Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

ΜΑΡΙΑ-ΕΛΕΝΗ ΠΟΥΛΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση f και ξ ένα οριακό σημείο του πεδίου ορισμού της Η συνάρτηση f ονομάζεται **παραγωγίσιμη** στο σημείο ξ αν και μόνο αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο του λόγου μεταβολής της f στο ξ, όταν $x \to \xi$,

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

ή

$$f'(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}.$$

Ορισμός: Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ (αντ. $\lim\limits_{x\to\xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$) στο $\mathbb{R}$, τότε αυτό ονομάζεται **δεξιά παράγωγος** (αντ. **αριστερή παράγωγος**) της συνάρτησης f στο σημείο ξ. Οι παράγωγοι αυτοί ονομάζονται **πλευρικές παράγωγοι** αι σημειώνεται με $\mathbf{f'_+(\xi)}$ (αντ. $\mathbf{f'_-(\xi)}$).

Ορισμός: Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ αν και μόνο αν υπάρχουν οι πλευρικές της παράγωγοι και είναι ίσες, δηλαδή

$$f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi).$$

Ορισμός: Μια συνάρτηση f ονομάζεται **παραγωγίσιμη** όταν υπάρχει η παράγωγός της σε κάθε σημείο του του πεδίου ορισμού της.

Πρόταση Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ξ τότε θα είναι συνεχής στο ξ.

Κανόνες

Αν f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο ξ, τότε ισχύουν οι τύποι:

1. $(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{f} + \boldsymbol{\mu}\mathbf{g})'(\xi) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}'(\xi) + \boldsymbol{\mu}\mathbf{g}'(\xi)$.
2. $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(\xi) = \mathbf{f}'(\xi) \cdot \mathbf{g}(\xi) + \mathbf{f}(\xi) \cdot \mathbf{g}'(\xi)$.
3. $\left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right)'(\xi) = \frac{\mathbf{f}'(\xi) \cdot \mathbf{g}(\xi) - \mathbf{f}(\xi) \cdot \mathbf{g}'(\xi)}{(\mathbf{g}(\xi))^2}$.

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και με $g(\xi) \neq 0$.

Βασικές Παραγωγίσεις

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\operatorname{tgh} x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{ctgh} x$	$-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

Πρόταση (Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης – Κανόνας αλυσίδας) Έστω δύο συναρτήσεις f, g με $\mathbf{R(f)\cap D(g)\neq\varnothing}$ και ένα σημείο $\boldsymbol{\xi\in D(g\circ f)}$. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ξ και η συνάρ-τηση g είναι παραγωγίσιμη στο $f(\xi)$ τότε και η σύνθεσή τους $\mathbf{g\circ f}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ και ισχύει ότι

$$\mathbf{(g\circ f)'(\xi)=g'(f(\xi))\cdot f'(\xi)}.$$

Βασικές παραγωγίσεις

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
α^x	$\alpha^x \ln\alpha$

Πρόταση (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης) Αν $f/(\alpha,\beta)$ είναι μια 1-1 και παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\mathbf{f'(x)\neq 0}$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση $\mathbf{f^{-1}/R(f)}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$\mathbf{(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}.$$

Βασικές παραγωγίσεις

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Ορισμός: Αν η συνάρτηση $f'/\pi(\xi)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ, τότε η συνάρτηση f ονομάζεται δύο φορές παραγωγίσιμη στο ξ και η παράγωγος της f' στο ξ ονομάζεται **δεύτερη παράγωγος** ή **παράγωγος δεύτερης τάξης** της f στο ξ

$$f''(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}.$$

Ορισμός: Μια συνάρτηση f ονομάζεται **δύο φορές παραγωγίσιμη** όταν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f σε κάθε σημείο.

Ορισμός: Ονομάζουμε **εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ την ευθεία με εξίσωση

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi).$$

Ορισμός: Ένα σημείο $A(\xi,n)$ της γραφικής παράστασης της f ονομάζεται **στάσιμο σημείο** ή **σημείο στασιμότητας** όταν $f'(\xi)=0$.

Παραμετρική Μορφή: Έστω συναρτήσεις φ_1,φ_2 ορισμένες σε ένα σύνολο A με

$$\left.\begin{cases}x=\varphi_1(t)\\ y=\varphi_2(t)\end{cases}\right\}.$$

Για τον υπολογισμό της παραγώγου $\frac{dy}{dx}$ συναρτήσεων που δίδονται σε παραμετρική μορφή χρησιμοποιείται ο κανόνας της αλυσίδας, δηλαδή

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

υπό τον όρο ότι $\frac{dx}{dt}\neq 0$ και οι συναρτήσεις $x=\varphi_1(t)$ και $y=\varphi_2(t)$ είναι παραγωγίσιμες.

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Θεώρημα (Fermat) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο ξ του πεδίου ορισμού, το οποίο είναι σημείο τοπικού ακρότατου, τότε θα είναι $f'(\xi)=0$.

Θεώρημα (Rolle) Αν μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και ισχύει ότι $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)=0$.

Θεώρημα (Lagrange, ή μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού) Αν μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β), τότε υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ με

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Πόρισμα

i) Αν μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) με

$f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε η συνάρτηση είναι σταθερή.

ii) Αν δύο συνεχείς συναρτήσεις $f,g/[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα (α,β) με $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε διαφέρουν κατά μια σταθερά.

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Είναι γνωστό ότι οι απροσδιόριστες μορφές είναι οι

$$\frac{0}{0},\ \frac{+\infty}{+\infty},\ (+\infty)+(-\infty),\ 0\cdot(+\infty),\ 0^0,\ 1^{+\infty},\ \text{και}\ (+\infty)^0.$$

Από αυτές, οι δύο πρώτες αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια του κανόνα του L' Hospital, ενώ οι υπόλοιπες με κατάλληλους μετασχηματισμούς ανάγονται σε μια εκ των μορφών $\frac{0}{0}$ ή $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Θεώρημα: (L' Hospital) Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σύνολο $A=(\alpha,\xi)\cup(\xi,\beta)$ με $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A$ και

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=\lim_{x\to\xi} g(x)=0 \text{ ή } \lim_{x\to\xi} f(x)=\pm\infty \text{ ή } \lim_{x\to\xi} g(x)=\pm\infty .$$

Τότε, αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$ έχουμε

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Παρατήρηση Το Θεώρημα ισχύει και για $\xi=+\infty$ ή $\xi=-\infty$.

ΙΙ. Η μορφή $(+\infty)+(-\infty)$

Για τον προσδιορισμό του ορίου $\lim_{x\to\xi}\left(f(x)+g(x)\right)$ όταν

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to\xi} g(x)=-\infty$$

χρησιμοποιούνται οι μετασχηματισμοί[1]

$$F(x)=\frac{1}{f(x)} \text{ και } G(x)=\frac{1}{g(x)},$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to\xi}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to\xi}\frac{F(x)+G(x)}{F(x)\cdot G(x)} \text{ (μορφή } \frac{0}{0}\text{)}.$$

ΙΙΙ. Η μορφή $0\cdot(+\infty)$

Για τον προσδιορισμό του ορίου $\lim_{x\to\xi}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ όταν

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=0 \text{ και } \lim_{x\to\xi} g(x)=+\infty$$

χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός $G(x)=\frac{1}{g(x)}$ οπότε προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to\xi}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{G(x)} \text{ (μορφή } \frac{0}{0}\text{)}.$$

---

[1] Βλέπε λυμένη άσκηση 50 γ) και άλυτη άσκηση 64 γ).

IV Οι μορφές 0^0, $1^{+\infty}$ και $(+\infty)^0$

Για τον προσδιορισμό του ορίου[2] $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)^{g(x)}$ όταν

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=\lim_{x\to\xi} g(x)=0,$$

ή

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=1 \text{ και } \lim_{x\to\xi} g(x)=+\infty,$$

ή

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to\xi} g(x)=0$$

χρησιμοποιείται ο τύπος

$$\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\xi}[g(x)\ln f(x)]}$$

όπου το όριο $\lim\limits_{x\to\xi}[g(x)\ln f(x)]$ είναι της μορφής $0\cdot(+\infty)$, ή $0\cdot(-\infty)$.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων μιας συνάρτηση f που ορίζεται σ' ένα διάστημα είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος στα οποία η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και έχει παράγωγο ίση με 0.
2. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος στα οποία η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη.
3. Τα άκρα του διαστήματος (αν η f ορίζεται σ' αυτά).

Ορισμός Τα σημεία που ικανοποιούν τις παραπάνω προτάσεις 1,2 ονομάζονται **κρίσιμα**.

Πρόταση Αν μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β), τότε είναι αύξουσα (αντ. φθίνουσα) αν και μόνο αν $f'(x)\geq 0$ (αντ. $f'(x)\leq 0$) για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Παρατήρηση Η πρόταση ισχύει και

Πρόταση Αν μια συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) με $f'(x)>0$ (αντ. $f'(x)<0$) για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα (αντ. γνήσια φθίνουσα).

Πρόταση Αν η συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\xi)\cup(\xi,\beta)$ και συνεχής στο ξ τότε

(i) Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\xi)$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\xi,\beta)$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο ξ.

(ii) Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\xi)$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\xi,\beta)$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο ξ.

Πρόταση Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ για την οποία υπάρχει σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο ξ με $f'(\xi)=0$ και $f''(\xi)\neq 0$. Τότε

---

[2] Βλ. λυμένη άσκηση 51 και άλυτη άσκηση 65.

(i) Αν $f''(\xi)>0$, η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο ξ.

(ii) Αν $f''(\xi)<0$, η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο ξ.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

Παρατήρηση Μια κυρτή ή κοίλη συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ είναι συνεχής, αλλά όχι κατ' ανάγκη παραγωγίσιμη.

Πρόταση
Αν η συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:
(i) Η συνάρτηση $f'/(\alpha,\beta)$ είναι αύξουσα.
(ii) Η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Πρόταση Αν η συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:
(i) Η συνάρτηση $f'/(\alpha,\beta)$ είναι φθίνουσα.
(ii) Η συνάρτηση f είναι κοίλη.

Πρόταση Αν μια συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη τότε η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι κυρτή (αντ. κοίλη) είναι $f''(x)\geq 0$ (αντ. $f''(x)\leq 0$).

Πρόταση
Αν μια συνάρτηση $f/(\alpha,\beta)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ (αντ. $f''(x)<0$) για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε είναι γνήσια κυρτή (αντ. κοίλη).

Σημεία καμπής
Έστω μια συνάρτηση f και ξ ένα εσωτερικό σημείο του $D(f)$.
Το σημείο $A(\xi,f(\xi))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f, αν
(i) Η f είναι συνεχής στο ξ.
(ii) Η f είναι κυρτή αριστερά του ξ και κοίλη δεξιά του ξ ή αντίστροφα.
(iii) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Παρατήρηση Τα σημεία $\xi\in D(f)$ που είναι θέσεις σημείων καμπής αναζητούνται μεταξύ των σημείων ξ όπου η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(\xi)=0$ και των σημείων ξ όπου δεν υπάρχει η $f''(\xi)$.

Πρόταση Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο ξ το οποίο είναι θέση σημείου καμπής, τότε θα είναι $f''(0)=0$.