Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΌΡΙΟ, ΣΥΝΕΧΕΙΑ, ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΜΑΡΙΑ-ΕΛΕΝΗ ΠΟΥΛΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΟ- ΣΥΝΕΧΕΙΑ- ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Για να μπορέσει κανείς να μελετήσει την έννοια του ορίου αρχικά πρέπει να μιλήσει για τη έννοια της περιοχής.

Ορισμός: **Περιοχή** ενός σημείου $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται κάθε διάστημα της μορφής $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ όπου $\varepsilon > 0$ και σημειώνεται με $\boldsymbol{\pi(x)}$.

Ερώτηση: Υπάρχει κάποιος περιορισμός, άνω για την ακρίβεια, για την θετική ποσότητα ε;

Παρατήρηση Συνήθως το ε παραμένει αρκετά αόριστο ακριβώς για να είναι γενική και η προσέγγιση μας, παρόλα αυτά ένα άτυπο άνω φράγμα του μπορούμε να πούμε ότι είναι το 1 αφού οτιδήποτε παραπάνω από το 1 μας μεταφέρει σε άλλο x και επομένως δεν έχει και νόημα.

Με τη βοήθεια της περιοχής ορίζονται τα **εσωτερικά** και **οριακά** σημεία ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$.

Ορισμός: Ένα σημείο $x \in A$ ονομάζεται **εσωτερικό σημείο** του Α όταν $\pi(x) \subseteq A$. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του Α σημειώνεται με $\mathbf{A^o}$.

Ορισμός: Ένα σημείο $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **οριακό σημείο** ή **σημείο συσσωρεύσεως** του Α όταν για κάθε περιοχή του $\pi(x)$ ισχύει ότι

$$(\pi(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Ορισμός: Ένα σημείο $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **απομονωμένο σημείο** του Α όταν για κάθε περιοχή του $\pi(x)$ ισχύει ότι

$$(\pi(x) \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$$

δηλαδή όταν δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως.

Από τους παραπάνω ορισμούς βλέπουμε ότι τα εσωτερικά σημεία ενός συνόλου αναγκαστικά ανήκουν σε αυτό, τα οριακά σημεία μπορεί να μην ανήκουν σ' αυτό και τα απομονωμένα σίγουρα δεν ανήκουν σε αυτό.

Ίσως η πιο δύσκολη έννοια από τις παραπάνω να είναι το οριακό σημείο γι αυτό ας δώσουμε ένα απλό παράδειγμα. Το οριακό σημείο μπορεί να είναι το ένα άκρο ενός ανοιχτού διαστήματος, δηλαδή το β στο [α,β). Σαφώς και μπορούμε να ορίσουμε μια περιοχή του β, πιο συγκεκριμένα την αριστερή περιοχή του, δηλαδή (β-ε,β) η οποία είναι φανερό ότι έχει κοινά σημεία με το διάστημα και άρα ικανοποιεί τον ορισμό.

Και αφού μπήκαμε στο κλίμα των παραδειγμάτων ας δώσουμε και ένα για το απομονωμένο. Έστω ότι μας έχει δοθεί το σύνολο $[0,3] \cup \{5\}$. Το σημείο 5 είναι ένα απομονωμένο σημείο καθώς δεν μπορούμε να ορίσουμε κανένα είδος περιοχής γύρω από αυτό, ούτε από τα δεξιά ούτε από τα αριστερά.

Ας συνεχίσουμε.

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση f και $\xi, \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{I} \cup (-\infty, +\infty)$. Τότε λέμε ότι μια συνάρτηση f **συγκλίνει** στο ℓ, όταν το x τείνει στο ξ $(x \to \xi)$,

$$x \in D(f) \cap (\pi(\xi) \setminus \{\xi\}) \Rightarrow f(x) \in \pi(\ell).$$

δηλαδή αν για κάθε περιοχή $\pi(\ell)$ που μπορούμε να ορίσουμε υπάρχει μια περιοχή $\pi(\xi)$ η

οποία να έχει κοινά σημεία με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, $D(f)$.
Επομένως το όριο συμβολίζεται με $\mathbf{\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell}$ και το ℓ ονομάζεται **οριακή τιμή** ή **όριο** της συνάρτησης f για $x\to\xi$.

Θυμίζουμε ότι το σημείο προς μελέτη εξαιρείται από τη περιοχή και αυτό είναι γιατί δεν μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει σε αυτό αλλά τι συμβαίνει σε όλα τα στοιχεία που το περιβάλουν.

Επίσης μπορεί κάποιος να παραξενεύτηκε από τον συμβολισμό $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup(-\infty,+\infty)$. Αυτός μας είναι πολύ χρήσιμος καθώς μας λέει ότι τα σημεία ξ,ℓ μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές θέλουν ακόμα και τα αυτές του απείρου.

Το όριο μιας συνάρτησης, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Για το ξ υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:
α) $\xi=-\infty$: Τότε οι περιοχές του ξ είναι της μορφής $[-\infty,\beta)$.
β) $\xi=+\infty$: Τότε οι περιοχές των ξ είναι της μορφής $(\alpha,+\infty]$.
γ) $\xi\in\mathbb{R}$: Τότε το ξ πρέπει να είναι οριακό σημείο με $D(f)=(\alpha,\xi)\cup(\xi,\beta)$.

Αν υποτεθεί ότι $\xi\in\mathbb{R}$ και $(\xi,\xi+\delta)\cap D(f)\neq\varnothing$ (αντ. $(\xi-\delta,\xi)\cap\ D(f)\neq\varnothing$) για κάθε $\delta>0$, προκύπτει ο ορισμός του **δεξιού** (αντ. **αριστερού**) **ορίου** της f στο ξ και σημειώνεται με $\mathbf{\lim\limits_{x\to\xi^+} f(x)}$ (αντ. $\mathbf{\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x)}$). Τα όρια αυτά ονομάζονται **πλευρικά όρια** της συνάρτησης.

Θεώρημα: Το όριο μιας συνάρτησης υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά της όρια και είναι ίσα, δηλαδή

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to\xi^+} f(x)=\lim_{x\to\xi^-} f(x)= \quad .$$

Ιδιότητες

1. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$ και $\lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\xi}(\lambda f)(x)=\lambda\cdot\ $,
   με εξαίρεση την περίπτωση όπου $\lambda=0$ και $\ell=\pm\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$ και $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=m\Rightarrow\lim\limits_{x\to\xi}(f+g)(x)=\ell+m$,
   με εξαίρεση την περίπτωση όπου $\ell=+\infty$ και $m=-\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$ και $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=m\Rightarrow\lim\limits_{x\to\xi}(f\cdot g)(x)=\ell\cdot m$,
   με εξαίρεση την περίπτωση όπου $\ell=\pm\infty$ και $m=0$.
4. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$, $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=m$ και $m\neq0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\xi}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\ell}{m}$,
   με εξαίρεση την περίπτωση $\ell=\pm\infty$ και $m=\pm\infty$.
   Ειδικά αν $\ell\neq\pm\infty$ και $m=\pm\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\xi}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=0$.
5. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$, με $\ell\in\overline{\mathbb{R}}^*$ και $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=0$ με $g(x)>0$ (αντ. $g(x)<0$),
   για κάθε $x\in\pi(\xi)\Rightarrow\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ell\cdot(+\infty)$ (αντ. $\ell\cdot(-\infty)$).
6. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell\Rightarrow\lim\limits_{x\to\xi} f^{\nu}(x)= \ ^{\nu}$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.
7. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell\Rightarrow\lim\limits_{x\to\xi}\sqrt[\nu]{|f(x)|}=\sqrt[\nu]{|\ \ |}$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ και $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$.

8. $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=\ell$, $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=m$ και $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in\pi(\xi)\Rightarrow \ell\le\mu$.

Πριν προχωρήσουμε, θα ήταν χρήσιμο εδώ να ξαναδούμε κάποιες πράξεις στο σύνολο $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup(-\infty,+\infty)$. Στο σύνολο αυτό επεκτείνονται η διάταξη και οι βασικές πράξεις του $\mathbb{R}$ ως εξής:

1. $-\infty<x<+\infty$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
2. $-(+\infty)=-\infty$, $-(-\infty)=+\infty$.
3. $(+\infty)+x=x+(+\infty)=+\infty$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
4. $(-\infty)+x=x+(-\infty)=-\infty$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
5. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$.
6. $(+\infty)\cdot x=x\cdot(+\infty)=+\infty$ (αντ. $-\infty$) αν $x>0$ (αντ. $x<0$).
7. $(-\infty)\cdot x=x\cdot(-\infty)=-\infty$ (αντ. $+\infty$) αν $x>0$ (αντ. $x<0$).
8. $\dfrac{x}{-\infty}=\dfrac{x}{+\infty}=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Και φυσικά δεν ξεχνάμε ότι στο σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$ δεν έχουν νόημα οι πράξεις

$$+\infty+(-\infty),\ -\infty+(+\infty),\ 0\cdot(\pm\infty),\ (\pm\infty)\cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{+\infty},\ \frac{\pm\infty}{-\infty},$$

γι’ αυτό και συνήθως ονομάζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Συνεχίζουμε. Για τον υπολογισμό ορίου υπάρχουν κάποιοι, ας τους πούμε κανόνες, που κάνουν την ζωή μας πιο εύκολη. Ένας από αυτούς αφορά τα κλάσματα που έχουν αριθμητή και παρανομαστή πολυώνυμα για παράδειγμα $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x βαθμού m, n και με συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων α, β αντίστοιχα, ισχύει ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to\xi} R(x)=R(\xi)$, όταν $\xi\in\mathbb{R}$ και $Q(\xi)\neq 0$. Αυτή η περίπτωση είναι και η πιο απλή. Αφού ελέγξουμε ότι το ξ δεν μηδενίζει τον παρανομαστή μας κάνουμε αντικατάσταση σε αριθμητή και παρανομαστή για να βρούμε το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα έχουμε το όριο

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-5x-2}{x^2-4}$$

Για $x\neq 2$ είναι

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-5x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+1}{x+2}=\frac{11}{4}.$$

(ii) $$\lim_{x\to+\infty} R(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } m<n\\ \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot(+\infty), & \text{αν } m>n\\ \dfrac{\alpha}{\beta}, & \text{αν } m=n.\end{cases}$$

Αυτή η περίπτωση αποκτά περισσότερο ενδιαφέρον γιατί η αντικατάσταση του απείρου δεν αποτελεί λύση αφού πιθανότατα θα καταλήξουμε σε κάποια μορφή απροσδιοριστίας για αυτό και χρησιμοποιούμε τον «χρυσό» κανόνα που λέει: όταν το όριο μας πηγαίνει στο άπειρο και έχουμε αυτού του είδους τη ρητή μορφή **ΠΑΝΤΑ** βγάζουμε κοινό παράγοντα τον μεγιστοβάθμιο από αριθμητή και παρανομαστή. Αν ο παρανομαστής είναι μεγαλύτερου βαθμού τότε το κλάσμα μηδενίζεται. Αν είναι ο αριθμητής μεγαλύτερου βαθμού από τον παρανομαστή τότε το κλάσμα απειρίζεται και τέλος αν έχουν τον ίδιο βαθμό το αποτέλεσμα είναι οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων. Για παράδειγμα έχουμε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2-x+10}{x-3}$$

Αν $\alpha>0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2-x+10}{x-3}=+\infty$.

Αν $\alpha<0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2-x+10}{x-3}=-\infty$.

Και τέλος αν $\alpha=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2-x+10}{x-3}=-1$.

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}R(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } m<n\\ \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot(-\infty), & \text{αν } m>n\\ \dfrac{\alpha}{\beta}, & \text{αν } m=n.\end{cases}$

Ομοίως με την παραπάνω περίπτωση.

Παρατήρηση Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις και γενικά στα όρια πρέπει ΠΑΝΤΑ να εκτελούνται πρώτα απλοποιήσεις, εάν φυσικά υπάρχουν και μετά να γίνεται η αντικατάσταση της τιμής.

Κριτήριο παρεμβολή Έστω οι συναρτήσεις f, g, h με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο D, και ξ οριακό σημείο του D με

$$h(x)\le f(x)\le g(x)$$

για κάθε $x\in\left(\pi(\xi)\setminus\{\xi\}\right)\cap D$, όπου $\pi(\xi)$ είναι μια περιοχή του ξ και

$$\lim_{x\to\xi}h(x)=\lim_{x\to\xi}g(x)=\ell\in\mathbb{R}.$$

Τότε θα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=\ell$.

Παρατήρηση Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει όταν $\xi=+\infty$ ή $\xi=-\infty$.

Ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα για το όριο μιας σύνθετης συνάρτησης είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση Αν για δύο συναρτήσεις f, g ισχύουν:

(i) $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=\ell$ και $\lim\limits_{y\to\ell}g(y)=m$, όπου $\xi,\ell,m\in\overline{\mathbb{R}}$,

(ii) $f(x)\neq\ell$ για κάθε $x\in D(g\circ f)\cap\left(\pi(\xi)\setminus\{\xi\}\right)$, όπου $\pi(\xi)$ είναι μια περιοχή του ξ, τότε είναι

$$\lim_{x\to\xi}(g\circ f)(x)=m.$$

Οι μονότονες συναρτήσεις ξαναχτυπούν!!

Πρόταση: Κάθε αύξουσα (αντ. φθίνουσα) και άνω (αντ. κάτω) φραγμένη συνάρτηση $f/[\alpha,+\infty)$ (αντ. $f/(-\infty,\beta]$) συγκλίνει για $x\to+\infty$ (αντ. $x\to-\infty$) προς πραγματικό αριθμό.

ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ

Α. Τριγωνομετρικά όρια

1. $\lim\limits_{x\to\xi}\sin x = \sin\xi$ και $\lim\limits_{x\to\xi}\cos x = \cos\xi$ για κάθε $\xi\in\mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to\xi}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\xi$ για κάθε $\xi\in\mathbb{R}\setminus\left\{\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}:\kappa\in\quad\right\}$.
3. $\lim\limits_{x\to\xi^-}\operatorname{tg} x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\xi^+}\operatorname{tg} x = -\infty$, για κάθε $\xi\in\left\{\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}:\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$.
4. $\lim\limits_{x\to\xi}\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\xi$ για κάθε $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{\kappa\pi:\kappa\in\mathbb{Z}\}$.
5. $\lim\limits_{x\to\xi^-}\operatorname{ctg} x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to\xi^+}\operatorname{ctg} x = +\infty$ για κάθε $\xi\in\{\kappa\pi:\kappa\in\mathbb{Z}\}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Β. Όρια δυνάμεως

1. $\lim\limits_{x\to\xi}x^\alpha = \xi^\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ και $\xi>0$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha = +\infty$, για $\alpha>0$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha = 0$, για $\alpha<0$.

Γ. Εκθετικά όρια

1. $\lim\limits_{x\to\xi}\alpha^x = \alpha^\xi$, για $\alpha>0$ και $\xi\in\mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x = 0$, για $\alpha>1$,

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x = +\infty$, για $0<\alpha<1$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Δ. Λογαριθμικά όρια

1. $\lim\limits_{x\to\xi}\log_\alpha x = \log_\alpha\xi$, για $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$ και $\xi>0$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\log_\alpha x = -\infty$, για $\alpha>1$,

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\log_\alpha x = +\infty$, για $0<\alpha<1$.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1} = 1$.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Υπάρχουν συναρτήσεις των οποίων οι γραφικές παραστάσεις πηγαίνουν στο άπειρο. Για παράδειγμα η εφαπτομένη ή η συνεφαπτομένη. Στις περιπτώσεις αυτές μια ευθεία ονομάζεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης όταν η γραφική παράσταση της συνάρτηση την πλησιάζει τόσο ώστε η απόσταση τους να λέμε ότι είναι μηδενική. Επομένως είναι αναγκαία μια μεθοδολογία εύρεσης τέτοιων φαινομένων.

Κατηγοριοποιώντας τις ασύμπτωτες θα ξεκινήσουμε από την πιο απλή ως προς την εύρεση της. Την κατακόρυφη.

Ορισμός: Μια ευθεία $x=\xi$ ονομάζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x), \qquad \lim_{x\to\xi^-} f(x)$$

είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$.

Παρατήρηση Αυτή είναι η πιο εύκολα αναγνωρίσιμη καθώς όλα τα κλάσματα των οποίων ο παρανομαστής μηδενίζεται από το οριακό σημείο εμφανίζουν τέτοιου είδους ασύμπτωτη. Επίσης εάν ο παρανομαστής είναι υψωμένος σε άρτια δύναμη τότε τα δυο αυτά πλευρικά όρια θα μας δώσουν το ίδιο άπειρο ως αποτέλεσμα, αυτό που θα προσδιορίζει ο αριθμητής μας. Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x-3}$. Υπολογίζουμε λοιπόν τα πλευρικά όρια και έχουμε

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+4}{x-3}=-\infty.$$

Ενώ

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+4}{x-3}=+\infty.$$

Αν είχαμε την ίδια συνάρτηση με τη διαφορά ο παρανομαστής μας να ήταν υψωμένος στην δύναμη 2 θα είχαμε το αποτέλεσμα

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+4}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+4}{(x-3)^2}=+\infty.$$

Στην πρώτη περίπτωση η συνάρτηση μας καθώς πλησιάζει τον αριθμό 3 από τα αριστερά πηγαίνει στο $-\infty$ ενώ όταν πλησιάζει από τα δεξιά πηγαίνει στο $+\infty$. Στην δεύτερη περίπτωση τα πλευρικά όρια πηγαίνουν και τα δύο στο $+\infty$.

Ορισμός: Μια ευθεία $y=\alpha x+\beta$ ονομάζεται **πλάγια ασύμπτωτη** (αντ. **οριζόντια ασύμπτωτη**) της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντ. $-\infty$) αν $\alpha\neq 0$ (αντ. $\alpha=0$) και

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(\alpha x+\beta)\big)=0 \qquad (\text{αντ. } \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(\alpha x+\beta)\big)=0).$$

Για τον υπολογισμό της θα ακολουθήσουμε τους παρακάτω τύπους

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \ (\text{αντ. } \alpha=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x})$$

και

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-\alpha x\big) \ (\text{αντ. } \beta=\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-\alpha x\big))$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Παρατήρηση Αν μια συνάρτηση έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να έχει πλάγια ή οριζόντια. Επίσης ο έλεγχος και για τα δύο άπειρα είναι απαραίτητος γιατί το ένα δεν αναιρεί το άλλο. Για παράδειγμα σκέψου η συνάρτηση σου προς μελέτη να εμφανίζει ρίζα, δηλαδή έστω $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Η συνάρτηση δεν είναι ρητή άρα δεν θα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη και επομένως προχωράμε για την εύρεση των άλλων. Έτσι έχουμε

.

Για $x>0$ βλέπουμε ότι έχουμε απροσδιοριστία και άρα θα βγάλουμε τους μεγιστοβάθμιους κοινό παράγοντα. Επομένως θα είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}=1$$

Για $x<0$ θα είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}=-1.$$

Δηλαδή βρίσκουμε δύο διαφορετικά α και επομένως θα έχουμε δύο διαφορετικές πλάγιες ασύμπτωτες. Συνεχίζουμε για τον υπολογισμό του β και έχουμε

Για $x>0$ θα είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

Ενώ για $x<0$ θα είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$$

Συνεπώς η συνάρτηση μας έχει τις δύο διχοτόμους $y=x, y=-x$ για ασύμπτωτες.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορισμός: Μια συνάρτηση f/A ονομάζεται **συνεχής στο σημείο** $\xi\in A$ αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}f(x)$ και συμπίπτει με την τιμή $f(\xi)$, δηλαδή

$$\lim_{x\to\xi}f(x)=f(\xi).$$

Είναι προφανές ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν είναι ταυτόχρονα συνεχής από τα δεξιά και από τα αριστερά στο ξ, δηλαδή

$$\lim_{x\to\xi^-}f(x)=\lim_{x\to\xi^+}f(x)=f(\xi).$$

Ιδιότητες

Αν f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο ξ, τότε οι παρακάτω συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς στο ξ:

1. $\kappa f+\lambda g$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.
2. $f\cdot g$.
3. $\frac{f}{g}$, αν $g(\xi)\neq 0$.
4. f^{ν}, όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$.
5. $\sqrt[\nu]{|f|}$, όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$.
6. $\left(f(x)\right)^{g(x)}$, αν $f(\xi)>0$.

Παρατήρηση Όταν χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες αυτές μέσα σε ασκήσεις δεν χρειάζονται απόδειξη.

Πρόταση: Έστω δύο συναρτήσεις f, g, όπου το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της g, δηλαδή $R(f)\subseteq D(g)$. Αν η f είναι συνεχής στο ξ και η g συνεχής στο $f(\xi)$ τότε η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στο ξ.

Ορισμός: Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής σε ένα σύνολο** $A\subseteq D(f)$ αν και μόνο αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\xi\in A$..

Χρησιμοποιώντας τα βασικά όρια και τις ιδιότητες της συνέχειας έχουμε

1. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
2. Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο σύνολο στο $\mathbb{R}$ εξαιρώντας εάν υπάρχουν, τα σημεία που μηδενίζεται ο παρανομαστής .
3. Η συνάρτηση της δύναμης $f(x)=x^{\alpha}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$.
4. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, η $\operatorname{tg} x$ είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R}\setminus\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}:\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$ και η $\operatorname{ctg} x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\setminus\{\kappa\pi:\kappa\in\mathbb{Z}\}$.
5. Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$, με $\alpha>0$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
6. Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x)=\log_{\alpha}x$, όπου $0<\alpha\neq 1$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$.
7. Οι υπερβολικές συναρτήσεις $\sinh x$, $\cosh x$ και $\operatorname{tgh} x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ ενώ η $\operatorname{ctgh} x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^{*}$.

Πρόταση: Κάθε συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι φραγμένη.

Θεώρημα: (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο ολικού μεγίστου και ένα (τουλάχιστον) σημείο ολικού ελαχίστου.

Παρατήρηση Το θεώρημα αυτό εξασφαλίζει την ύπαρξη των ακρότατων για συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται σε κλειστά διαστήματα.

Πρόταση: Για κάθε συνεχή και $1-1$ συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η αντίστροφη $f^{-1}:f([\alpha,\beta])\to[\alpha,\beta]$ είναι επίσης συνεχής.

Παράδειγμα

Αν $\sin x/\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ τότε $\arcsin x/[-1,1]$ είναι συνεχής.

Θεώρημα: (Ενδιάμεσων τιμών) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και $f(\alpha)<\gamma<f(\beta)$ ή $f(\alpha)>\gamma>f(\beta)$ υπάρχει ένας (τουλάχιστον) αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f(\xi)=\gamma$.

Παρατήρηση 1. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, η ευθεία $y=\gamma$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα (τουλάχιστον) σημείο.
2. Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών είναι ισοδύναμο με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα: (Bolzano) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, υπάρχει ένας (τουλάχιστον) αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f(\xi)=0$.

Θεώρημα: (Σταθερού σημείου) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ υπάρχει ένα (τουλάχιστον) $\xi\in[\alpha,\beta]$ με $f(\xi)=\xi$.

ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορισμός: Μια συνάρτηση f ονομάζεται **ασυνεχής** σε ένα σημείο $\xi\in D(f)$ όταν δεν είναι συνεχής στο ξ.

Παρατήρηση Υπάρχουν δύο είδη ασυνέχειας:

1. Αν η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο ξ και υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα πλευρικά της όρια στο ξ, δηλαδή δεν απειρίζονται, τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει **πρώτου είδους** ή **απλή ασυνέχεια** στο ξ. Αυτό μπορεί να συμβαίνει όταν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ αλλά είναι διάφορο της τιμής $f(\xi)$ ή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ οπότε δεν έχει σημασία η τιμή $f(\xi)$.
2. Αν ένα από τα πλευρικά όρια της f στο ξ δεν υπάρχει, τότε λέγεται ότι η f παρουσιάζει **ασυνέχεια δεύτερου είδους** στο ξ.

Πάλι αυτές οι μονότονες!!

Πρόταση Κάθε μονότονη συνάρτηση στο (α,β) δεν παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους.