ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Εισαγωγή στη Σχεδίαση με Η/Υ (CAGD)

Ενότητα 1: Μετασχηματισμοί

Φίλιππος Αζαριάδης & Σοφία Κυρατζή
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων και Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Εισαγωγή στη Σχεδίαση με Η/Υ

Θεματική Ενότητα Α: Μετασχηματισμοί

Σημεία

- Κάθε σημείο στον 2Δ χώρο δηλώνεται με τις συντεταγμένες

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

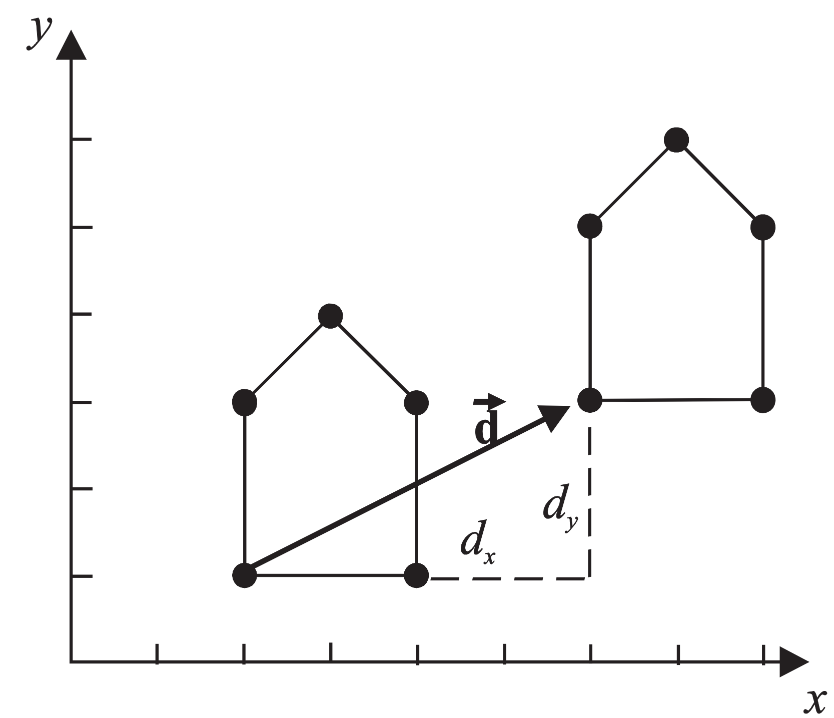
- Για την ομοιογενή αναπαράσταση όλων των μετασχηματισμών και την ταυτόχρονη χρήση αυτών, γίνεται χρήση των **ομογενών συντεταγμένων** ενός σημείου με w=1:

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

2Δ Μετασχηματισμός: Μεταφορά

- Δηλώνει την μετακίνηση ενός σημείου $\overline{P} = (p_x, p_y)$ κατά διάνυσμα $\vec{d} = (d_x, d_y)$. Η νέα θέση του σημείου είναι:

$$p_x{}' = p_x + d_x$$
$$p_y{}' = p_y + d_y$$



- Η σχέση αποκτάει την μορφή:

$$\begin{bmatrix} p_x{}' \\ p_y{}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{P}' = T(\vec{d}) * \overline{P}$$

2Δ Μετασχηματισμός: Μεταφορά

- Ο πίνακας μετασχηματισμού της μεταφοράς είναι:

$$T(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

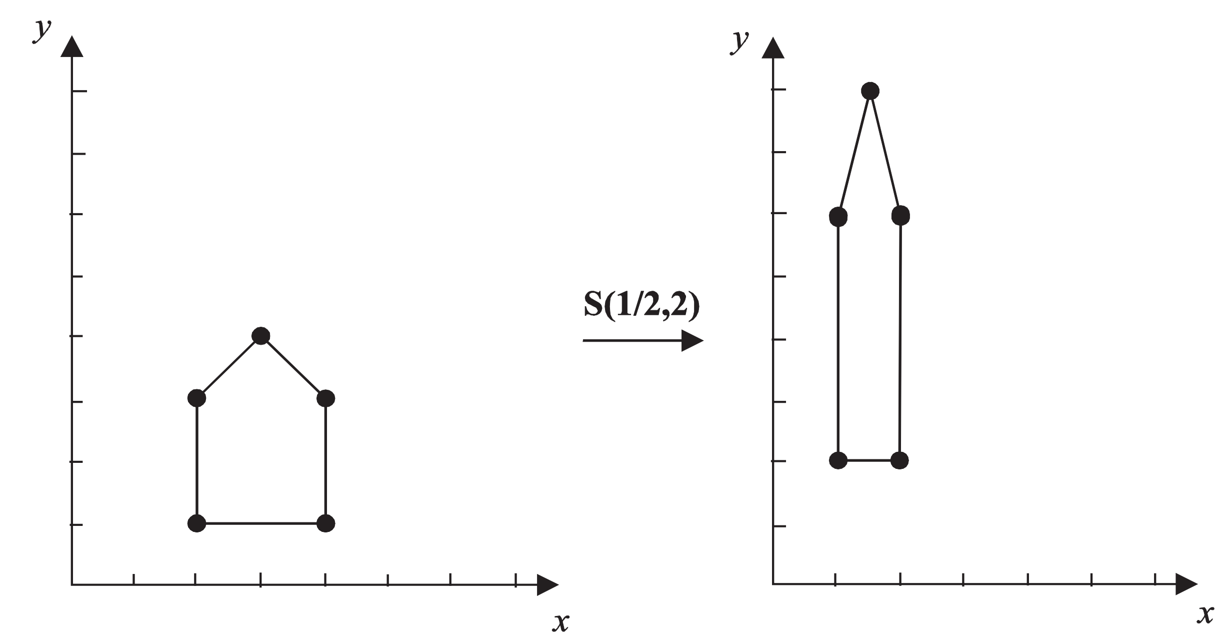
- Το γινόμενο $\overline{P}' = T(\vec{d}) * \overline{P}$ δηλώνει εφαρμογή του μετασχηματισμού στο σημείο $\overline{P} = (p_x, p_y)$ με αποτέλεσμα την νέα θέση του σημείου
- Η μεταφορά κατά διάνυσμα $-\vec{d} = (-d_x, -d_y)$, δίνεται από τον πίνακα:

$$T(-\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2Δ Μετασχηματισμός: Αλλαγής Κλίμακας

- Μεγέθυνση ή σμύκρινση ενός σημείου / σχήματος $\overline{P} = (p_x, p_y)$
- Συντελεστές s_x, s_y που δηλώνουν την αλλαγή κλίμακας αντίστοιχα στον άξονα XX' και YY'.
- Η θέση του νέου σημείου είναι:

$$x_p{}' = s_x * x_p$$
$$y_p{}' = s_y * y_p$$



2Δ Μετασχηματισμός: Αλλαγής Κλίμακας

- Σε μορφή πινάκων, το αποτέλεσμα της εφαρμογής της αλλαγής κλίμακας σε ένα σημείο γράφεται:

$$\begin{bmatrix} x_p{}' \\ y_p{}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{P}' = S(s_x, s_y) * \overline{P}$$

- Ο πίνακας μετασχηματισμού της αλλαγής κλίμακας είναι:

$$S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2Δ Μετασχηματισμός: Αλλαγής Κλίμακας

- Αν $s_x > 1$, τότε το σχήμα μεγεθύνεται κατά μήκος του άξονα Χ και ταυτόχρονα απομακρύνεται από την αρχή του άξονα Υ.
- Αν $s_y > 1$, τότε το σχήμα μεγεθύνεται κατά μήκος του άξονα Υ και ταυτόχρονα απομακρύνεται από την αρχή του άξονα Χ.
- Αν $s_x < 1$, τότε το σχήμα συρρικνώνεται κατά μήκος του άξονα Χ και ταυτόχρονα πλησιάζει στην αρχή του άξονα Υ.
- Αν $s_y < 1$, τότε το σχήμα συρρικνώνεται κατά μήκος του άξονα Υ και ταυτόχρονα πλησιάζει στην αρχή του άξονα Χ.

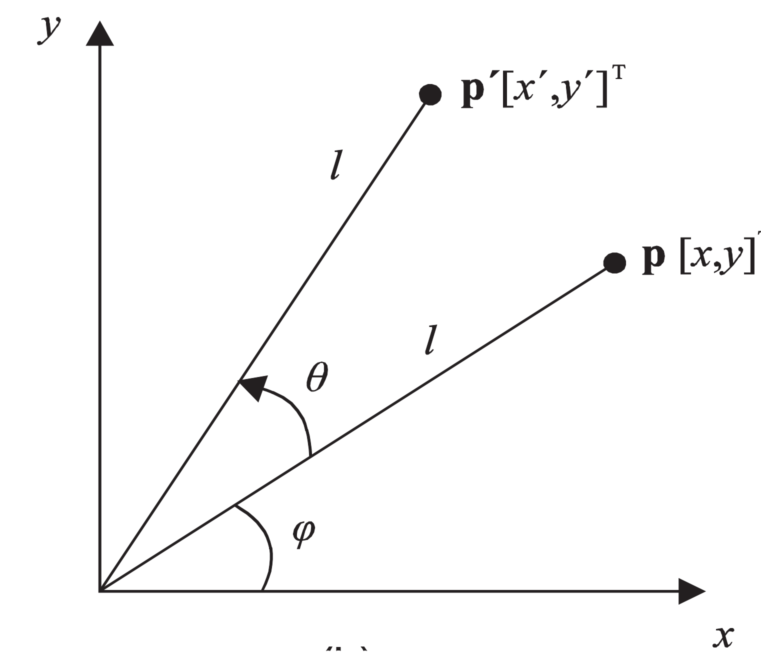
2Δ Μετασχηματισμός: Αλλαγής Κλίμακας

- Αν $s_x \neq s_y$, η αλλαγή κλίμακας είναι ανομοιόμορφη με αποτέλεσμα να μην διατηρούνται οι αναλογίες του αρχικού σχήματος.
- Αν $s_x = s_y$, τότε η αλλαγή κλίμακας καλείται *ομοιόμορφη*, και στο τελικό σχήμα διατηρούνται οι αναλογίες του αρχικού σχήματος.
- Το μόνο σημείο που μένει αναλλοίωτο στην αλλαγή κλίμακας είναι η αρχή των αξόνων - σημείο O(0,0).

2Δ Μετασχηματισμός: Περιστροφή

- Δηλώνει περιστροφή ενός αρχικού σημείου $\overline{P} = (p_x, p_y)$ κατά γωνία θ γύρω από την αρχή των αξόνων O(0,0).
- Οι συντεταγμένες του νέου σημείου $\overline{P}' = (p_x{}', p_y{}')$ είναι:

$$x_p{}' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta$$
$$y_p{}' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$$



- Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν από:

$$x_p{}' = \ell\cos(\varphi+\vartheta) = \ell(\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta) \Rightarrow x_p{}' = x_p\cos\vartheta - y_p\sin\vartheta$$
$$y_p{}' = \ell\sin(\varphi+\vartheta) = \ell(\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\cos\vartheta) \Rightarrow y_p{}' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$$

2Δ Μετασχηματισμός: Περιστροφή

- Ο μετασχηματισμός της περιστροφής γράφεται με την μορφή πίνακα ως εξής:

$$R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Και η νέα θέση του σημείου σε μορφή πινάκων είναι:

$$\begin{bmatrix} x_p{}' \\ y_p{}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{P}' = R(\vartheta) * \overline{P}$$

2Δ Μετασχηματισμός: Περιστροφή

- Η περιστροφή με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού καλείται θετική φορά περιστροφής (γωνία +*θ*).
- Η περιστροφή κατά φορά ίδια με αυτή των δεικτών του ρολογιού είναι καλείται αρνητική φορά και ο πίνακας μετασχηματισμού ισούται με:

$$R(-\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Το μόνο σημείο που μένει αναλλοίωτο από τον μετασχηματισμό της περιστροφής είναι το O(0,0).

Άσκηση 1: Μετασχηματισμός περιστροφής

Εκφώνηση: Ποια είναι η νέα θέση του σημείου $\overline{P} = (2,2)$ αν περιστραφεί κατά γωνία 45° γύρω από την αρχή των αξόνων;

Λύση: Ο πίνακας μετασχηματισμού που δηλώνει περιστροφή 45° γύρω από την αρχή των αξόνων είναι ο

$$R(45) = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.71 & -0.71 & 0 \\ 0.71 & 0.71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό στο σημείο $\overline{P}$, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα της περιστροφής με τον πίνακα των συντεταγμένων του σημείου λαμβάνεται η νέα θέση $\overline{P}'$ του σημείου $\overline{P}$.

$$\overline{P}' = R(45) * \overline{P} = \begin{pmatrix} 0.71 & -0.71 & 0 \\ 0.71 & 0.71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.84 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Σύνθεση Μετασχηματισμών

- Με τον όρο σύνθεση μετασχηματισμών εννοείται η διαδοχική εφαρμογή δύο ή περισσοτέρων μετασχηματισμών στο ίδιο σχήμα.
- Με τον τρόπο αυτό μπορούν να οριστούν πίνακες πιο περίπλοκων μετασχηματισμών με την χρήση των πινάκων των βασικών μετασχηματισμών.
- Έστω n μετασχηματισμοί με πίνακες $M_1, M_2, \ldots, M_n$ αντίστοιχα που εφαρμόζονται με διαδοχική σειρά σε ένα σημείο. Ο συνολικός πίνακας μετασχηματισμού ισούται με το γινόμενο των n πινάκων, τοποθετημένοι όμως με σειρά αντίθετη από τη σειρά εφαρμογής τους στο σημείο.

$$M = M_n * \ldots * M_2 * M_1$$

Άσκηση 2: Σύνθεση Μετασχηματισμών

- Επηρεάζει η φορά εφαρμογής των μετασχηματισμών σε ένα σχήμα το τελικό αποτέλεσμα;

Εκφώνηση: Έστω σημείο $\overline{P} = (2,2)$ και δύο σύνθετοι μετασχηματισμοί $M_1 = T(\vec{d})R(45^o)$ και $M_2 = R(45^o)T(\vec{d})$ με $\vec{d}(1,1)$.

Θα είναι ίδιο το αποτέλεσμα εφαρμογής των δύο μετασχηματισμών στο σημείο *P;*

Λύση: Αρχικά ελέγχουμε αν οι πίνακες M_1 και M_2 είναι ίδιοι.

Ο πίνακας $M_1 = T(\vec{d})R(45^o)$ περιγράφει πρώτα μία περιστροφή κατά γωνία 45^o γύρω από την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια μετακίνηση κατά διάνυσμα $\vec{d}(1,1)$. Ο συνολικός πίνακας μετασχηματισμού είναι:

$$M_1 = T(\vec{d})R(45^o) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.71 & -0.71 & 0 \\ 0.71 & 0.71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.71 & -0.71 & 1 \\ 0.71 & 0.71 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2: Σύνθεση Μετασχηματισμών

Ο πίνακας $M_2 = R(45^o)T(\vec{d})$ περιγράφει πρώτα μία μετακίνηση κατά διάνυσμα $\vec{d}(1,1)$ και στη συνέχεια μία περιστροφή κατά γωνία 45° γύρω από την αρχή των αξόνων. Ο συνολικός πίνακας μετασχηματισμού είναι:

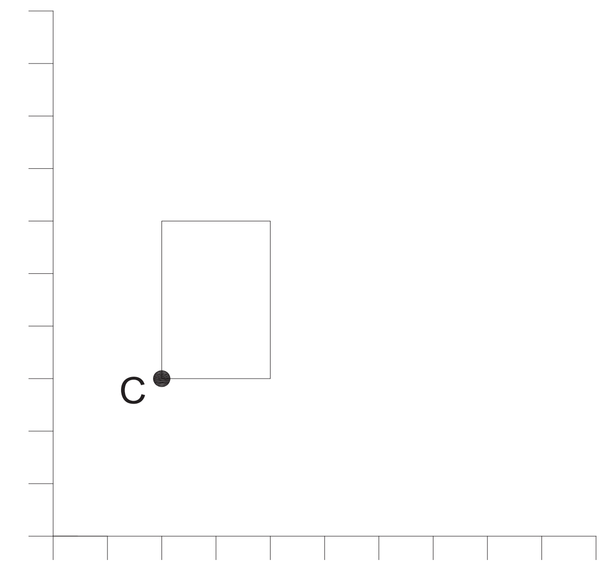
$$M_2 = R(45^o)T(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 0.71 & -0.71 & 0 \\ 0.71 & 0.71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.71 & -0.71 & 0 \\ 0.71 & 0.71 & 1.42 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

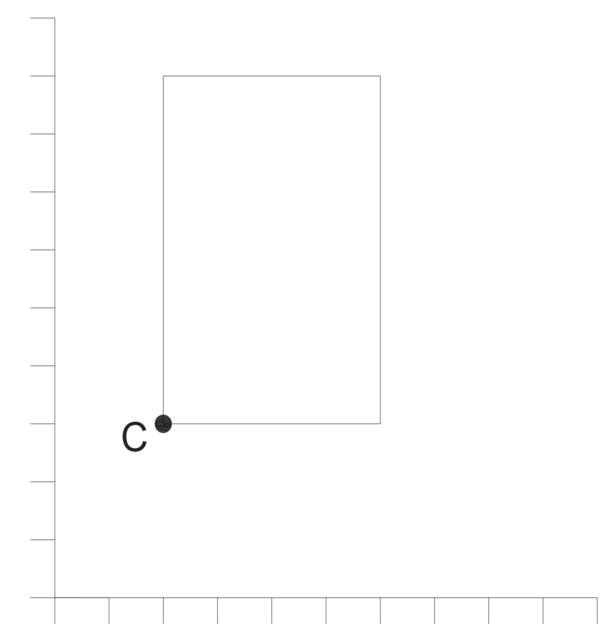
- Είναι φανερό ότι $M_1 \neq M_2$. Επομένως το αποτέλεσμα εφαρμογής τους στο σημείο $\overline{P} = (2,2)$ δεν θα είναι το ίδιο, όπως φαίνεται και από τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$\overline{P}_1 = M_1\overline{P} = \begin{pmatrix} 0.71 & -0.71 & 1 \\ 0.71 & 0.71 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.84 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overline{P}_2 = M_2\overline{P} = \begin{pmatrix} 0.71 & -0.71 & 0 \\ 0.71 & 0.71 & 1.42 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.26 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Αλλαγή Κλίμακας με σταθερό σημείο C

- Μία από τις εφαρμογές της σύνθεσης μετασχηματισμών είναι η δημιουργία ενός μετασχηματισμού που να επιτρέπει την αλλαγή κλίμακας διατηρώντας σταθερό ένα τυχαίο σημείο στο επίπεδο.
- Το σημείο αυτό μπορεί να είναι ένα σημείο του σχήματος ή ένα οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου.
- Όταν το σταθερό σημείο ανήκει στο σύνορο του σχήματος:
  - Αποφεύγεται η μετακίνηση του σχήματος που εμπεριέχεται στην απλή εφαρμογή της αλλαγής κλίμακας, και
  - Υπάρχει έλεγχος στη θέση του τελικού αντικειμένου όταν αυτό μεγεθυνθεί ή σμικρυνθεί.

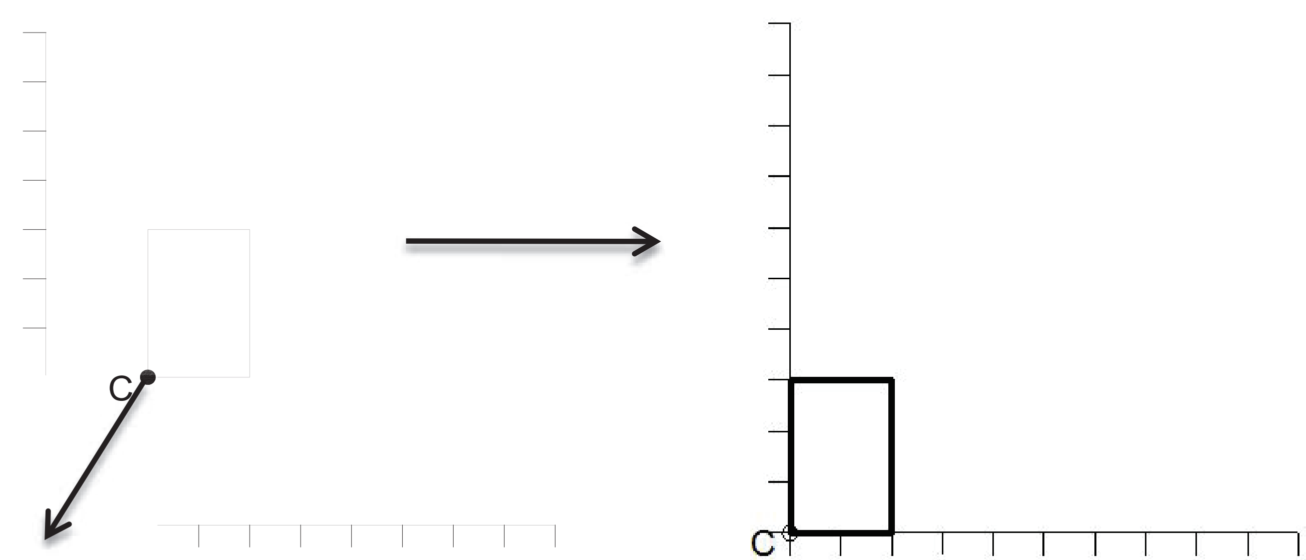




Αλλαγή Κλίμακας με σταθερό σημείο

- Ο νέος μετασχηματισμός δημιουργείται από τη σύνθεση τριών μετασχηματισμών ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:
  - Βήμα 1: Μετακίνηση ώστε το σημείο $\bar{C} = (c_x, c_y)$ που επιθυμούμε να παραμείνει σταθερό να βρεθεί στην αρχή των αξόνων.
    - Πίνακας μετασχηματισμού: Θέτουμε ως $\vec{d} = \overrightarrow{OC} = (c_x, c_y)$ και ορίζουμε μετακίνηση κατά $-\vec{d} = (-c_x, -c_y)$

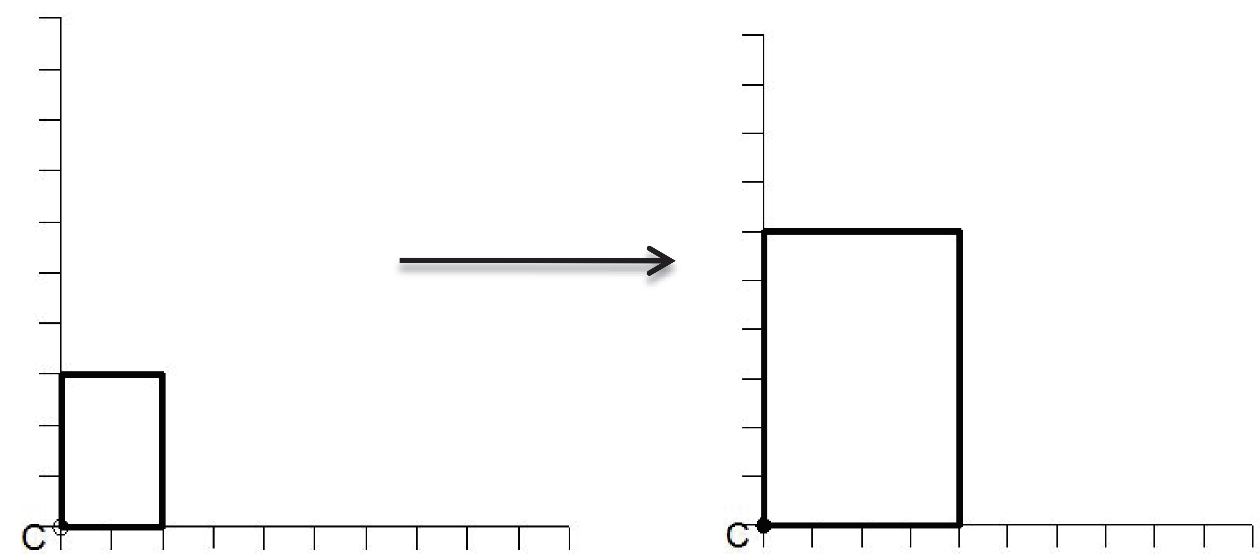
$$T(-\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c_x \\ 0 & 1 & -c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Αλλαγή Κλίμακας με σταθερό σημείο

- Βήμα 2: Αλλαγή κλίμακας. Επειδή το σημείο $\overline{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, κατά την αλλαγή κλίμακας θα παραμείνει σταθερό, αφού το σημείο O(0,0) είναι το μόνο σημείο που η θέση του δεν επηρεάζεται από την αλλαγή κλίμακας.
  - Πίνακας μετασχηματισμού: αλλαγή κλίμακας κατά (s_x, s_y)

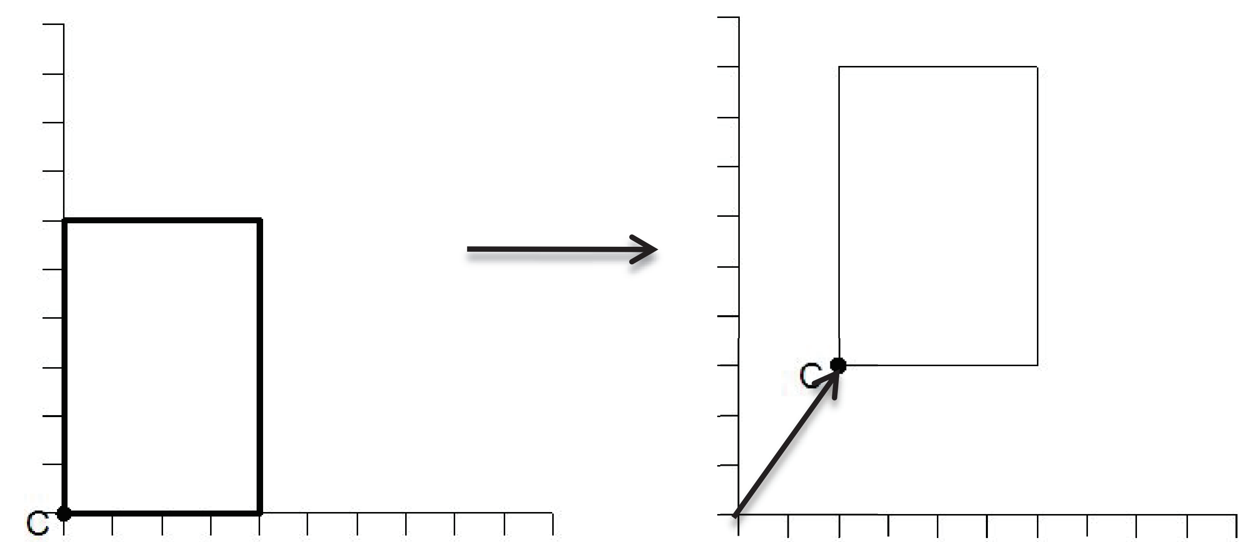
$$S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Αλλαγή Κλίμακας με σταθερό σημείο

- Βήμα 3: Μετακίνηση ώστε το σημείο $\overline{C}$ να επιστρέψει στην αρχική του θέση.
  - Πίνακας μετασχηματισμού: μετακίνηση κατά $\vec{d} = (c_x, c_y)$

$$T(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Ο συνολικός μετασχηματισμός είναι:

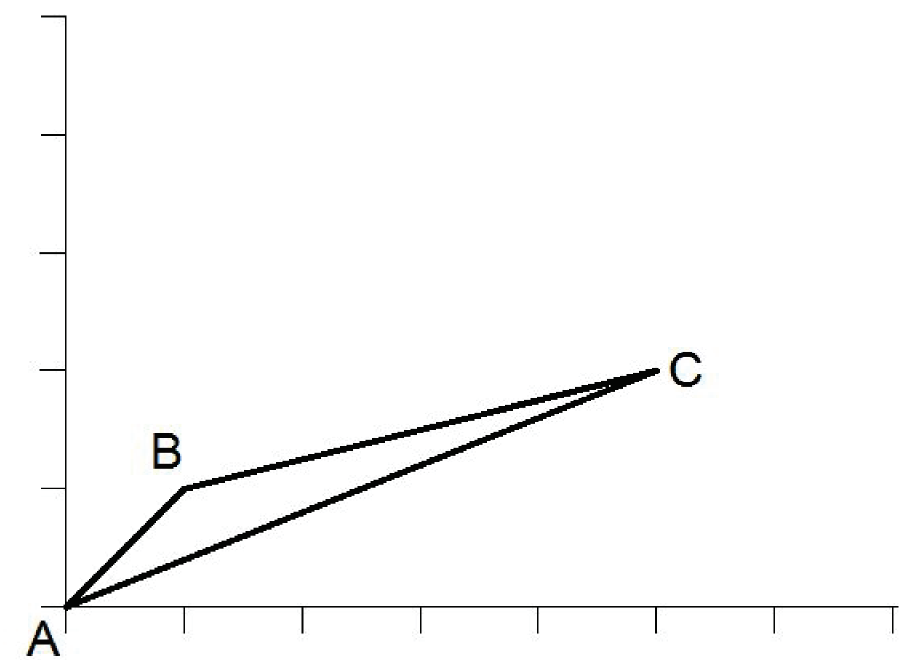
$$S(s_x, s_y; \overline{C}) = T(\vec{d})S(s_x, s_y)T(-\vec{d}) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & c_x(1-s_x) \\ 0 & s_y & c_y(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3: Αλλαγή κλίμακας με σταθερό σημείο C

Εκφώνηση:

- (α) Ποιος είναι ο πίνακας μετασχηματισμού διπλασιάζει το τρίγωνο ABC διατηρώντας το σημείο C σταθερό; Για το τρίγωνο ισχύει A(0, 0), B(1, 1), C(5, 2).
- (b) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του νέου σχήματος;

Λύση: (α) Όπως είδαμε και στις προηγούμενες διαφάνειες ο πίνακας αλλαγής κλίμακας με σταθερό σημείο C είναι ένας σύνθετος μετασχηματισμός που αναλύεται στα παρακάτω βήματα:



Άσκηση 3: Αλλαγή κλίμακας με σταθερό σημείο C

- *Βήμα 1*: Μετακίνηση ώστε το σημείο C να έρθει στην αρχή των αξόνων. Ορίζουμε διάνυσμα $\vec{d} = \overrightarrow{OC} = (5,2)$ και έχουμε μετακίνηση κατά $-\vec{d} = (-5,-2)$
  - Πίνακας μετασχηματισμού:

$$T(-\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Βήμα 2*: Αλλαγή κλίμακας με $s_x = 2, s_y = 2$
  - Πίνακας μετασχηματισμού:

$$S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3: Αλλαγή κλίμακας με σταθερό σημείο C

- *Βήμα 3*: Μετακίνηση ώστε το σημείο C να επανέρθει στην αρχική του θέση. Μετακίνηση κατά $\vec{d} = (5,2)$
  - Πίνακας μετασχηματισμού:

$$T(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Συνολικός Μετασχηματισμός:

$$S(s_x, s_y; \overline{C}) = T(\vec{d}) S(s_x, s_y) T(-\vec{d}) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

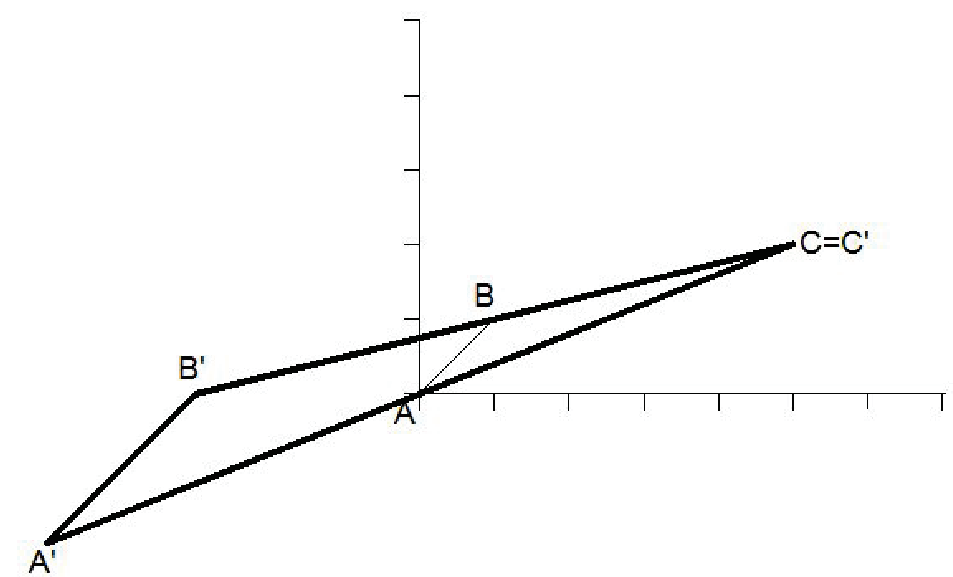
Άσκηση 3: Αλλαγή κλίμακας με σταθερό σημείο C

- (β) Η νέα θέση του τριγώνου προκύπτει αν πολλαπλασιαστεί ο πίνακας μετασχηματισμού $S(s_x, s_y; \overline{C})$ με τις ομογενείς συντεταγμένες των σημείων που ορίζουν το τρίγωνο.

  Επομένως έχουμε:

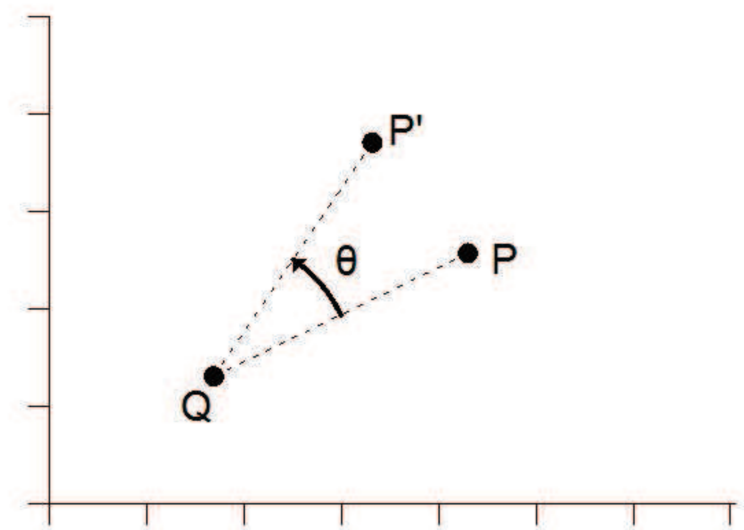
$$\begin{pmatrix} x_A' & x_B' & x_C' \\ y_A' & y_B' & y_C' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_A' & x_B' & x_C' \\ y_A' & y_B' & y_C' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



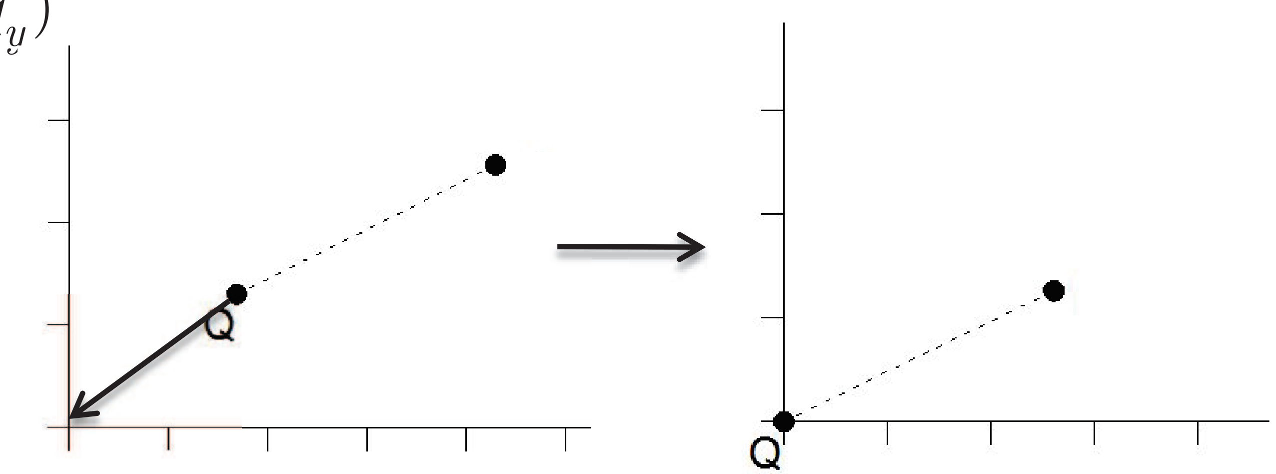
Περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από σημείο Q

- Στον μετασχηματισμό της περιστροφής έχει νόημα το σημείο Q να είναι είτε σημείο του σχήματος που πρόκειται να περιστραφεί ή κάποιο άλλο σημείο εκτός του σχήματος.
- Ο νέος μετασχηματισμός δημιουργείται από τη σύνθεση τριών μετασχηματισμών ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:



  - Βήμα 1: Μετακίνηση ώστε το σημείο $\bar{Q} = (q_x, q_y)$ γύρω από το οποίο ορίζεται η περιστροφή να βρεθεί στην αρχή των αξόνων.
    - Πίνακας μετασχηματισμού: Θέτουμε ως $\vec{d} = \overrightarrow{OQ} = (q_x, q_y)$ και ορίζουμε μετακίνηση κατά $-\vec{d} = (-q_x, -q_y)$

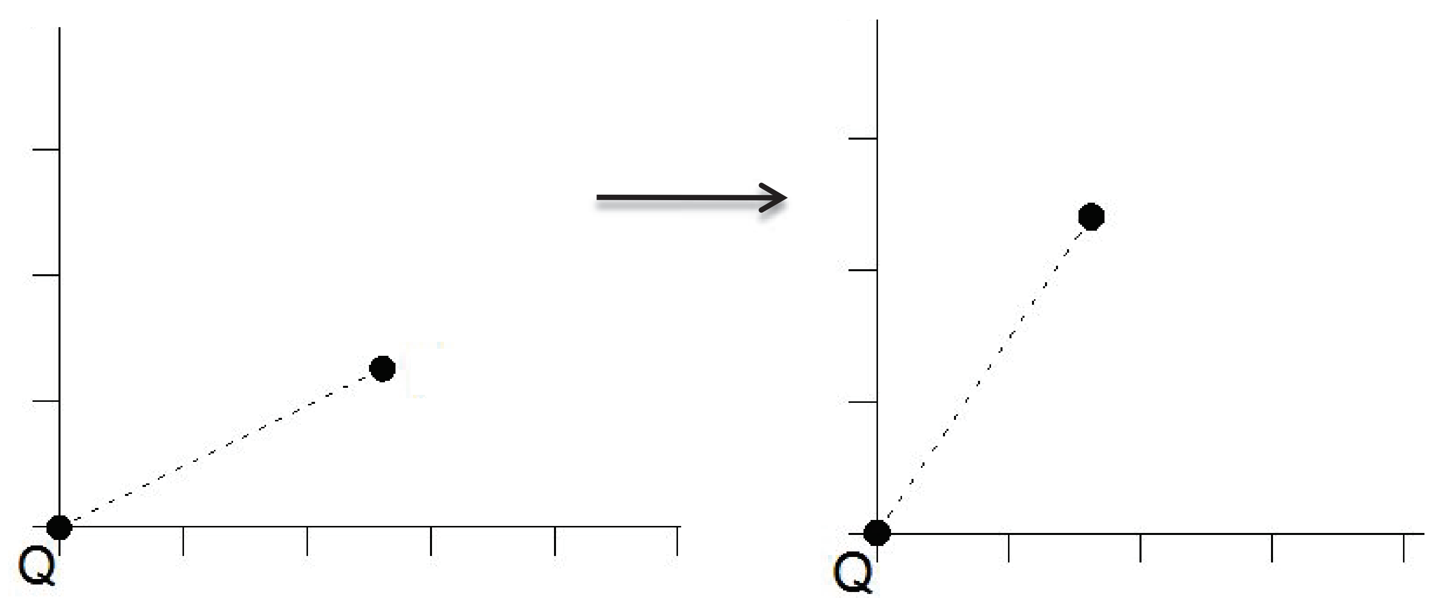
$$T(-\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_x \\ 0 & 1 & -q_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από σημείο Q

- Βήμα 2: Περιστροφή κατά γωνία θ. Χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός της περιστροφής όπως ορίζεται γύρω από το O(0,0). Επειδή όμως το σημείο Q έχει ταυτιστεί με την αρχή των αξόνων, είναι σαν να εκτελείται περιστροφή γύρω από το Q.
  - Πίνακας μετασχηματισμού: Περιστροφή κατά θετική γωνία θ

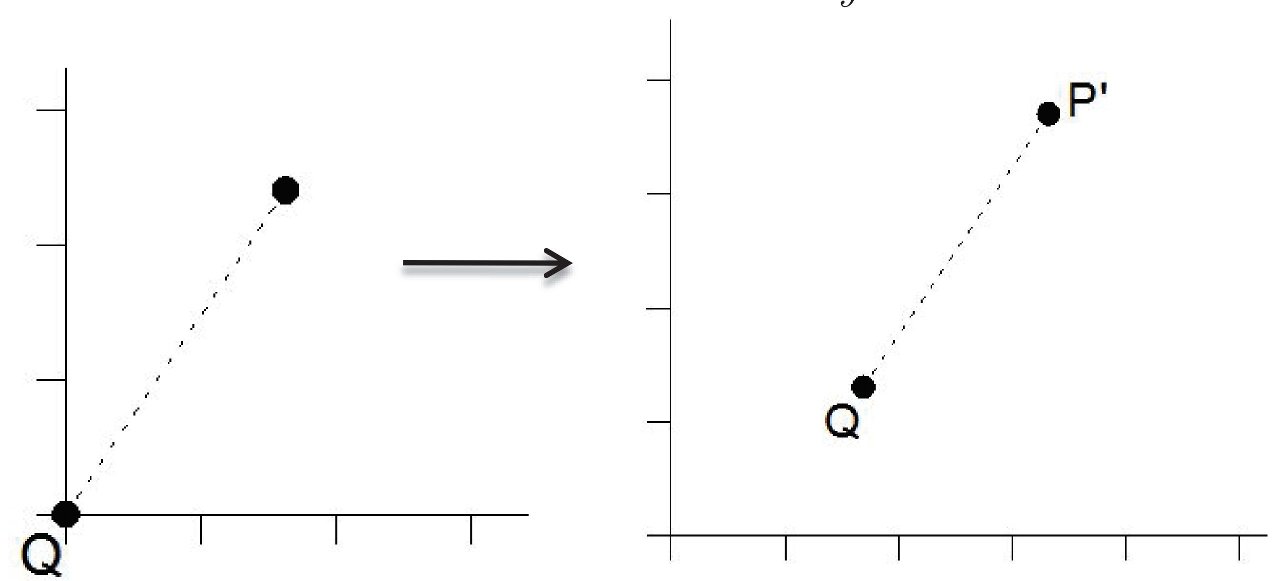
$$R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από σημείο Q

- Βήμα 3: Μετακίνηση ώστε το σημείο $\overline{Q}$ να επιστρέψει στην αρχική του θέση.
  - Πίνακας μετασχηματισμού: μετακίνηση κατά $\vec{d} = (q_x, q_y)$

$$T(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & q_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Ο συνολικός μετασχηματισμός είναι:

$$R(\theta;\overline{Q}) = T(\vec{d})R(\theta)T(-\vec{d}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & -q_x\cos\theta + q_y\sin\theta + q_x \\ \sin\theta & \cos\theta & -q_x\sin\theta - q_y\cos\theta + q_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4: Περιστροφή γύρω από σημείο Q

Άσκηση προς λύση…

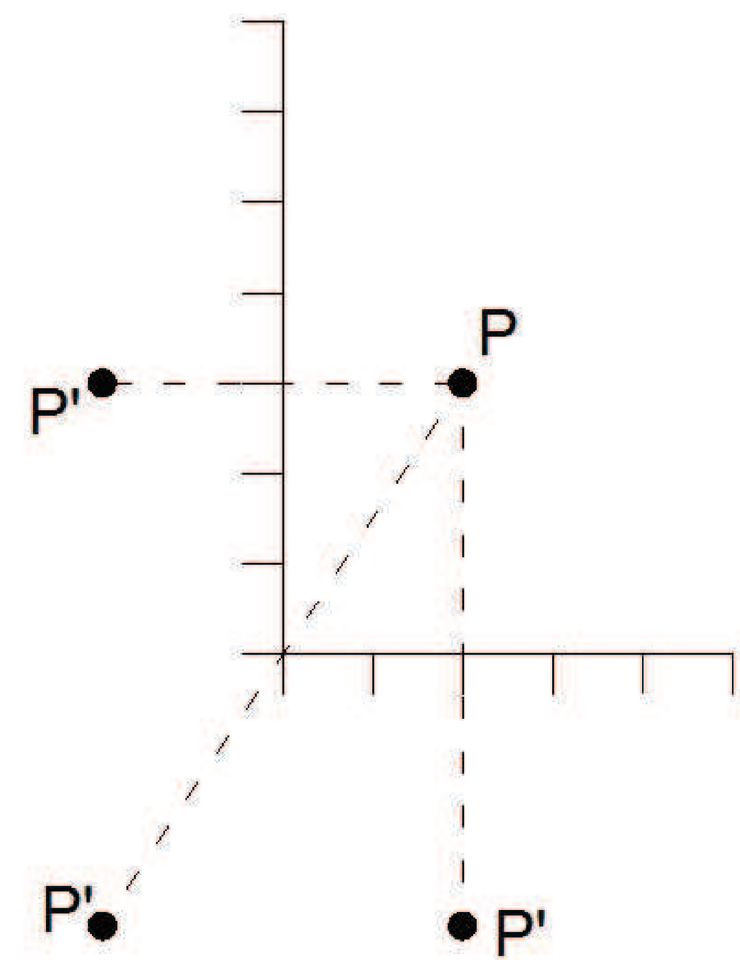
Εκφώνηση:

- (a) Ποιος είναι ο πίνακας μετασχηματισμού που περιστρέφει κατά γωνία 45^o το τρίγωνο ABC γύρω από το σημείο Q(-1,-1);
- (b) Ποιος είναι ο πίνακας μετασχηματισμού που περιστρέφει κατά γωνία 45^o το τρίγωνο ABC γύρω από το σημείο Q(5,2);
- (c) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του νέου σχήματος για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις;

- Για το τρίγωνο ισχύει A(0, 0), B(1, 1), C(5, 2).

Συμμετρία (Mirror)

- Στον 2Δ χώρο μπορεί να οριστεί συμμετρία γύρω από:
  - Την αρχή των αξόνων – σημείο O(0,0)
  - Τον άξονα XX’
  - Τον άξονα YY’



- **Πίνακες Μετασχηματισμού**:
  - Συμμετρία ως προς O(0,0)

$$M_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

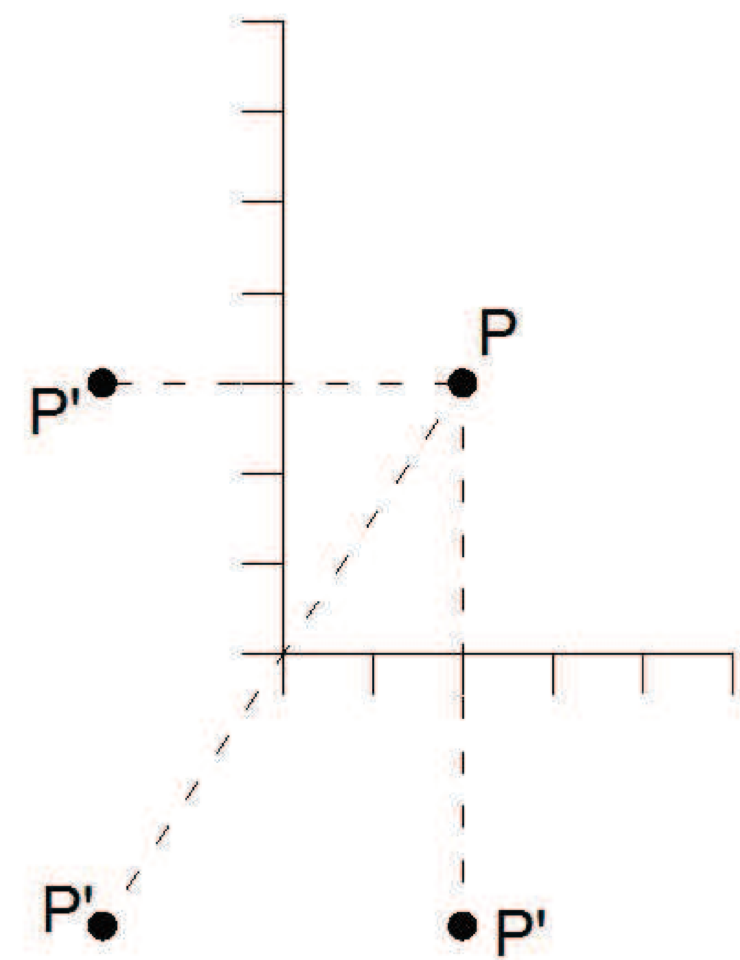
Συμμετρία (Mirror)

- Συμμετρία ως προς τον άξονα XX′

$$M_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

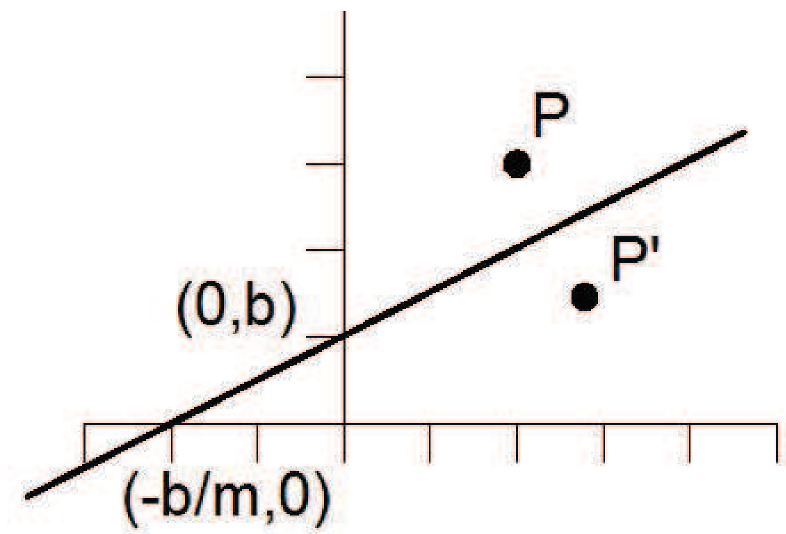
- Συμμετρία ως προς τον άξονα YY′

$$M_Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

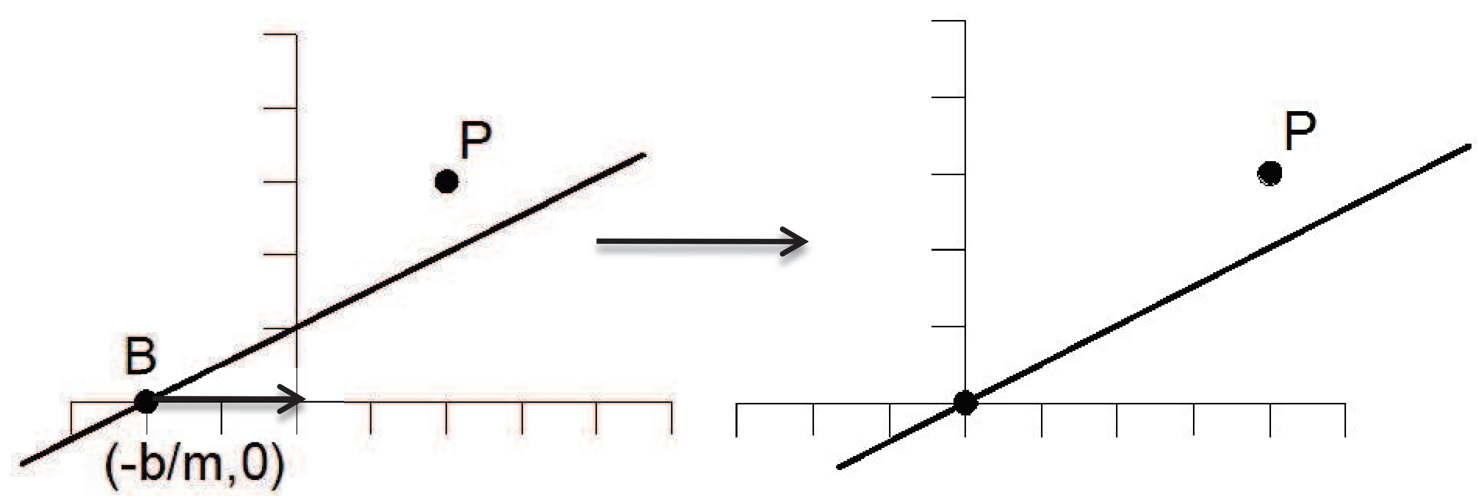


Συμμετρία (Mirror) ως προς τυχαία ευθεία L

- Συμμετρία ως προς τυχαία ευθεία L: $y = m\,x + b$.
- Σύνθετος μετασχηματισμός που αναλύεται στα παρακάτω βήματα:
  - Βήμα 1: Μετακίνηση ώστε η ευθεία L να διέρχεται από την αρχή των αξόνων: Ορίζεται διάνυσμα $\vec{d} = \overrightarrow{OB} = (-b/m, 0)$ και μετακίνηση κατά $-\vec{d} = (b/m, 0)$



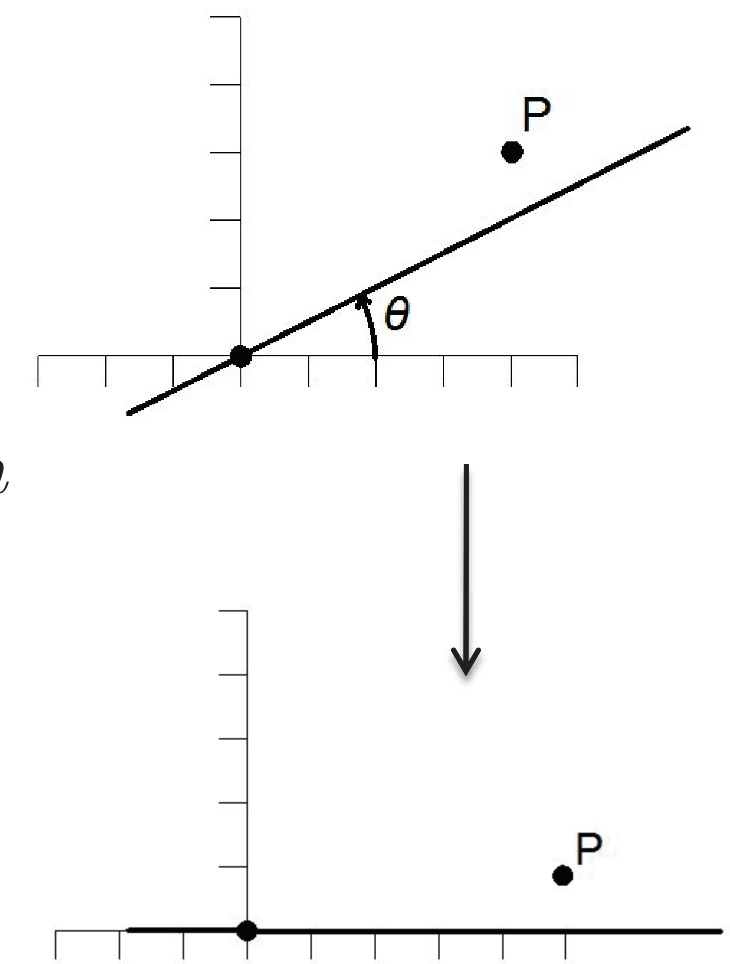
$$T(-\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b/m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Συμμετρία (Mirror) ως προς τυχαία ευθεία L

- Βήμα 2: Περιστροφή ώστε η ευθεία L να ταυτιστεί με τον άξονα XX'. Αρνητική φορά περιστροφής:

$$R(-\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Για την γωνία θ γνωρίζουμε ότι $\tan(\vartheta) = m$

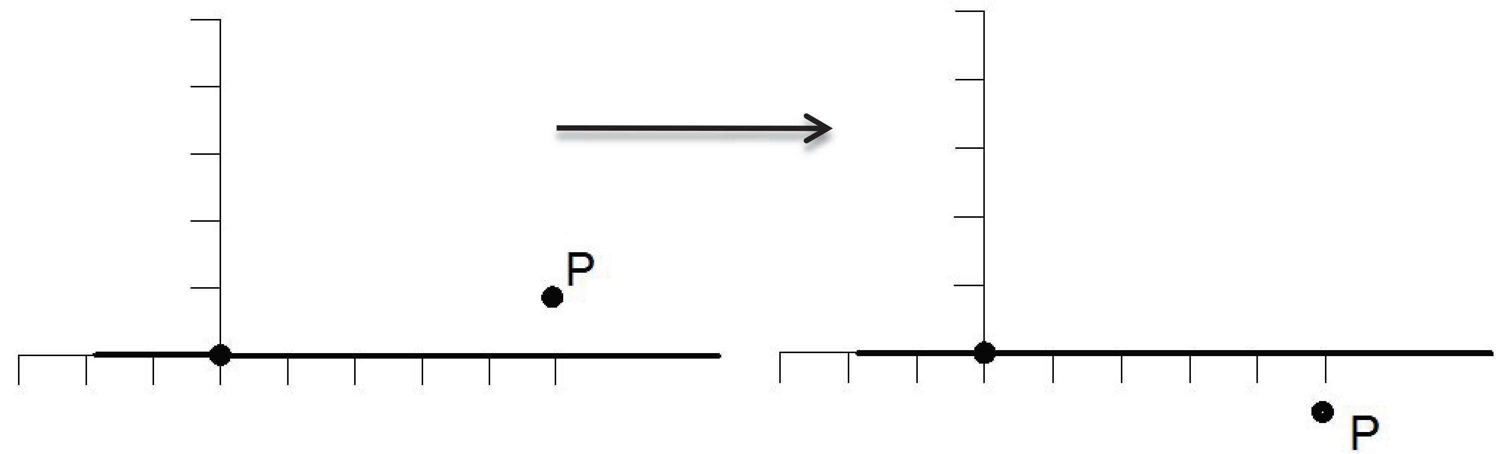
από τα δεδομένα της ευθείας. Και επειδή

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) = 1 \\ &\tan(\vartheta) = \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\cos(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \\ &\sin(\vartheta) = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \end{aligned}\right\}$$

Συμμετρία (Mirror) ως προς τυχαία ευθεία L

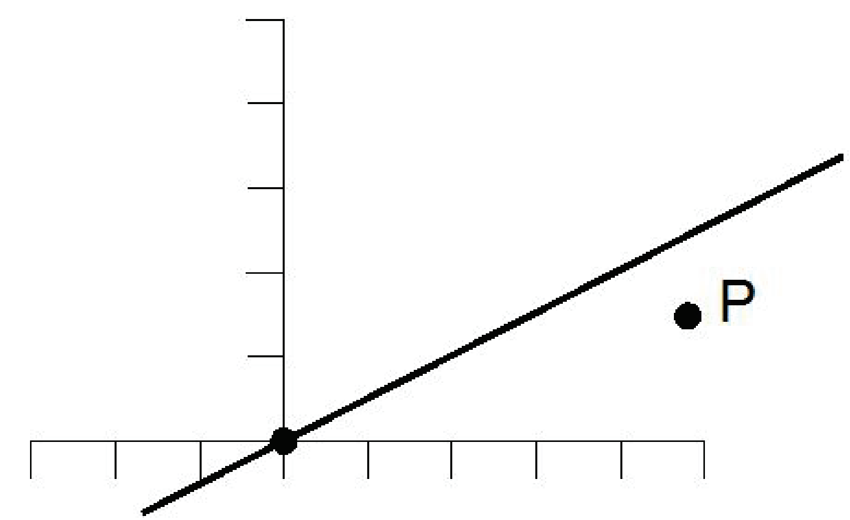
- Βήμα 3: Συμμετρία ως προς τον άξονα XX′ και κατά συνέπεια και ως προς την ευθεία L που ταυτίζεται με τον άξονα αυτόν.

$$M_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Βήμα 4: Περιστροφή κατά γωνία θ ώστε η ευθεία L να αποκτήσει την αρχική της κλίση:

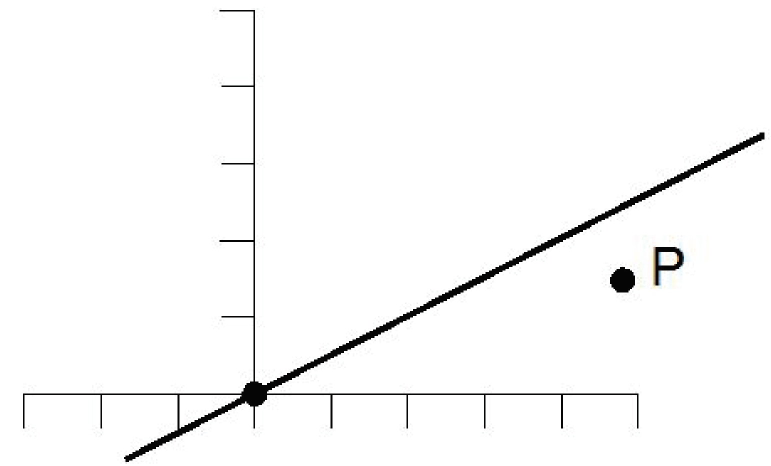
$$R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \left.\begin{aligned} \cos(\vartheta) &= \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \\ \sin(\vartheta) &= \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \end{aligned}\right\}$$



Συμμετρία (Mirror) ως προς τυχαία ευθεία L

- Βήμα 5: Μετακίνηση κατά διάνυσμα $\vec{d} = (-b/m, 0)$ ώστε η ευθεία L να επιστρέψει στην αρχική της θέση:

$$T(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b/m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Ο τελικός πίνακας μετασχηματισμού είναι:

$$M_L = T(\vec{d})R(\vartheta)M_x R(-\vartheta)T(-\vec{d}) = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{m^2+1} & \frac{2m}{m^2+1} & \frac{-2bm}{m^2+1} \\ \frac{2m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1} & \frac{2b}{m^2+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5: Συμμετρία ως προς ευθεία L

Εκφώνηση: Να βρεθεί ο πίνακας μετασχηματισμού M_L που υπολογίζει το συμμετρικό ενός αντικειμένου ως προς μία ευθεία L η οποία διέρχεται από το σημείο Q(1,1) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα v(3,4).

Λύση: Η ευθεία δίδεται με διαφορετικό τρόπο από ότι στο προηγούμενο παράδειγμα. Για να αναπαραστήσουμε την ευθεία πρέπει να βρούμε άλλο ένα σημείο πάνω σε αυτή. Δεδομένου του σημείου Q και του διανύσματος v, γνωρίζουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε άλλο ένα σημείο από την σχέση: $\overline{R} = \overline{Q} + \vec{v} = (1,1) + (3,4) = (4,5)$

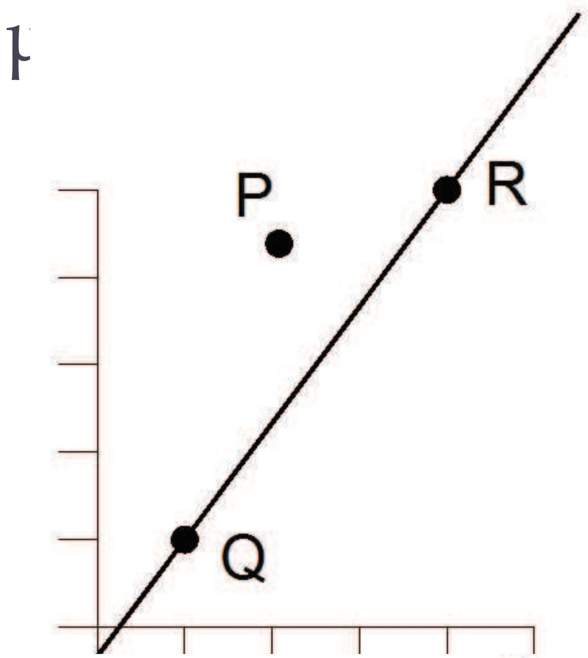
Τα σημεία R και Q ορίζουν την ευθεία του προβλήματος.

- Ο πίνακας μετασχηματισμού αναλύεται στα ίδια βήματα, όπως αυτά περιγράφηκαν στο παράδειγμα συμμετρίας ως προς τυχαία ευθεία L.

Άσκηση 5: Συμμετρία ως προς ευθεία L

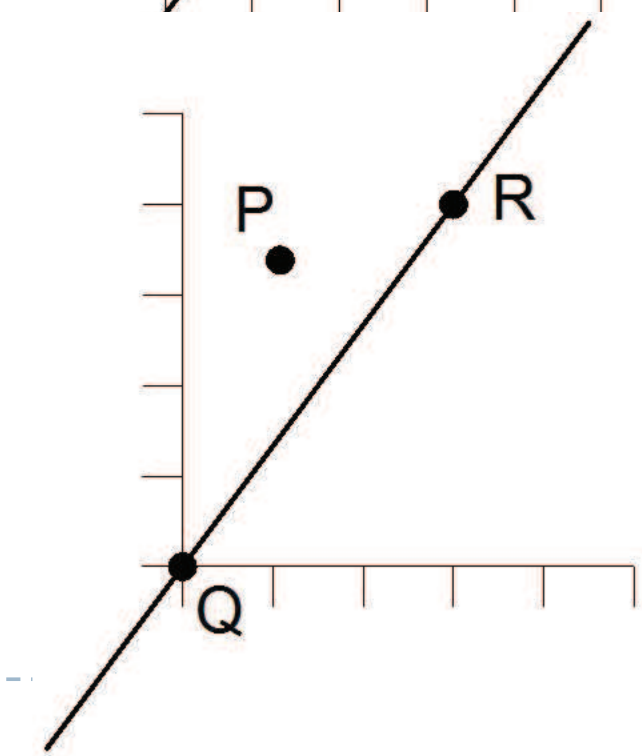
- Βήμα 1: Μετακίνηση ώστε η ευθεία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αρκεί το σημείο Q να ταυτιστεί μ
  Επομένως ορίζεται διάνυσμα $\vec{d} = \overrightarrow{OQ} = (1,1)$
  και μετακίνηση κατά $-\vec{d} = (-1,-1)$

$$T(-\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



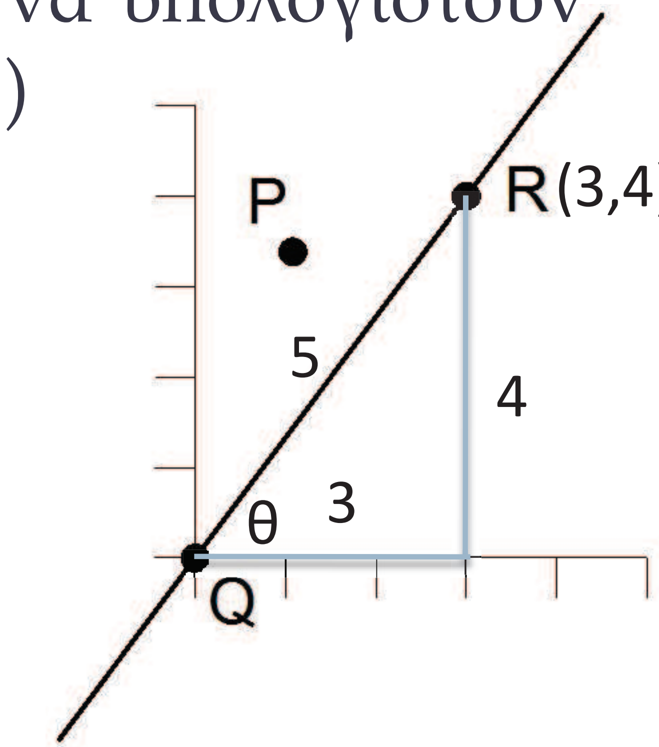
- Βήμα 2: Περιστροφή κατά γωνία –θ ώστε η ευθεία να ταυτιστεί με τον άξονα XX′:

$$R(-\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Άσκηση 5: Συμμετρία ως προς ευθεία L

- Βήμα 2 (συνέχεια): Για την γωνία θ πρέπει να υπολογιστούν το ημίτονο (sin(θ)) και το συνημίτονο (cos(θ)) της. Μετά την μετακίνηση στο πρώτο βήμα, εκτός από το σημείο Q μετακινήθηκε και το σημείο R η νέα θέση του οποίου είναι R(3,4).



Επομένως, βάσει της τριγωνομετρίας έχουμε

$\cos(\vartheta) = {}^{3}\!/_{5}$ και $\cos(\vartheta) = {}^{3}\!/_{5}$.

- Βήμα 3: Συμμετρία ως προς τον άξονα XX′, πάνω στο οποίο βρίσκεται και η ευθεία L.

$$M_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5: Συμμετρία ως προς ευθεία L

- Βήμα 4: Περιστροφή κατά θ με $\cos(\vartheta) = 3/5$ και $\sin(\vartheta) = 4/5$ ώστε η ευθεία να επιστρέψει στην αρχική της κλίση:

$$R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Βήμα 5: Μετακίνηση κατά $\vec{d} = (1,1)$ ώστε η ευθεία να επιστρέψει στην αρχική της θέση:

$$T(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5: Συμμετρία ως προς ευθεία L

- Ο τελικός πίνακας μετασχηματισμού προκύπτει από το γινόμενο των παρακάτω πινάκων:
  $M_L = T(\vec{d})R(\vartheta)M_x R(-\vartheta)T(-\vec{d})$
- *Προσέγγιση 2*: Μπορεί κάποιος χρησιμοποιώντας τα σημεία Q και R ή τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος να βρει την εξίσωση της ευθείας:

  Έστω η ευθεία $ax + by + \gamma = 0$. Το παράλληλο διάνυσμα σε αυτή είναι $(-b, a)$ και από τα δεδομένα της άσκησης γνωρίζουμε ότι αυτό πρέπει να ισούται με $(-b, a) = (3, 4)$.

  Συνεπώς έχουμε $4x - 3y + \gamma = 0$ και επειδή το σημείο Q(1,1) ανήκει στην ευθεία, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι γ=1. Άρα η ευθεία είναι $4x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = {}^{4}\!/_{3}\, x + {}^{1}\!/_{3}$
  Οπότε μπορεί να λυθεί όπως το παράδειγμα συμμετρίας για τα δεδομένα της γωνίας θ, με $m = {}^{4}\!/_{3}\, x,\ \kappa\alpha\iota$ b= ${}^{1}\!/_{3}$

Άσκηση 6: Συμμετρία ως προς ευθεία L

Άσκηση προς λύση…

Εκφώνηση: Δίνεται σχήμα Π που ορίζεται από τα σημεία A(-1,0), B(0,-2), C(1,0) και D(0,2). Ζητείται:

- (α) Ο πίνακας μετασχηματισμού M_L που υπολογίζει το συμμετρικό του Π ως προς την ευθεία y = x+2.
- (β) Ποιο είναι το νέο σχήμα;

3Δ Μετασχηματισμοί

- Οι 2Δ μετασχηματισμοί που μελετήθηκαν στις προηγούμενες διαφάνειες, ορίζονται και στον 3Δ χώρο.
- Κάθε σημείο του 3Δ χώρου αναπαρίσταται από τις ομογενείς συντεταγμένες του, ως ένας πίνακας 4x1: $\bar{P} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$
- Οι πίνακες μετασχηματισμών αντίστοιχα είναι πίνακες 4x4 και ορίζονται κατά αντιστοιχία με τους 2Δ ως εξής:
  - *Μεταφορά* κατά διάνυσμα $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$

$$T(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3Δ Μετασχηματισμοί

- *Αλλαγή κλίμακας* με συντελεστές (s_x, s_y, s_z):

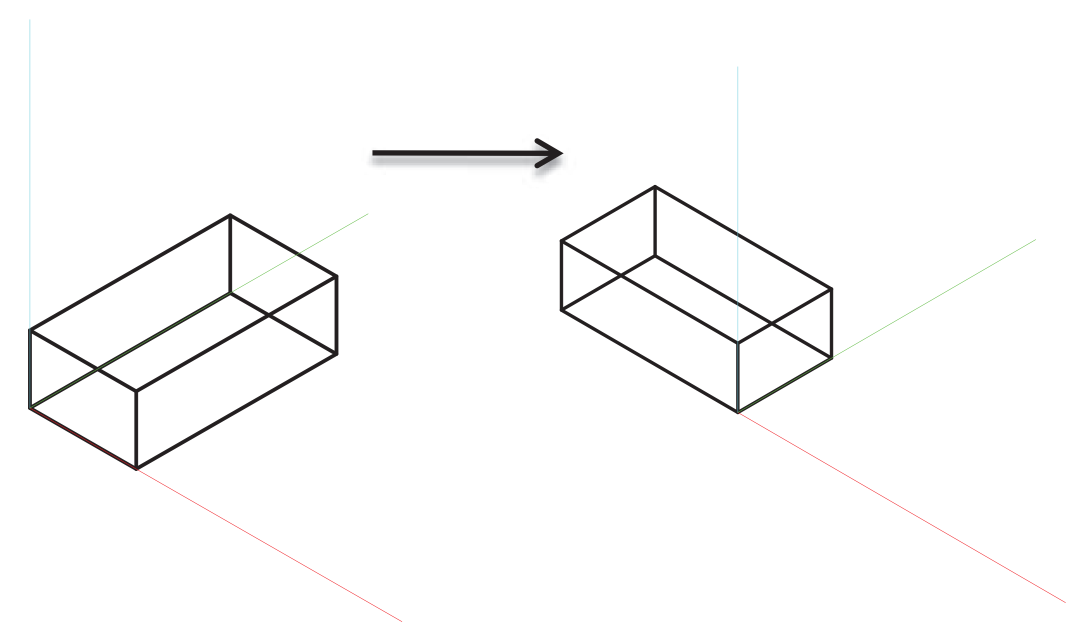
$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιότητες της 3Δ αλλαγής κλίμακας είναι ίδιες με αυτής που συντελείται στις δύο διαστάσεις.

- *Περιστροφή*: Ορίζεται μία περιστροφή γύρω από κάθε άξονα. Κάθε περιστροφή περιγράφεται από διαφορετικό πίνακα.

Περιστροφή γύρω από τον άξονα ZZ':

$$R_z(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

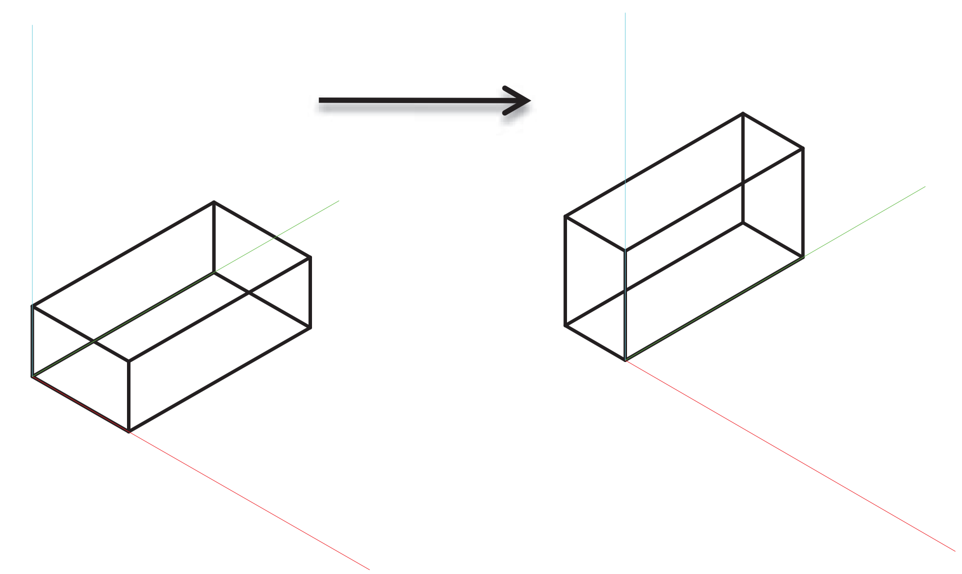


3Δ Μετασχηματισμοί

- Τα σημεία (των αντικειμένων) που περιστρέφονται γύρω από τον άξονα των ZZ′ είναι σαν να περιστρέφονται πάνω σε ένα επίπεδο που ταυτίζεται ή είναι παράλληλο του επιπέδου Z=0 (επίπεδο XY).
- Οπότε η z συντεταγμένη των σημείων παραμένει σταθερή.

Περιστροφή γύρω από τον άξονα YY′:

$$R_y(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

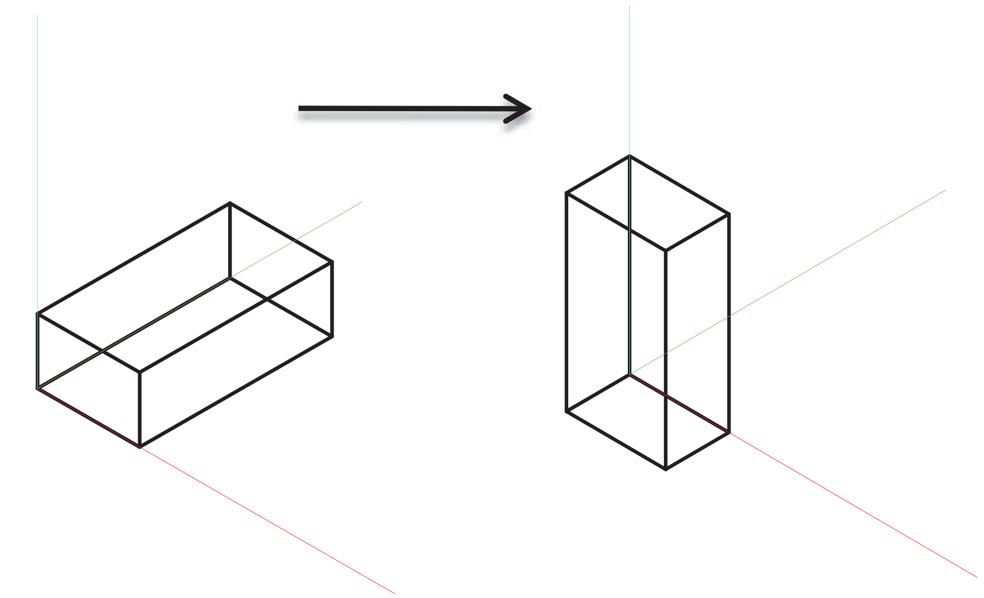


- Αντίστοιχα, τα σημεία περιστρέφονται πάνω σε ένα επίπεδο που ταυτίζεται/είναι παράλληλο με το επίπεδο XZ, και η y συντεταγμένη των σημείων παραμένει σταθερή.

3Δ Μετασχηματισμοί

Περιστροφή γύρω από τον άξονα XX′:

$$R_x(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Αντίστοιχα, τα σημεία περιστρέφονται πάνω σε ένα επίπεδο που ταυτίζεται/είναι παράλληλο με το επίπεδο YZ, και η x συντεταγμένη των σημείων παραμένει σταθερή.

3Δ Μετασχηματισμοί

- *Ταύτιση διανύσματος θέσης με τον άξονα ZZ′*: Ο μετασχηματισμός αυτός προκύπτει από τη σύνθεση δύο διαδοχικών περιστροφών. Στόχος είναι το διάνυσμα $\vec{v} = (a, b, c)$ να ταυτιστεί με τον άξονα ZZ′ και το τελικό αποτέλεσμα είναι ο πίνακας:

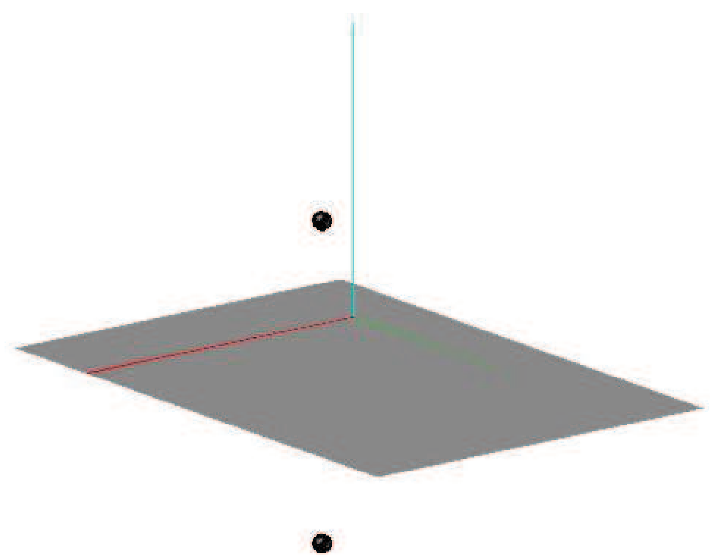
$$A_z(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{v}|} & \frac{-ab}{\lambda|\vec{v}|} & \frac{-ac}{\lambda|\vec{v}|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|\vec{v}|} & \frac{b}{|\vec{v}|} & \frac{c}{|\vec{v}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu\varepsilon \quad \begin{cases} \lambda = \sqrt{b^2 + c^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

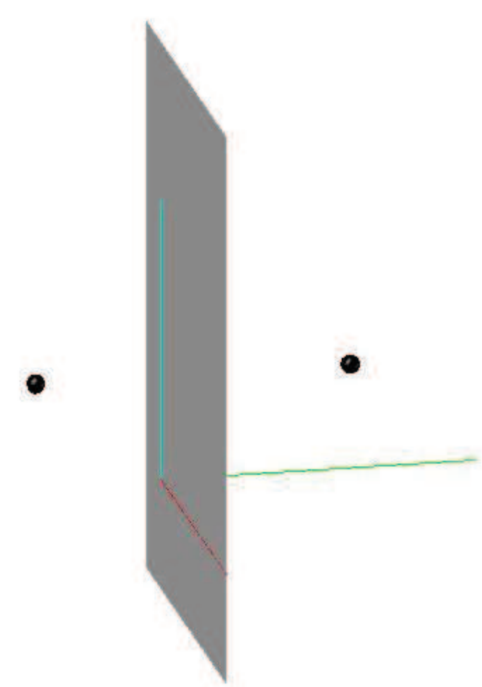
$$A^{-1}{}_z(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{v}|} & 0 & \frac{a}{|\vec{v}|} & 0 \\ \frac{-ab}{\lambda|\vec{v}|} & \frac{c}{\lambda} & \frac{b}{|\vec{v}|} & 0 \\ \frac{-ac}{\lambda|\vec{v}|} & \frac{-b}{\lambda} & \frac{c}{|\vec{v}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

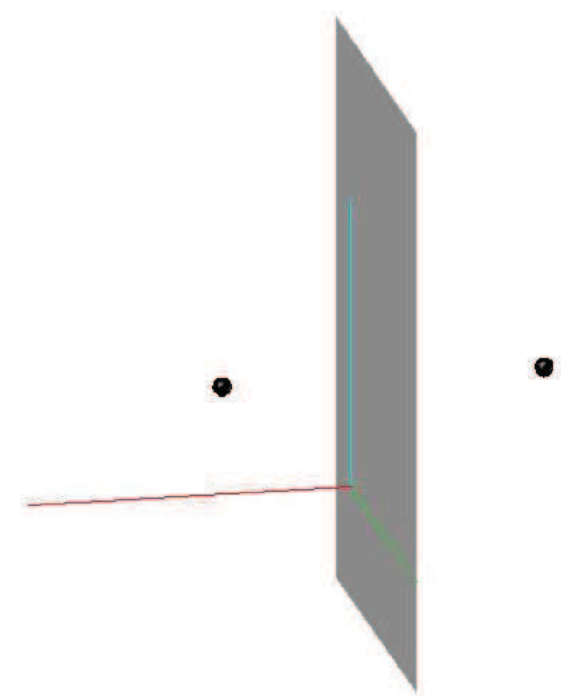
3Δ Μετασχηματισμοί

- *Συμμετρία*: Στον 3Δ χώρο ορίζεται συμμετρία ως προς ένα από τα βασικά επίπεδα του χώρου XY, XZ, YZ. Οι αντίστοιχοι πίνακες συμμετρίας είναι:

$$M_{XY} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{XZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{YZ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$







Άσκηση 7: 3Δ Περιστροφή γύρω από ευθεία L

Εκφώνηση: Δίνεται πυραμίδα με σημεία A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0) και D(0,0,1). Ποιος είναι ο πίνακας μετασχηματισμού R_L που περιστρέφει την πυραμίδα κατά γωνία 45^o γύρω από ευθεία που διέρχεται από το σημείο E(1,1,0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα v(2,2,1);

Λύση: Επειδή υπάρχουν γνωστοί πίνακες μετασχηματισμού περιστροφής γύρω από τους τρεις βασικούς άξονες, για τον υπολογισμό του R_L πρέπει (1) να ταυτιστεί η ευθεία L με ένα από τους βασικούς άξονες, (2) να περιστραφεί κατά 45 μοίρες γύρω από αυτόν, και (3) να επανέλθει στην αρχική της θέση.

Για να επιτευχθούν τα παραπάνω ο πίνακας μετασχηματισμού αναλύεται σε 5 βήματα:

Άσκηση 7: 3Δ Περιστροφή γύρω από ευθεία L

- Βήμα 1: Μεταφορά του σημείου E(1,1,0) στην αρχή των αξόνων. Ορίζουμε διάνυσμα $\vec{d} = \overrightarrow{OE} = (1,1,0)$ και η μετακίνηση γίνεται κατά $-\vec{d} = (-1,-1,0)$

$$T(-\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2: Ευθυγράμμιση του διανύσματος της ευθείας $\vec{v} = (2,2,1)$ με τον άξονα ZZ′.
Μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας ο πίνακας:

$$A_z(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\left|\vec{v}\right|} & \frac{-ab}{\lambda\left|\vec{v}\right|} & \frac{-ac}{\lambda\left|\vec{v}\right|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{\left|\vec{v}\right|} & \frac{b}{\left|\vec{v}\right|} & \frac{c}{\left|\vec{v}\right|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu\varepsilon \quad \begin{cases} \lambda = \sqrt{b^2 + c^2} \\ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

Άσκηση 7: 3Δ Περιστροφή γύρω από ευθεία L

- Βήμα 2: Με τα δεδομένα του διανύσματος $\vec{v}=(2,2,1)$ έχουμε

$$A_z(\vec{v})=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{-4\sqrt{5}}{15} & \frac{-2\sqrt{5}}{15} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu\varepsilon \begin{cases} \vec{v}=(a,b,c)=(2,2,1) \\ \lambda=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5} \\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{4+4+1}=3 \end{cases}$$

- Βήμα 3: Αφού ταυτίστηκε η ευθεία L με τον άξονα ZZ′, χρησιμοποιείται περιστροφή γύρω από τον άξονα ZZ′ κατά γωνία 45 μοίρες.

$$R_z(\vartheta)=\begin{pmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 0 & 0 \\ \sin(45) & \cos(45) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 7: 3Δ Περιστροφή γύρω από ευθεία L

- Βήμα 4: Ξεκινάει η επιστροφή της ευθείας (και όλης της σκηνής) στην αρχική της θέση. Αρχικά (στο βήμα αυτό) το διάνυσμα της ευθείας επιστρέφει στην αρχική του θέση με την χρήση του πίνακα:

$$A_z^{-1}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{-4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Βήμα 5: Μετακίνηση ώστε να διέρχεται από το σημείο Ε(1,1,0). Μετακίνηση κατά διάνυσμα $\vec{d} = \overrightarrow{OE} = (1,1,0)$

$$T(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Συνολικός πίνακας μετασχηματισμού:

$$R_L(45) = T(-\vec{d})A_z(\vec{v})R_z(45)A_z^{-1}(\vec{v})T(\vec{d})$$

Άσκηση 8: 3Δ Περιστροφή γύρω από ευθεία L

Άσκηση για λύση…

Εκφώνηση: Δίνεται πυραμίδα με σημεία A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0) και D(0,0,1). Ποιος είναι ο πίνακας μετασχηματισμού R_L που περιστρέφει την πυραμίδα κατά γωνία 45^o γύρω από ευθεία που διέρχεται από το σημείο C(0,1,0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα v(0,1,1);

Άσκηση 9: Ταύτιση διανύσματος με άξονα

Άσκηση για λύση…

Εκφώνηση: Ποιος είναι ο πίνακας μετασχηματισμού που ταυτίζει το διάνυσμα v(2,3,5) με τον άξονα των

(α) ZZ′ ;

(β) XX′ ;

(γ) YY′ ;

(Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε για τη λύση της άσκησης τον πίνακα $A_z(\vec{v})$)

Άσκηση 10: Συμμετρία ως προς επίπεδο

Άσκηση για λύση…

Εκφώνηση: Ποιος είναι ο πίνακας μετασχηματισμού που βρίσκει το συμμετρικό ενός αντικειμένου ως προς το επίπεδο Ε: 2x + 3y + z + 1 = 0.

(Πρέπει να ταυτίσετε το επίπεδο με κάποιο από τα βασικά επίπεδα του χώρου χρησιμοποιώντας το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου).

Βιβλιογραφία

- Γραφικά και Οπτικοποίηση – Αρχές και Αλγόριθμοι, Θ. Θεοχάρης, Γ. Παπαϊωάννου, Ν. Πλατής, Ν. Μ. Πατρικαλάκης, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2010.
- Γραφικά – Αρχές και Αλγόριθμοι, Θ. Θεοχάρης, Α. Μπεμ, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999.