Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΜΑΡΙΑ-ΕΛΕΝΗ ΠΟΥΛΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A. Μια συνάρτηση F/A με την ιδιότητα

$$F'(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in A$ ονομάζεται **παράγουσα** ή **αντιπαράγωγος** της συνάρτησης f.

Πρόταση: Δύο οποιεσδήποτε αντιπαράγωγοι της ίδιας συνάρτησης διαφέρουν κατά μια σταθερά, δηλαδή αν $F(x)$ και $G(x)$ είναι δύο αντιπαράγωγες της ίδιας συνάρτησης τότε θα έχουμε

$$F(x) = G(x) + c$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

Το σύνολο όλων των παραγουσών συναρτήσεων μιας συνάρτησης f ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f και σημειώνεται με $\int f(x)dx$

δηλαδή

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

όπου F είναι μια παράγουσα της f και $c \in \mathbb{R}$.

Η ολοκλήρωση και η παραγώγιση μπορούν να θεωρηθούν σαν αντίστροφες πράξεις, δηλαδή ισχύει ότι

$$\int f'(x)dx = f(x) + c \quad \text{και} \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τους πίνακες των βασικών παραγωγίσεων προκύπτουν τα παρακάτω.

Βασικά αόριστα ολοκληρώματα

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, όπου $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. $\int x^{-1}dx = \ln|x| + c$.
3. $\int \alpha^{x}dx = \frac{\alpha^{x}}{\ln\alpha} + c$, όπου $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.
   Ειδικά, $\int e^{x}dx = e^{x} + c$.
4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$.
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$.
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}\, x + c$.
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{ctg}\, x + c$.
8. $\int \sinh x\, dx = \cosh x + c$.

9. $\int \cosh x\, dx = \sinh x + c$.

10. $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \mathrm{tgh}\, x + c$.

11. $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\mathrm{ctgh}\, x + c$.

12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$.

13. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \mathrm{arctg}\, x + c$.

Ιδιότητες:

1. $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx,$
2. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$

Όταν μιλάμε για τα βασικά ολοκληρώματα ακολουθούμε την παραπάνω λίστα ολοκληρωμάτων. Για τον υπολογισμό όμως πιο πολύπλοκων ολοκληρωμάτων μια από τις μεθοδολογίες που χρησιμοποιούμε είναι η ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Η **μέθοδος της αντικατάστασης** ή **αλλαγής μεταβλητής** στηρίζεται στον επόμενο τύπο:

$$\int (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(y) dy \qquad (1)$$

όπου f είναι μία συνάρτηση με παράγουσα και $y = \varphi(x)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $R(\varphi) \subseteq D(f)$.

Στόχος μας είναι αρχικά στο ολοκλήρωμα που προκύπτει να εμφανίζεται μόνο η νέα μεταβλητή και να είναι απλούστερο από το αρχικό.

Παράδειγμα Στο παράδειγμα που ακολουθεί έχουμε το ολοκλήρωμα της $g\big(f(x)\big)$ όπου $f(x) = 3x + 5$ και $g(x) = x^{100}$, δηλαδή

$$\int (3x+5)^{100}\,dx = \frac{1}{3}\int y^{100}dy$$
$$= \frac{1}{3}\frac{y^{101}}{101} + c$$
$$= \frac{(3x+5)^{101}}{303} + c.$$

Θέτοντας $y = 3x+5$ έχουμε $dy = 3dx$ με αποτέλεσμα μετά την αντικατάσταση να καταλήγουμε σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής 1 από τη λίστα των βασικών ολοκληρωμάτων.

Ένας δεύτερος τρόπος υπολογισμού των ολοκληρωμάτων είναι η ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται σε ολοκληρώματα που εμφανίζουν γινόμενο συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Η **μέθοδος της παραγοντικής ολοκλήρωσης** ή **ολοκλήρωση κατά παράγοντες** στηρίζεται στον επόμενο τύπο

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad (1)$$

ή διαφορετικά

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (2)$$

Από τους παραπάνω τύπους βλέπουμε ότι παίζει σημαντικό ρόλο η επιλογή της συνάρτησης που με την βοήθεια της αντιπαράγουσάς της θα ξεκινήσουμε την παραγοντική ολοκλήρωση. Για το λόγο αυτό υπάρχουν κάποιοι «κανόνες» βάσει των οποίων μετά την ολοκλήρωση κατά παράγοντες θα καταλήξουμε σε ευκολότερο ολοκλήρωμα.

1. **α)** Ολοκληρώματα που εμφανίζουν το γινόμενο μιας πολυωνυμικής συνάρτησης με μια εκθετική, δηλαδή

$$\int p(x)e^{\alpha x+\beta}dx$$

όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ και $p(x)$ πολυώνυμο.

Στα ολοκληρώματα αυτά επιλέγουμε πάντα της αντιπαράγουσας της εκθετικής συνάρτησης, δηλαδή την

$$e^{\alpha x+\beta} = \left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta}\right)'$$

και επομένως έχουμε

$$\int p(x)e^{\alpha x+\beta}dx = p(x)\left(\frac{e^{\alpha x+\beta}}{a}\right) - \int p'(x)\left(\frac{e^{\alpha x+\beta}}{a}\right)dx .$$

Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε στο μηδενικό πολυώνυμο δηλαδή σε σταθερά. Είναι χρήσιμο να θυμάται κανείς ότι κάνουμε τον κανόνα της παραγοντικής ολοκλήρωσης τόσες φορές όσες η δύναμη του μεγιστοβάθμιου όρου.

β) Ολοκληρώματα που εμφανίζουν το γινόμενο μιας πολυωνυμικής συνάρτησης με μια τριγωνομετρική, δηλαδή

$$\int p(x)\sin(\alpha x+\beta)dx ,\ \int p(x)\cos(\alpha x+\beta)dx ,\ \int p(x)\sinh(\alpha x+\beta)dx ,$$

$$\int p(x)\cosh(\alpha x+\beta)dx$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$ και $p(x)$ πολυώνυμο.

Στα ολοκληρώματα αυτά επιλέγουμε πάντα της αντιπαράγουσας της τριγωνομετρικής ή υπερβολικής συνάρτησης, δηλαδή την

$$\sin(\alpha x+\beta) = \left(-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x+\beta)\right)',\ \cos(\alpha x+\beta) = \left(\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x+\beta)\right)'$$

και

$$\sinh(\alpha x+\beta) = \left(\frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x+\beta)\right)',\ \cosh(\alpha x+\beta) = \left(\frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha x+\beta)\right)'$$

αντίστοιχα.

Η διαδικασία της παραγοντικής ακολουθεί τα ίδια βήματα με την κατηγορία 1 α).

Παρατήρηση: 1. Τόσο η εκθετική συνάρτηση αλλά και οι τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις αποτελούν το πολύ σύνθεση με πολυώνυμα πρώτου βαθμού, βλέπε $\alpha x+\beta$.

Σε περίπτωση που κάποιος επιλέξει να αντιπαραγωγίσει την πολυωνυμική συνάρτηση θα δει γρήγορα ότι το ολοκλήρωμα που προκύπτει είναι πιο δύσκολο από το αρχικό.

Παραδείγματα

1. $$\int (2x+1)e^{3x+7}dx = \int (2x+1)\left(\frac{1}{3}e^{3x+7}\right)' dx$$

$$=\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x+7}-\frac{1}{3}\int(2x+1)'\,e^{3x+7}dx$$
$$=\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x+7}-\frac{2}{3}\int e^{3x+7}dx$$
$$=\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x+7}-\frac{2}{9}e^{3x+7}+c$$
$$=\frac{1}{9}(6x+1)e^{3x+7}+c.$$

2.
$$\int(3x+2)\cos 5x dx=\frac{1}{5}\int(3x+2)(\sin 5x)'\,dx$$
$$=\frac{1}{5}(3x+2)\sin 5x-\frac{3}{5}\int\sin 5x dx$$
$$=\frac{1}{5}(3x+2)\sin 5x+\frac{3}{25}\cos 5x+c$$

2. Ολοκληρώματα που εμφανίζουν το γινόμενο μιας εκθετικής συνάρτησης με μια τριγωνομετρική, δηλαδή
$$\int e^{\alpha x+\beta}\sin(\gamma x+\delta)dx\text{, }\int e^{\alpha x+\beta}\cos(\gamma x+\delta)dx\text{,}$$
όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$. Το ιδιαίτερο που έχουν τα ολοκληρώματα αυτά είναι ότι κανένας από τους δύο όρους του γινομένου δεν «εξαφανίζεται». Αντιθέτως όσες φορές και αν παραγωγίσουμε την εκθετική συνάρτηση πάλι αυτή θα μας δώσει εκθετική συνάρτηση. Το ίδιο και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις με την μόνη διαφορά ότι εναλλάσσονται τα ημίτονα σε συνημίτονα . Γι αυτό το λόγο ξεκινάμε πάντα τη λύση θέτοντας το ολοκλήρωμα. Μετά από δύο φορές θα καταλήξουμε στον ίδιο πάλι. Τέλος, μπορούμε να επιλέξουμε για αντιπαράγουσα όποια από τις δύο συναρτήσεις θέλουμε. Δεν διαφοροποιείται η λύση μας. Παρόλα αυτά συνήθως προτιμάται η εκθετική.

Παράδειγμα Θέτουμε το ολοκλήρωμα $I(x)=\int e^{3x}\cos 2x dx$ οπότε είναι

$$I(x)=\frac{1}{3}\int(e^{3x})'\cos 2x dx\;=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}\int e^{3x}\sin 2x dx$$
$$=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}\int(e^{3x})'\sin 2x dx\;=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x-\frac{2}{9}\int e^{3x}(\sin 2x)'\,dx$$
$$=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x-\frac{4}{9}I(x).$$

Από το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει ότι $I(x)=\frac{1}{13}(3\cos 2x+2\sin 2x)e^{3x}+c$.

3. Ολοκληρώματα που εμφανίζουν γινόμενο κλασμάτων με λογαριθμηκές ή αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις, δηλαδή

$$\int f(x)\ln g(x)dx\,,\ \int f(x)\operatorname{arctg} g(x)dx\,,\ \int f(x)\arcsin g(x)dx\,,\ \int f(x)\arccos g(x)dx$$

όπου $f(x)$ και $g(x)$ είναι ρητές συναρτήσεις του x. Στις περιπτώσεις αυτές, τίθεται $f(x)=F'(x)$.

Παράδειγμα

$$\int(3x^2+8x+2)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)dx=\int(x^3+4x^2+2x)'\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)dx$$

$$=(x^3+4x^2+2x)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-\int(x^3+4x^2+2x)\left(\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\right)'dx$$

$$=(x^3+4x^2+2x)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-\int(x^3+4x^2+2x)\cdot\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+1}{x^2}dx$$

$$=(x^3+4x^2+2x)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-\int\frac{(x^2+4x+2)(x^2+1)}{x^2-1}dx$$

$$=(x^3+4x^2+2x)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-\int\left((x^2+4x+4)+\frac{8x+6}{x^2-1}\right)dx$$

$$=(x^3+4x^2+2x)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-\frac{x^3}{3}-2x^2-4x-\int\left(\frac{7}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=(x^3+4x^2+2x)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-\frac{x^3}{3}-2x^2-4x-7\ln|x-1|-\ln|x+1|+c.$$

ΡΗΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Έστω $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ μια ρητή συνάρτηση, όπου δηλαδή τα $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x.

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int R(x)dx$ χωρίζεται σε τρεις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

Το πολυώνυμο του αριθμητή να είναι μεγαλύτερου βαθμού ή ίσου από το πολυώνυμο του παρανομαστή. Σε αυτή την περίπτωση κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, δηλαδή

$$P(x)=\Pi(x)Q(x)+U(x)$$

Και επομένως παίρνουμε

$$\int R(x)dx = \int \Pi(x)dx + \int \frac{U(x)}{Q(x)}dx .$$

2η περίπτωση

Το πολυώνυμο του αριθμητή να είναι μικρότερου βαθμού από το πολυώνυμο του παρανομαστή. Σε αυτή την περίπτωση παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή και παίρνουμε Δύο πιθανές μορφές

$$(x-\rho)^{\mu} \text{ ή } (x^2+\beta x+\gamma)^{\nu}$$

όπου $\rho, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ και $\beta^2 < 4\gamma$, δηλαδή το ρ είναι πραγματική ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$ και το τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$ έχει μιγαδικές ρίζες.

1. Αν έχουμε παρανομαστή που εμφανίζει όρους της μορφής $(x-\rho)^{\mu}$ ακολουθούμε την διάσπαση

$$\frac{A_1}{x-\rho} + \frac{A_2}{(x-\rho)^2} + \cdots + \frac{A_{\mu}}{(x-\rho)^{\mu}}$$

όπου $A_i \in \mathbb{R}$,

2. ενώ για κάθε παράγοντα της μορφής $(x^2+\beta x+\gamma)^{\nu}$ θεωρείται η έκφραση

$$\frac{B_1+\Gamma_1 x}{x^2+\beta x+\gamma} + \frac{B_2+\Gamma_2 x}{(x^2+\beta x+\gamma)^2} + \cdots + \frac{B_{\nu}+\Gamma_{\nu} x}{(x^2+\beta x+\gamma)^{\nu}}$$

όπου $B_i, \Gamma_i \in \mathbb{R}$.

Κατόπιν τούτων, η ρητή συνάρτηση $R(x)$ θα είναι το άθροισμα όλων αυτών των εκφράσεων. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **διάσπαση κλασμάτων**.

Παραδείγματα

1. Αν $R(x) = \dfrac{7x^2-19x+5}{(x-2)^2(x+3)}$, τότε είναι

$$\frac{7x^2-19x+5}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{\Gamma}{x+3}$$

οπότε προκύπτουν οι σχέσεις

$$7x^2-19x+5 = A(x-2)(x+3) + B(x+3) + \Gamma(x-2)^2$$

$$7x^2-19x+5 = (A+\Gamma)x^2 + (A+B-4\Gamma)x + (-6A+3B+4\Gamma)$$

και τελικά, το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} A+\Gamma=7 \\ A+B-4\Gamma=-19 \\ -6A+3B+4\Gamma=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=2 \\ B=-1 \\ \Gamma=5 \end{array}\right\}$$

Άρα,

$$\frac{7x^2-19x+5}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{5}{x+3}$$

Οπότε τελικά έχουμε

$$\int\frac{7x^2-19x+5}{(x-2)^2(x+3)}dx=2\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{(x-2)^2}+5\int\frac{dx}{x+3}=\ln(x-2)^2+\frac{1}{x-2}+\ln|x+3|^5+c.$$

Παρατήρηση

Είτε γράψουμε την διάσπαση με αυτό τον τρόπο

$$\frac{7x^2-19x+5}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{\Gamma}{x+3}$$

είτε με αυτόν

$$\frac{7x^2-19x+5}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{Ax+B}{(x-2)^2}+\frac{\Gamma}{x+3}$$

Δεν έχει διαφορά. (Βλέπε $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}=\frac{Ax+(B-2A)}{(x-2)^2}=\frac{Ax+\Gamma}{(x-2)^2}$)Και οι δύο τρόποι είναι σωστοί. Η μόνη διαφορά είναι ότι ο πρώτος τρόπος μας οδηγεί σε λιγότερες πράξεις αφού μπορεί κανείς να παρακάμψει την εύρεση των σταθερών Α, Β, Γ ολοκληρώνοντας την παρακάτω έκφραση και υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα

$$\int\frac{7x^2-19x+5}{(x-2)^2(x+3)}dx=\int\frac{Adx}{x-2}+\int\frac{Bdx}{(x-2)^2}+\int\frac{\Gamma dx}{x+3}=A\ln|x-2|+B\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+\Gamma\ln|x+3|+c.$$

Με τον δεύτερο τρόπο δεν μπορούμε να το κάνουμε αυτό γιατί χρειάζεται να βρεθούν οι σταθερές μιας και ο αριθμητής Αx+B για $A\neq 0$ μας δίνει άλλο ολοκλήρωμα από όταν Α=0.

2. Αν $R(x)=\frac{1}{(x^2+x+4)}$ τότε αφού ο παρανομαστής έχει μιγαδικές ρίζες έχουμε

$$x^2+x+4=x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{15}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

Επομένως

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+4)}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}=\frac{4}{15}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{15}{4}}}\right)^2+1}=\frac{4}{15}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{15}{4}}}\right)+c$$

Παρατήρηση
Για την κατασκευή της ταυτότητας πρέπει να θυμόμαστε ότι οι δύο πρώτοι όροι του πολυωνύμου δεν πρέπει να «πειράζονται», στο παράδειγμα αυτό είναι οι $x^2 + x$.

3. Αν $R(x) = \dfrac{-2x^3 + 3x^2 + 15x + 8}{(x-1)^2(x^2+3x+4)}$, τότε είναι

$$\frac{-2x^3 + 3x^2 + 15x + 8}{(x-1)^2(x^2+3x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2+3x+4},$$

οπότε προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} -2x^3 + 3x^2 + 15x + 8 &= A(x-1)(x^2+3x+4) + B(x^2+3x+4) \\ &\quad + (\Gamma x + \Delta)(x-1)^2 \\ -2x^3 + 3x^2 + 15x + 8 &= (A+\Gamma)x^3 + (2A + B - 2\Gamma + \Delta)x^2 \\ &\quad + (A + 3B + \Gamma - 2\Delta)x + (-4A + 4B + \Delta) \end{aligned}$$

και τελικά, το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} A + \Gamma = -2 \\ 2A + B - 2\Gamma + \Delta = 3 \\ A + 3B + \Gamma - 2\Delta = 15 \\ -4A + 4B + \Delta = 8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 3 \\ \Gamma = -2 \\ \Delta = -4 \end{array}\right\}.$$

Άρα,

$$\frac{-2x^3 + 3x^2 + 15x + 8}{(x-1)^2(x^2+3x+4)} = \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2x+4}{x^2+3x+4}.$$

$$\int \frac{-2x^3 + 3x^2 + 15x + 8}{(x-1)^2(x^2+3x+4)}dx = 3\int \frac{1}{(x-1)^2}dx - 2\int \frac{x}{x^2+3x+4}dx - 4\int \frac{1}{x^2+3x+4}dx$$

$$= -\frac{3}{x-1} - \ln(x^2+3x+4) - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x + \frac{3}{2}\right)\right) + c$$

αφού

$$\int \frac{x}{x^2+3x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+4}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+3x+4) - \frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x + \frac{3}{2}\right)\right) + c_2.$$

και

$$\int \frac{1}{x^2+3x+4}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}dx = \frac{4}{7}\int \frac{1}{y^2+1}\frac{\sqrt{7}}{2}dy = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x + \frac{3}{2}\right)\right) + c$$

ΕΙΔΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

I) Έστω ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}dx, \quad \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx$ όπου m,n θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

1. Αν η συνάρτηση R είναι περιττή ως προς ημίτονο τότε εφαρμόζεται η αντικατάσταση
$$y = \cos x .$$
2. Αν η συνάρτηση R είναι περιττή ως προς συνημίτονο τότε εφαρμόζεται η αντικατάσταση
$$y = \sin x .$$
3. Αν η συνάρτηση R είναι άρτια ως προς ημίτονο και συνημίτονο ταυτόχρονα, τότε εφαρμόζεται η αντικατάσταση
$$y = \operatorname{tg} x .$$

Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούνται οι τύποι
$$\sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}, \ \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2} \text{ και } dx = \frac{1}{1+y^2}dy .$$

Παράδειγμα Η παρακάτω συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι περιττή ως προς το ημίτονο επομένως θέτουμε $y = \cos x$
$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx = -\int \frac{y^2}{\left(1-y^2\right)^2}dy$$
Ο παρανομαστής είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον αριθμητή γι αυτό χρησιμοποιούμε την διάσπαση κλασμάτων
$$\frac{y^2}{\left(1-y^2\right)^2} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{(1-y)^2} + \frac{\Gamma}{1+y} + \frac{\Delta}{(1+y)^2}$$
Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει βρίσκουμε $A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}, \Gamma = -\frac{1}{4}, \Delta = \frac{1}{4}$. Άρα
$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dy}{1-y} - \int \frac{dy}{(1-y)^2} + \int \frac{dy}{1+y} - \int \frac{dy}{(1+y)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\ln(1-y) - \frac{1}{1-y} + \ln(1+y) + \frac{1}{1+y}\right) + c = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} - \frac{2\cos x}{\sin^2 x} + c$$

II. Η μορφή $I = \int R\left(x, \sqrt{r^2 - x^2}\right)dx$ όπου R είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών και $r > 0$.Εδώ, χρησιμοποιείται η αντικατάσταση
$$x = r\sin t, \text{ όπου } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
Στο διάστημα αυτό το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και άρα αντιστρέφεται. Με αντικατάσταση έχουμε

$$\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}=r\sqrt{1-\sin^2 t}=r|\cos t|=r\cos t$$

Το απόλυτο φεύγει επειδή το συνημίτονο είναι θετικό στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Το ολοκλήρωμα που προκύπτει είναι της μορφής I..

Για παράδειγμα θα υπολογίσουμε το $\int\frac{x^2+3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx$. Αν τεθεί $x=3\sin t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, τότε είναι

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\cos t \text{ και } dx=3\cos t dt$$

οπότε

$$\int\frac{x^2+3x+5}{\sqrt{9-x^2}}=\int\frac{9\sin^2 t+9\sin t+5}{3\cos t}\cdot 3\cos t dt=9\int\sin^2 t dt+9\int\sin t dt+5\int 1 dt$$

$$=\frac{9}{2}\int(1-\cos 2t)dt-9\cos t+5t=\frac{9}{2}t-\frac{9}{4}\int\cos 2t d(2t)-9\cos t+5t$$

δηλαδή

$$\int\frac{x^2+3x+5}{\sqrt{9-x^2}}=-\frac{9}{4}\sin 2t-9\cos t+\frac{19}{2}t+c \qquad (*)$$

Επειδή $\sin t=\frac{x}{3}$, $\cos t=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ και

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{x}{3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}=\frac{2}{9}x\sqrt{9-x^2},$$

από τη σχέση (*) προκύπτει ότι

$$\int\frac{x^2+3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx=-\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}-3\sqrt{9-x^2}+\frac{19}{2}\arcsin\frac{x}{3}+c.$$