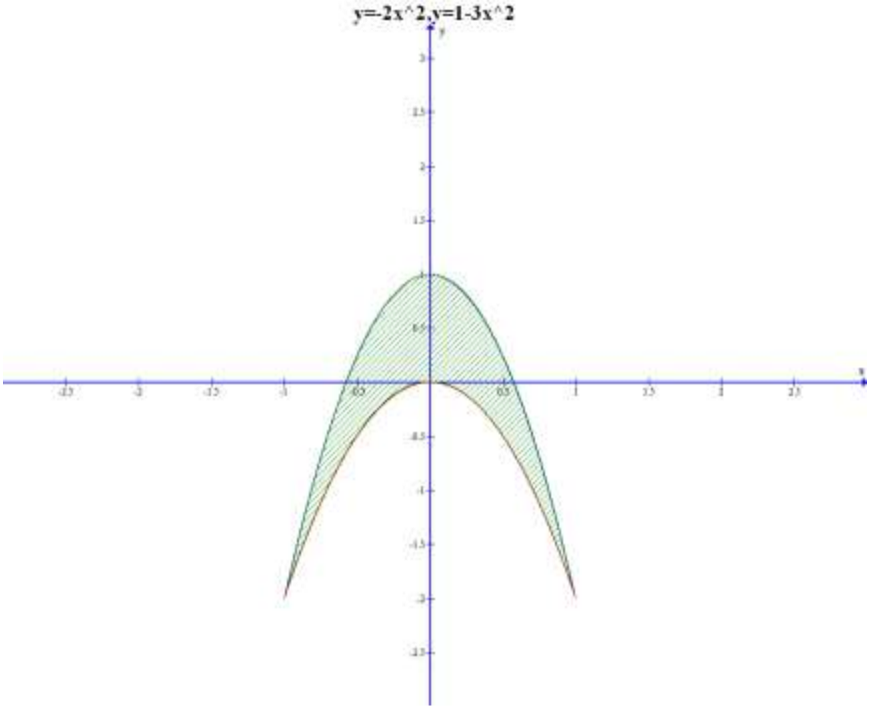
όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Παράδειγμα

Για να υπολογίσουμε το εμβαδό που περικλείεται ανάμεσα στις συναρτήσεις $y=-2x^2, y=1-3x^2$ αρχικά υπολογίζουμε τα σημεία τομής τους και βλέπουμε ότι τέμνονται στα x=1, x=-1. Συνεπώς έχουμε

$$E=\int_{-1}^{1}\left|-2x^2-1+3x^2\right|dx=-\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}.$$



Παράδειγμα

Για το υποογισμό του εμβαδού που περικλείεται ανάμεσα στις $y = x^2 - 2x, y = x$ και την ευθεία x=4 έχουμε

$$E = \int_0^4 \left| x^2 - 2x - x \right| dx = -\int_0^3 \left(x^2 - 3x \right) dx + \int_3^4 \left(x^2 - 3x \right) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_3^4 = \frac{19}{3}.$$