

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Η θεωρία παιγνίων συμβάλει στην λήψη αποφάσεων σε καταστάσεις παιγνίων. Πάιγνιο είναι η κατάσταση κατά την οποία δύο ή περισσότεροι ορθολογικοί λήπτες απόφασης (παίκτες) με αντικρουόμενους στόχους επιλέγουν ενέργειες υπό συνθήκες ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης.

Βασικό στοιχείο του παιγνίου είναι οι παίκτες αλλά επίσης και οι κανόνες, οι πληροφορίες, διάφορες μεταβλητές που ελέγχονται από τους παίκτες κλπ.

ΠΑΙΚΤΕΣ

Οι παίκτες αποτελούν μονάδες λήψης απόφασης. Μπορεί να είναι άτομα, ομάδες ατόμων, κράτη, οργανισμοί, επιχειρήσεις κλπ. Κάθε παίκτης παρόλο που είναι μια αυτόνομη μονάδα λήψης απόφασης δεν ελέγχει πλήρως τους παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα του παιχνίσιου. Δηλαδή το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται μόνο από την δική του απόφαση αλλά και από την απόφαση των αντιπάλων. Κάθε παίκτης έχει σαφή στόχο τον οποίο προσπαθεί να βελτιστοποιήσει δρώντας σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνίσιου. Ο αριθμός των παικτών είναι πεπερασμένος και μεγαλύτερος ή ίσος του 2. Εδώ θα ασχοληθούμε με τα παίγνια δύο παικτών.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Στρατηγική είναι το σύνολο των κανόνων που ορίζουν όλες τις εφικτές επιλογές. Για κάθε στρατηγική κάθε παίκτης γνωρίζει τις επιλογές του αντιπάλου του και επομένως τις κινήσεις του αντιπάλου ανάλογα με τις δικές του επιλογές. Η θεωρία παιγνίων αναζητά τις στρατηγικές που βελτιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση κάθε παίκτη. Έναν παίκτη μπορεί να το συμφέρει να ακολουθήσει αμιγή στρατηγική ή μικτή στρατηγική. Κατά την αμιγή στρατηγική ακολουθείται μόνο μια από τις δυνατές επιλογές, ενώ κατά την μικτή ακολουθείται ένα μίγμα επιλογών.

ΠΑΙΓΝΙΟ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΑΙΓΝΙΟ ΜΙΚΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

- Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος είναι εκείνο κατά το οποίο το κέρδος του ενός παίκτη ισούται με την ζημιά του άλλου ή των άλλων παικτών.
- Αν κάποιο άλλο μέρος λαμβάνει ανταμοιβές τότε έχουμε παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΛΗΡΩΜΩΝ

Θα δούμε τώρα ένα παράδειγμα ενός παιχνιδιού δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος. Στον παρακάτω πίνακα, που ονομάζεται πίνακας πληρωμών για τον παίκτη Α, κάθε ένας από τους δύο παίκτες (Α και Β) έχουν δύο στρατηγικές. Κάθε στοιχείο του πίνακα δίνει το κέρδος του παίκτη Α (ή την ζημιά του Β) για κάθε ένα συνδυασμό στρατηγικών των δύο παικτών.

		Παίκτης Β	
		B1	B2
Παίκτης Α	A1	2	-1
	A2	4	5

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ MINIMAX ΚΑΙ MAXIMIN (1/2)

Παρατηρούμε ότι το καλύτερο στοιχείο του πίνακα για τον παίκτη A είναι το 5. Όμως αν ο A επιλέξει την στρατηγική A2 προκειμένου να επιδιώξει κέρδος 5, ο B θα επιλέξει την B1 ώστε να ελαχιστοποιήσει την ζημιά του. Αν δούμε τον πίνακα από την σκοπιά του B το καλύτερο στοιχείο είναι το -1 (κέρδος 1 για τον B, ζημιά 1 για τον A). Όμως αν ο B επιλέξει την στρατηγική B2 ώστε να επιδιώξει κέρδος -1 τότε ο A θα επιλέξει την A2 για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Η περιγραφή αυτή οδηγεί τον A να επιλέγει το μέγιστο των ελαχίστων (maximin) των σειρών (αφού για οποιαδήποτε στρατηγική επιλέξει ο A, τότε ο B θα επιλέξει αυτή που ελαχιστοποιεί την ζημιά του) και τον B να επιλέξει αντίστοιχα το ελάχιστο των μεγίστων (minimax) των σειρών.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ MINIMAX ΚΑΙ MAXIMIN (2/2)

		Παίκτης Β		Ελάχιστο Σειράς
		B1	B2	
Παίκτης Α	A1	2	-1	-1
	A2	4	5	4*
Μέγιστο Στήλης		4*	5	V=4

ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Αν το $\min\max$ είναι ίσο με το $\max\min$ τότε υπάρχει σημείο ισορροπίας και προκύπτει αυτόματα και η τιμή του παιγνίου. Στο παράδειγμά μας το παίγνιο καταλήγει στη λήψης της απόφασης για τον παίκτη A να χρησιμοποιήσει την στρατηγική A2 και για τον παίκτη B να ακολουθήσει την B1. Οι παίκτες ακολουθούν αμιγή στρατηγική. Η τιμή του παιγνίου θα είναι $V=4$. Όπως θα δούμε παρακάτω δεν υπάρχει πάντα σημείο ισορροπίας και οι παίκτες αναγκάζονται να ακολουθούν μίγμα στρατηγικών.

ΚΥΡΙΑΡΧΕΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΕΣΤΕΡΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Συχνά είναι εφικτή η μείωση της διάστασης του πίνακα πληρωμών με απαλοιφή στρατηγικών που κάποιος παίκτης δεν πρόκειται ποτέ να χρησιμοποιήσει. Μια στρατηγική είναι κυρίαρχη σε σχέση με κάποια άλλη αν κάθε της στοιχείο της είναι καλύτερο ή ίδιο από το αντίστοιχο της άλλης. Αντίστοιχα μια στρατηγική είναι υποδεέστερη σε σχέση με κάποια άλλη αν κάθε στοιχείο της είναι χειρότερο ή ίδιο από το αντίστοιχο κάποιας άλλης. Π.χ. Στο προηγούμενο παράδειγμα η στρατηγική A1 είναι υποδεέστερη της A2 αφού το 2 είναι χειρότερο του 4 και το -1 χειρότερο του 5. Για τον B δεν υπάρχει κάποια υποδεέστερη στρατηγική αφού το -1 είναι (για τον B) καλύτερο του 2 αλλά το 5 χειρότερο του 4.

ΜΙΚΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ (1/4)

Ας εξετάσουμε τώρα ένα παράδειγμα που δεν υπάρχει αμιγής στρατηγική. Το maximin είναι 1 ενώ το minimax είναι 2. Το παίγνιο δεν έχει σημείο ισορροπίας και οι παίκτες θα ακολουθήσουν μικτή στρατηγική.

		Παίκτης Β		Ελάχιστο Σειράς
		B1	B2	
Παίκτης Α	A1	2	-1	-1
	A2	1	4	1*
Μέγιστο Στήλης		2*	4	1≠2

ΜΙΚΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ (2/4)

Σε τέτοιου είδους παίγνια κάθε παίκτης θα πρέπει να προσδιορίσει την πιθανότητα με την οποία επιλέγει κάθε στρατηγική του έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το ελάχιστο προσδοκώμενο κέρδος (ή να ελαχιστοποιήσει την μέγιστη προσδοκώμενη ζημιά) ανεξάρτητα από τις επιλογές του αντιπάλου (ή των αντιπάλων).

Αν ο παίκτης A επιλέγει την στρατηγική A1 με πιθανότητα x τότε θα επιλέγει την στρατηγική A2 με πιθανότητα $1-x$. Αντίστοιχα αν ο παίκτης B επιλέγει την στρατηγική B1 με πιθανότητα y τότε θα επιλέγει την B2 με πιθανότητα $1-y$.

ΜΙΚΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ (3/4)

Αν ο Α ακολουθεί την Α1 με πιθανότητα x και την Α2 με πιθανότητα $1-x$ και ο Β ακολουθεί την Β1 τότε το προσδοκόμενο κέρδος θα είναι $V(A,B1)=2x+1(1-x)=x+1$

Αν ο Β ακολουθεί την Β2 τότε το προσδοκόμενο κέρδος του Α θα είναι:
 $V(A,B2)=-1x+4(1-x)=-5x+4$

Για να προσδιοριστεί η βέλτιστη μικτή στρατηγική θα πρέπει το προσδοκόμενο κέρδος να είναι ίδιο ανεξάρτητα από την στρατηγική που ακολουθεί ο Β. Επομένως θα πρέπει:

$V(A,B1)=V(A,B2)$ ή $x+1=-5x+4$ ή $6x=3$ ή $x=0.5$ και επομένως $1-x=0.5$.

		B1	B2
		y	$1-y$
A1	x	2	-1
A2	$1-x$	1	4

ΜΙΚΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ (4/4)

Αυτό σημαίνει ότι ο A θα ακολουθεί την στρατηγική A1 με πιθανότητα 0.5 και την A2 με πιθανότητα 0.5, δηλαδή μακροπρόθεσμα αν επαναλάβει πολλές φορές το παιχνίδι θα πρέπει το 50% των επαναλήψεων να ακολουθήσει την A1 και το 50% την A2.

Με την ίδια λογική θα βρούμε την βέλτιστη στρατηγική για τον B. Για να ελαχιστοποιήσει ο B την ζημιά του θα πρέπει:

$$V(B,A1)=V(B,A2) \text{ ή } 2y-1(1-y)=1y+4(1-y) \text{ ή } 3y-1=-3y+4 \text{ ή } 6y=5 \text{ ή } y=5/6 \text{ και } 1-y=1/6$$

Αυτό σημαίνει ότι ο B θα ακολουθεί την B1 με πιθανότητα 5/6 και την B2 με πιθανότητα 1/6.

Το προσδοκώμενο κέρδος για τον A θα είναι:

$$V(A,B1)=V(A,B2)=x+0.5=1.5$$

Η προσδοκώμενη ζημιά για τον B θα είναι:

$$V(B,A1)=V(B,A2)=2y-1(1-y)=2*(5/6)-1/6=9/6=1.5$$

Δηλαδή το προσδοκώμενο κέρδος για τον A είναι ίσο με την προσδοκώμενη ζημιά για τον B.

ΠΑΙΓΝΙΑ 2Xn ΚΑΙ nX2

Συχνά στην πράξη εμφανίζονται περιπτώσεις όπου ο ένας από τους δύο παίκτες έχει μόνο δύο επιλογές ενώ ο άλλος έχει n επιλογές ($n > 2$). Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε να καταλήξουμε μέσω γραφικής μεθόδου σε παίγνιο 2X2 και να το επιλύσουμε όπως δείξαμε στα προηγούμενα παραδείγματα. Στον επόμενο πίνακα πληρωμών εμφανίζεται μια τέτοια περίπτωση για ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος

		Παίκτης Β			
		B1	B2	B3	B4
Παίκτης Α	A1	6	-2	3	2
	A2	-1	6	4	1

ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (1/5)

Παρατηρώντας τον προηγούμενο πίνακα διαπιστώνουμε ότι η στρατηγική B3 είναι υποδεέστερη της B4 γιατί για τον παίκτη B τα στοιχεία του πίνακα αντιπροσωπεύουν ζημιά και επομένως το 3 είναι χειρότερο από το 2 και το 4 χειρότερο από το 1. Ακόμα όμως και να διαγραφεί η B3 παραμένουν τρεις στρατηγικές για τον B και επομένως δεν μπορούμε να το λύσουμε.

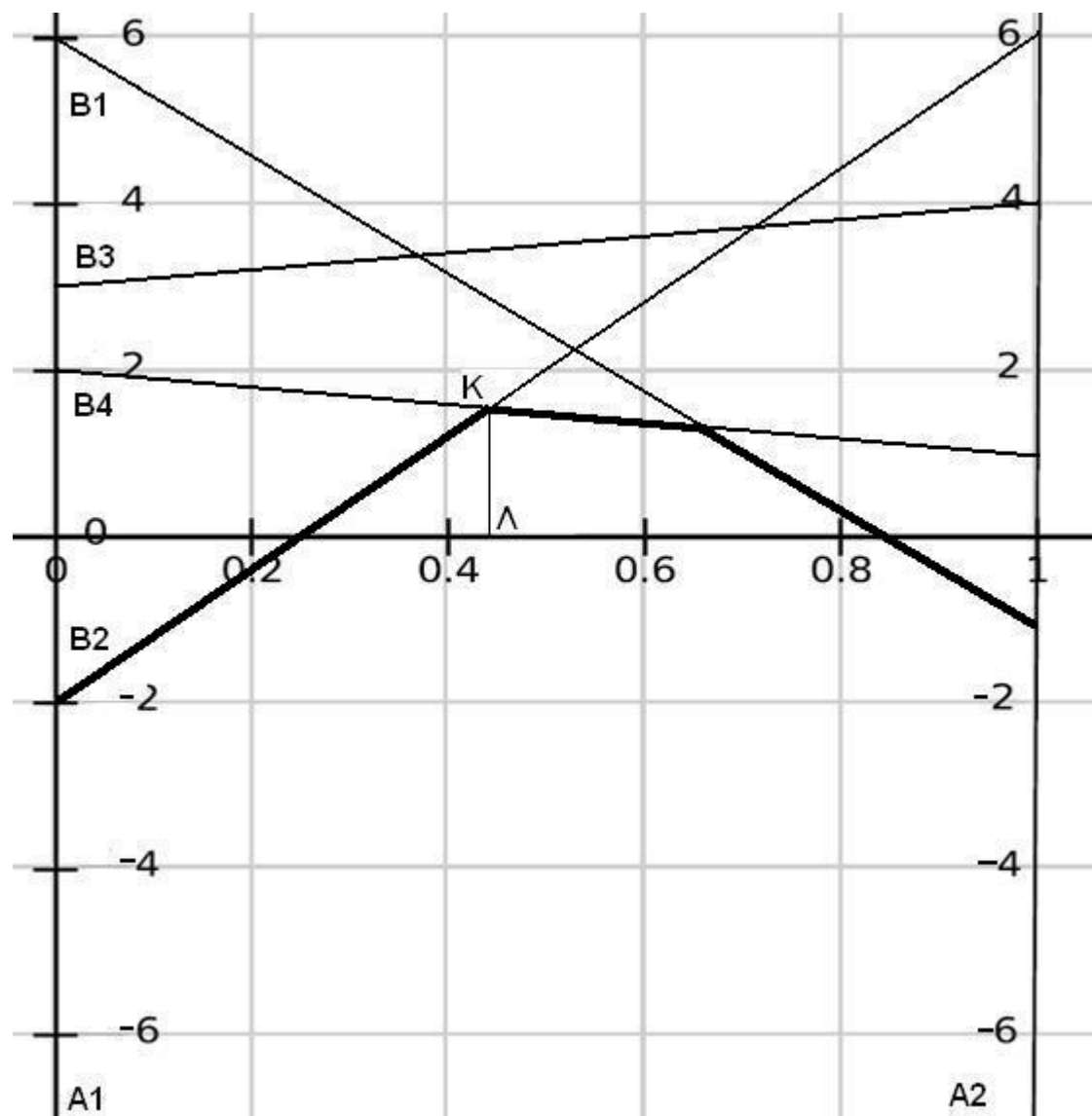
ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

ΕΠΙΛΥΣΗΣ (1/5)

Για να επιλύσουμε το παίγνιο του τελευταίου παραδείγματος θα φέρουμε δύο κάθετους άξονες που απέχουν μια μονάδα (πιθανότητα 1) και έχουν την ίδια κλίμακα μέτρησης. Κάθε ένας από αυτούς αντιπροσωπεύει μια από τις δυο στρατηγικές του A. Η στρατηγική B1 του παίκτη B παριστάνεται από το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το 6 του άξονα A1 με το -1 του άξονα A2. Όταν δηλαδή ο A ακολουθεί αμιγώς την A1 και ο B την B1 ο A έχει κέρδος 6. Αντίστοιχα όταν ο A ακολουθεί αμιγώς την A2 και ο B την B1 ο A έχει ζημιά 1. Όταν όμως ο A ακολουθεί μικτή στρατηγική και ο B την B1 τότε το κέρδος προσδιορίζεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που αντιπροσωπεύει την B1 και σε θέση που προσδιορίζεται από την αναλογία υιοθέτησης μεταξύ A1 και A2 του A.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (1/5)

Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε και τις υπόλοιπες στρατηγικές του B οπότε προκύπτει το επόμενο σχήμα. Παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα της υποδεέστερης στρατηγικής B3 βρίσκεται επάνω από το B4. Ο παίκτης A ακολουθεί μικτή maximin στρατηγική ενώ ο παίκτης B μικτή minimax στρατηγική. Δηλαδή ο A επιλέγει το μέγιστο από τα ελάχιστα προσδοκώμενα κέρδη και B το ελάχιστο από τις μέγιστες προσδοκώμενες ζημιές.



ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (1/5)

Ο παίκτης B θα ακολουθεί τις στρατηγικές B2 και B4 προκειμένου να εμποδίσει τον A να επιδιώξει υψηλότερο κέρδος από αυτό που αντιπροσωπεύει το ευθύγραμμο τμήμα ΛΚ. Το σημείο Κ είναι το υψηλότερο σημείο του χαμηλότερου τεθλασμένου ευθύγραμμου τμήματος που σχηματίζεται από τις στρατηγικές του B. Η απόστασή του από τους άξονες A1 και A2 παριστάνει την αναλογία υιοθέτησης των δύο στρατηγικών A1 και A2 από τον A. Με τον τρόπο αυτό καταλήξαμε σε ένα παίγνιο 2X2 που θα λύσουμε παρακάτω.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (1/5)

Όπως πριν αν υποθέσουμε ότι ο Α ακολουθεί τις στρατηγικές A1 και A2 με πιθανότητα x και $1-x$ και ο Β τις στρατηγικές B2 και B4 με πιθανότητες y και $1-y$ τότε:

		B2	B4
		y	$1-y$
A1	x	-2	3
A2	$1-x$	6	1

ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (1/5)

Οπότε θα έχουμε:

$$V(A,B2)=V(A,B4) \text{ ή } -2x+6(1-x)=3x+1(1-x) \\ \text{ή } -8x+6=2x+1 \text{ ή } 10x=5 \text{ ή } x=0.5 \text{ και } 1-x=0.5$$

Ακόμα:

$$V(B,A1)=V(B,A2) \text{ ή } -2y+3(1-y)=6y+1(1-y) \\ \text{ή } -5y+3=5y+1 \text{ ή } 10y=2 \text{ ή } y=0.2 \text{ ή } 1-y=0.8$$

Το προσδοκώμενο κέρδος για τον Α θα είναι:

$$V(A,B2)=V(A,B4)=-2*0.5+6*0.5=2$$

Η προσδοκώμενη ζημιά για τον Β θα είναι:

$$V(B,A1)=V(B,A2)=-2*0.2+3*0.8=2$$