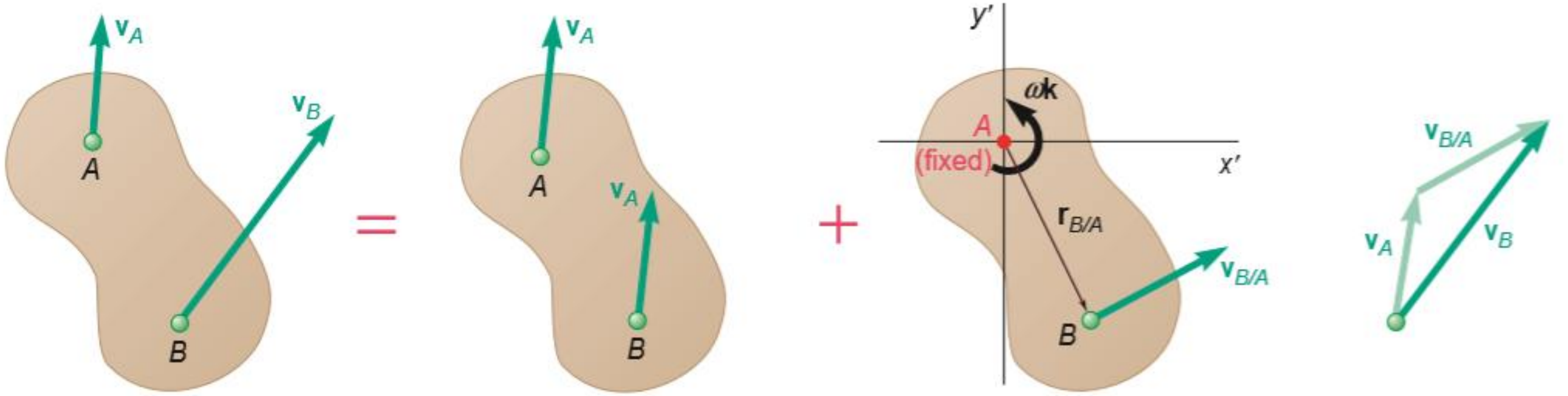
Κινηματική Στερεού Σώματος

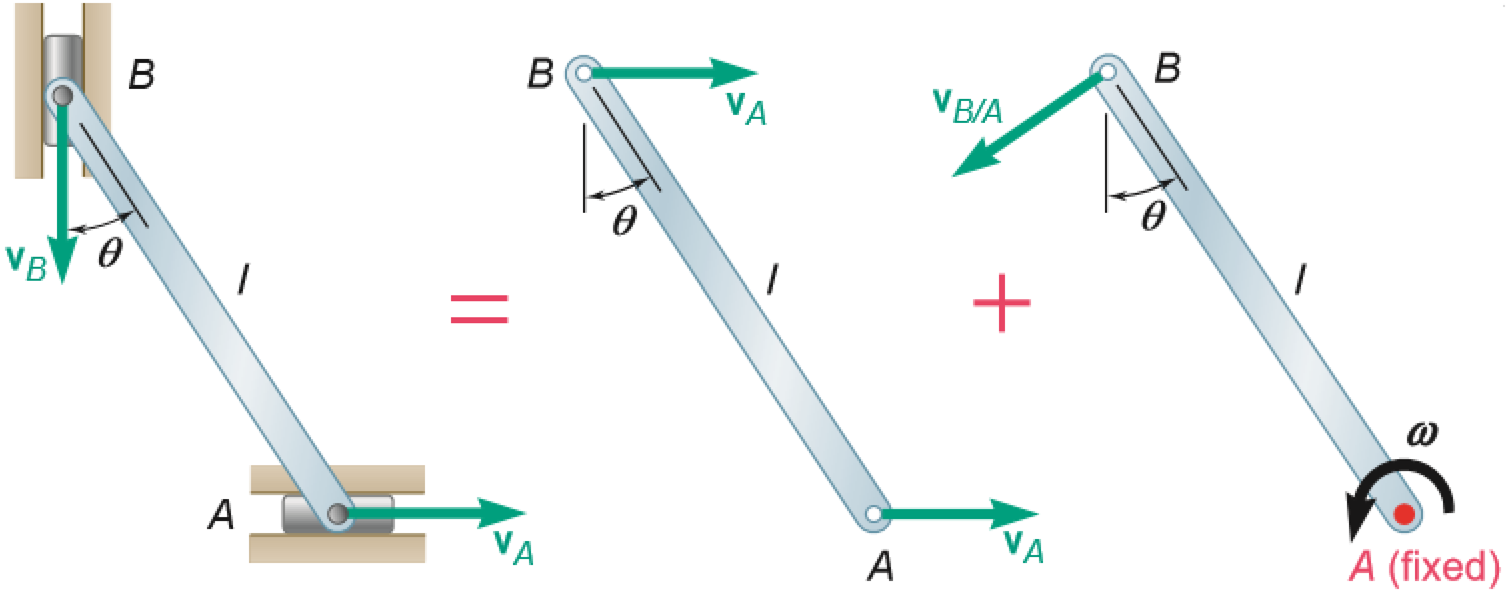
Κίνηση στο επίπεδο

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$



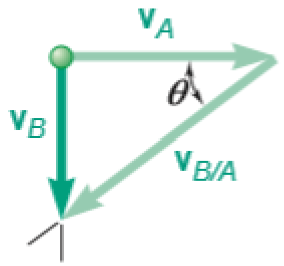
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Παραδείγματα

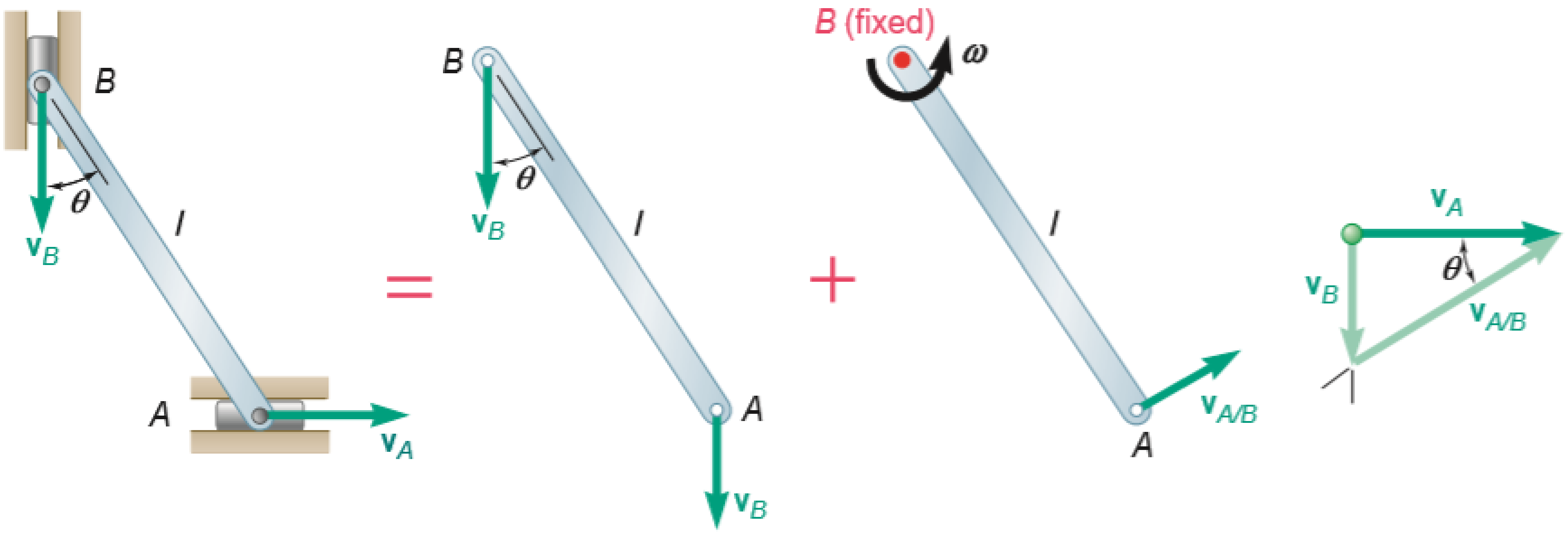


$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathrm{v}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

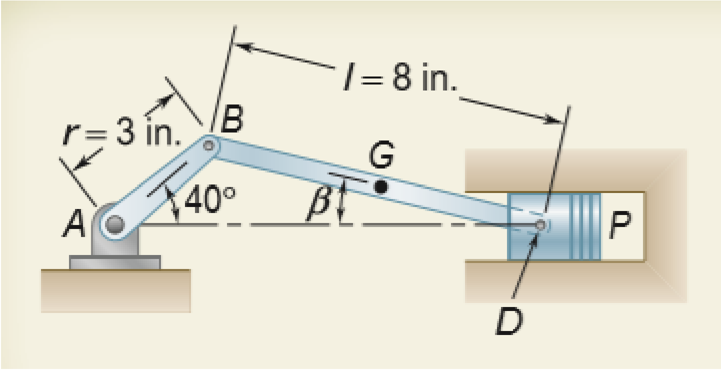


$$v_B = v_A \tan \mathrm{u} \qquad \mathrm{v} = \frac{v_{B/A}}{l} = \frac{v_A}{l \cos \mathrm{u}}$$



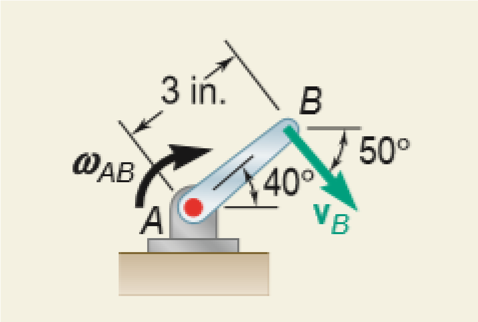
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

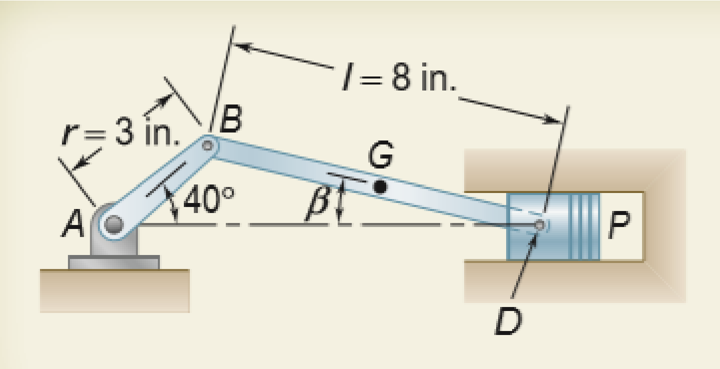
Άσκηση 1



Ωρολογιακή περιστροφή της AB με ω=2000 rpm
Να βρεθούν:
(α) η γωνιακή ταχύτητα της BD
(β) η ταχύτητα του πιστονιού P

Βήμα 1ο μετατροπή μεγεθών και υπολογισμός γωνιών



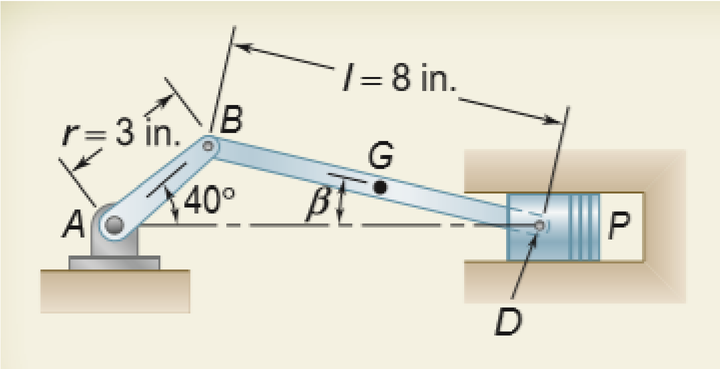


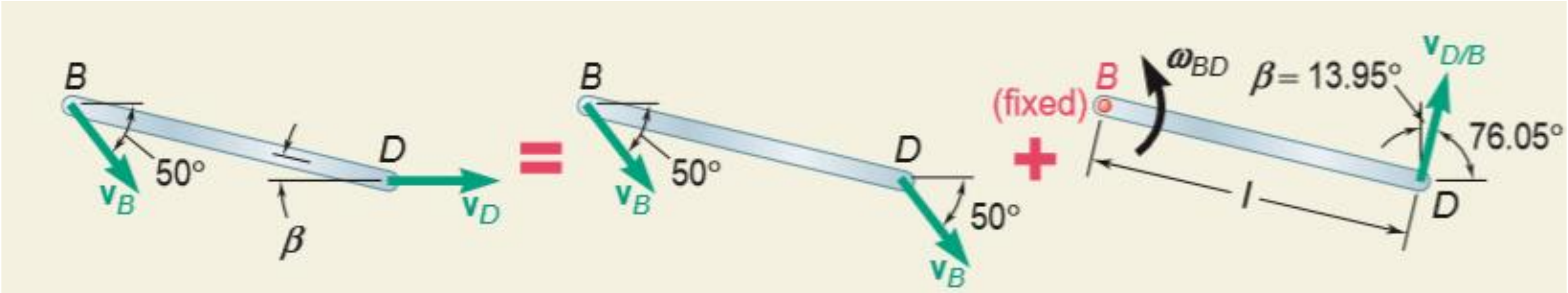
Ω=2πn/60=2*2000*π/60=209,4 r/s
V_B=ω*AB=3*209,4=628,3 in/s
V_{Bx}=628.3*cos50
V_{By}=628.3*sin50

Νόμος ημιτόνων:

$$\frac{\sin 40^\circ}{8 \text{ in.}} = \frac{\sin \text{b}}{3 \text{ in.}} \qquad \text{b} = 13.95^\circ$$

Γωνιακή ταχύτητα BD και ταχύτητα D





Άρα το D έχει:

Μεταφορά:

$V_{Bx} = V_{Dx}$

$V_{By} = V_{Dy}$

Περιστροφή:

$V_{D/B} = \omega_{BD} * L_{BD}$

$V_{D/Bx} = \omega_{BD} * L_{BD} * \sin 13.95$

$V_{D/By} = \omega_{BD} * L_{BD} * \cos 13.95$

Άρα:

$V_D = V_B + V_{D/B}$ ή

$V_{Dx} = V_{Bx} + V_{D/Bx}$

$V_{Dy} = V_{By} + V_{D/By}$

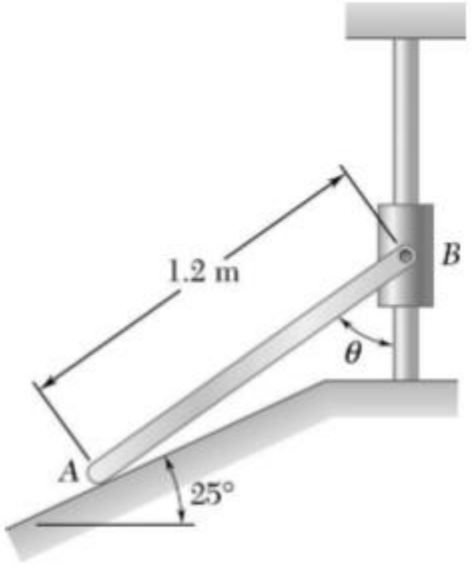
Όμως

$V_{Dy} = 0 \Rightarrow \omega_{BD} = \ldots..$

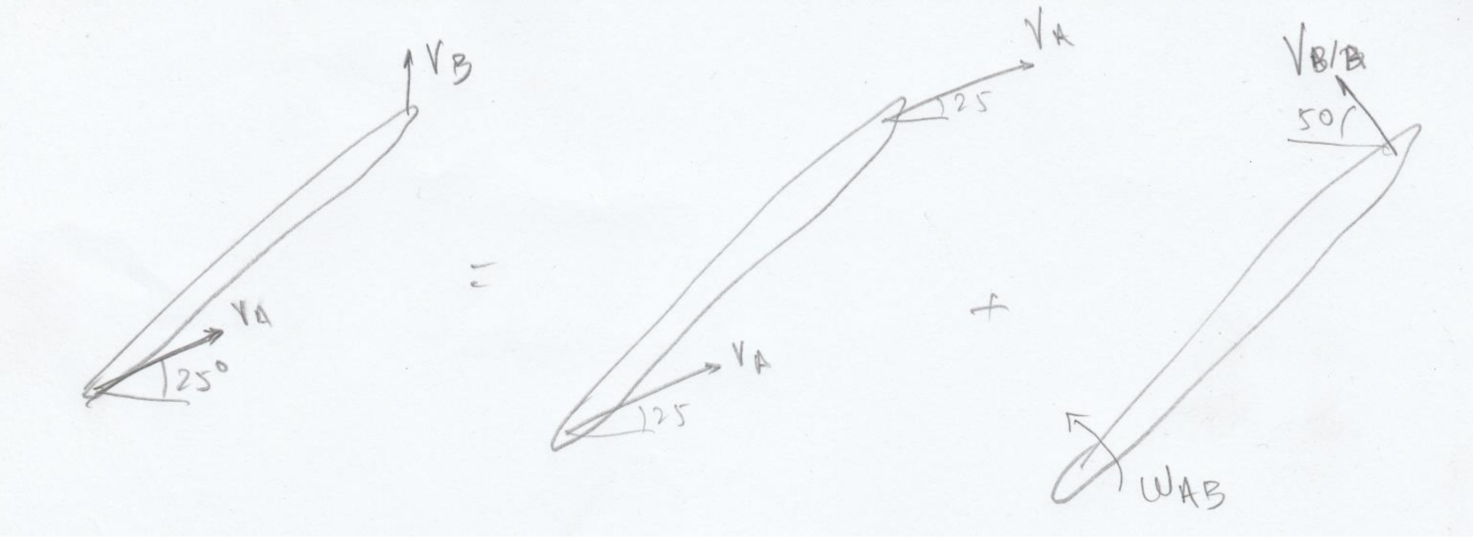
Και συνεπώς

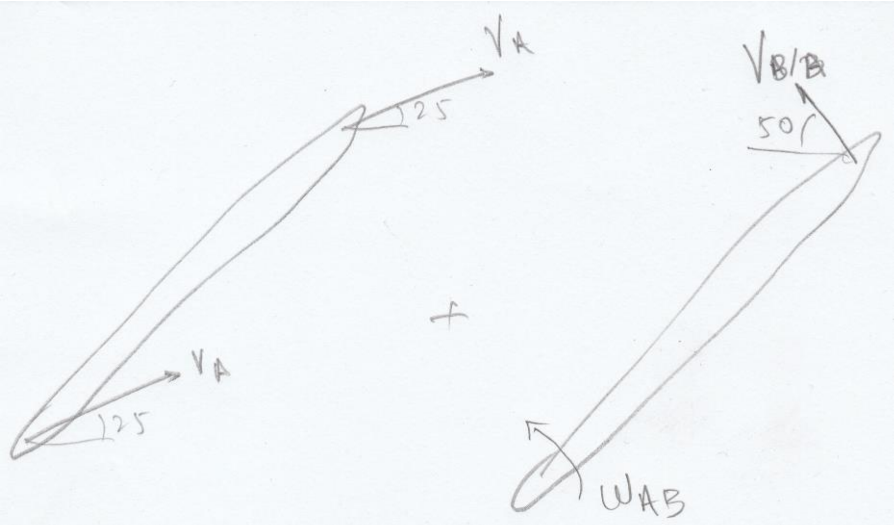
$V_{Dx} = \ldots\ldots$

Άσκηση $2^η$



Το κολάρο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω 1.5m/s. Αν $θ=50^o$ να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της ΑΒ και η ταχύτητα του Α





$$V_{A_x} = V_A \cos 25^\circ$$

$$V_{A_y} = V_A \sin 25^\circ$$

$$V_{B/A} = \omega_{AB} \cdot L_{AB}$$

$$V_{B/A_x} = -\omega_{AB} L_{AB} \cos 50$$

$$V_{B/A_y} = \omega_{AB} L_{AB} \sin 50$$

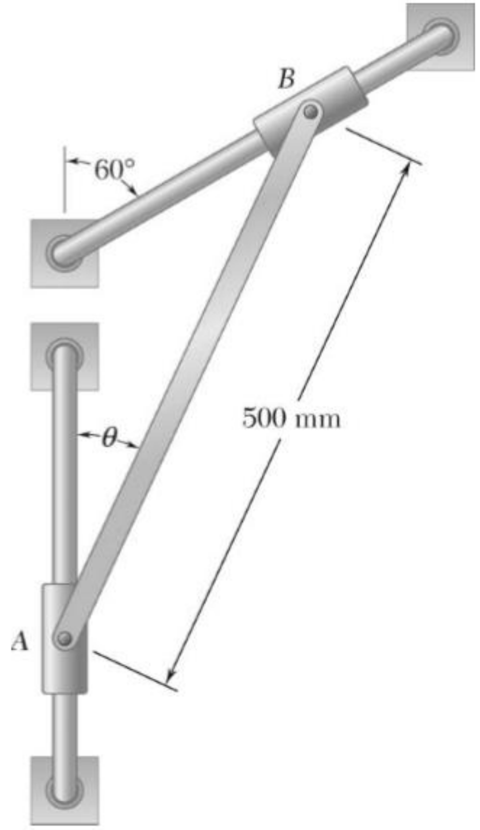
$$V_{Bx} = V_A + V_{B/A} \longrightarrow$$

$$V_{Bx} = V_{Ax} + V_{B/Ax} = 0$$

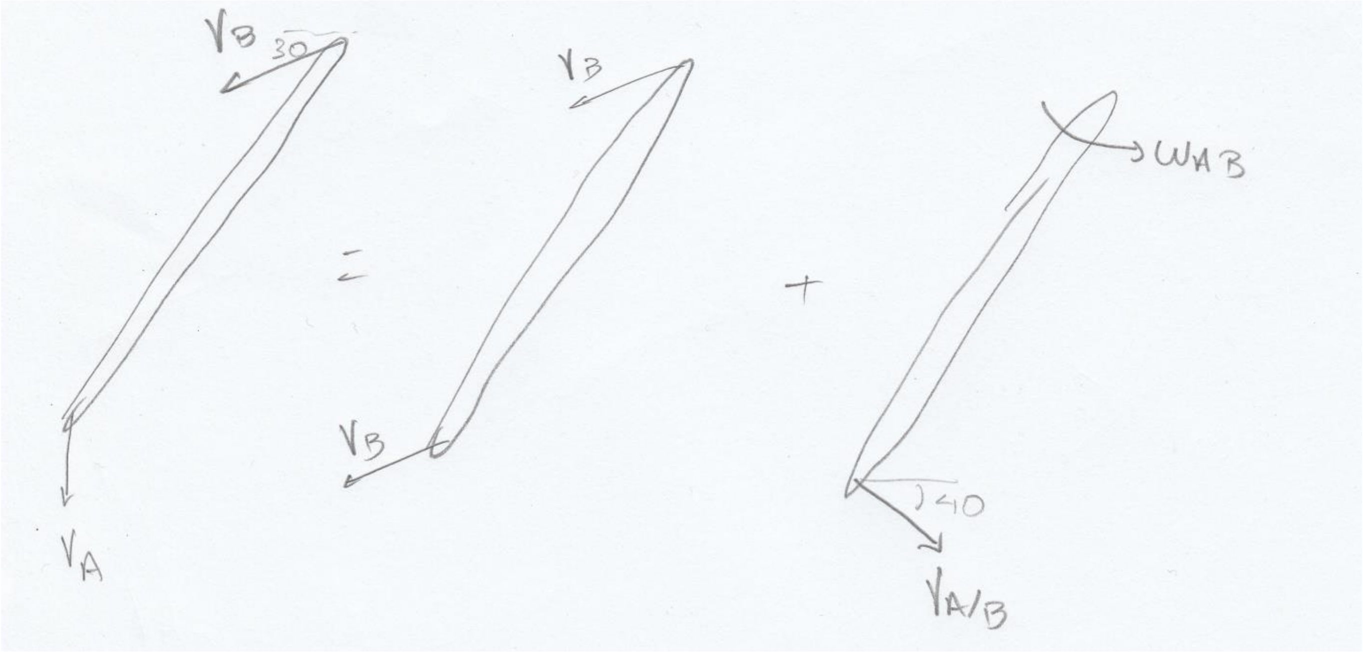
$$V_{By} = V_{Ay} + V_{B/Ay} = 1,5 \ m/s$$

$$A_{pa} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{AB} = \ldots \\ V_A = \ldots \end{cases}$$

Άσκηση 3η



Το κολάρο B κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα αριστερά 1.6m/s. Αν θ=40ο να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της AB και η ταχύτητα του A



$$V_{Bx} = -V_B \cos 30$$

$$V_{By} = -V_B \sin 30$$

$$V_{A/B} = \omega_{AB} L_{AB}$$

$$V_{A/Bx} = \omega_{AB} L_{AB} \cos 40$$

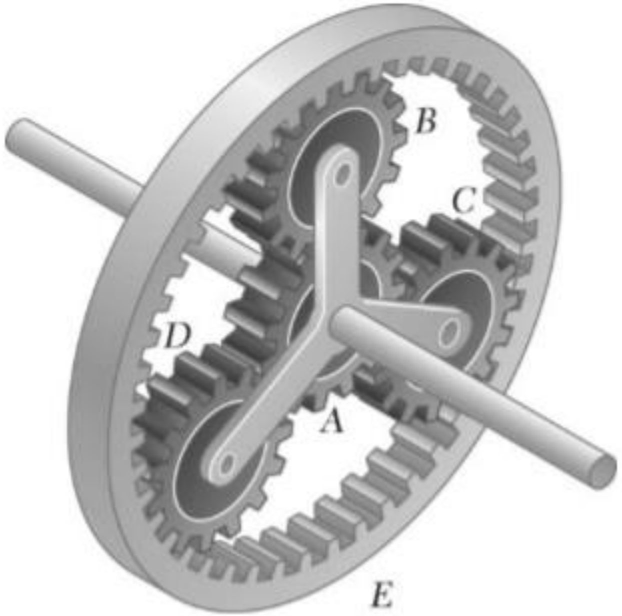
$$V_{A/By} = -\omega_{AB} L_{AB} \sin 40$$

$$V_A = V_B + V_{A/B}$$

$$V_{Ax} = V_{Bx} + V_{A/Bx} = 0 \rightsquigarrow \omega_{AB}$$

$$V_{Ay} = V_{By} + V_{A/By} = \dots$$

Πλανητικό σύστημα



Η ακτίνα όλων των γραναζιών είναι και του εξωτερικού 3α. Η γωνιακή ταχύτητα του A είναι γνωστή και ωρολογιακή σε φορά και το εξωτερικό γρανάζι είναι ακίνητο.

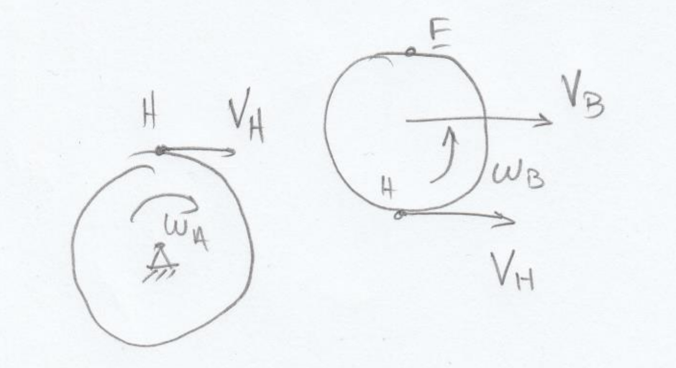
Ποια η γωνιακή ταχύτητα του κάθε γραναζιού

Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου σύνδεσης

$V_E = 0$ σταθερο

κινηση B, C, D ιδια λογω συνδεσης

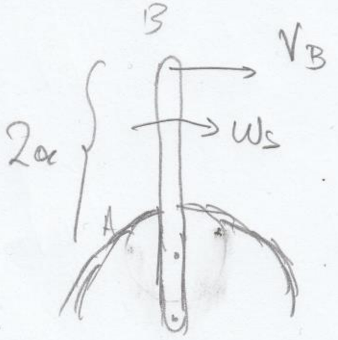
Εστω H σημειο επαφης των A, B



$$\left.\begin{aligned} V_H &= a \cdot \omega_A \\ V_{H/E} &= \omega_B \cdot 2a \end{aligned}\right\} \quad V_H = \cancel{V_E}^{\,0} + V_{H/E} \longrightarrow \omega_B = \frac{1}{2}\omega_A$$

$$\left.\begin{aligned} V_B &= V_E + V_{B/E} \\ V_{B/E} &= a \cdot \omega_B = \frac{1}{2} a \omega_A \end{aligned}\right\} \quad V_B = 0 + \frac{1}{2} a \omega_A$$

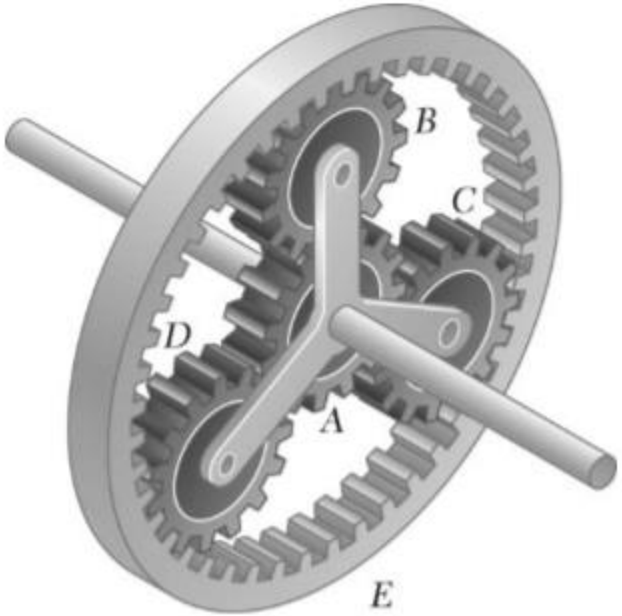
Συνδεσμ



$V_B = 2a \cdot \omega_s \rightarrow$

$\frac{1}{2} a\, \omega_A = 2a \cdot \omega_s \rightarrow \omega_s = \frac{1}{4}\, \omega_A$

Πλανητικό σύστημα 2



Η ακτίνα όλων των γραναζιών είναι και του εξωτερικού 3α. Η γωνιακή ταχύτητα του Ε είναι γνωστή (180 rpm) και ωρολογιακή σε φορά και το γρανάζι Α έχει επίσης γνωστή γωνιακή ταχύτητα επίσης ωρολογιακή (240 rpm).
Ποια η γωνιακή ταχύτητα του κάθε γραναζιού
Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου σύνδεσης

Μετατροπη μονάδων

$$\omega_E = \frac{2\pi 180}{2} \qquad \omega_A = \frac{2\pi 240}{2}$$

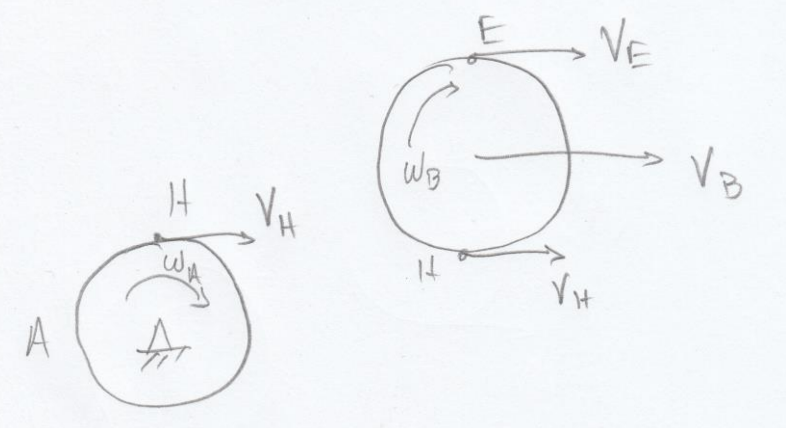
Κινηση B, C, D ιδια λογω συνδεσης

Εστω H σημειο επαφης των A, B

$$V_E = \omega_E \cdot R_E = \omega_E \cdot 3a$$

Στο A

$$V_H = a \cdot \omega_A$$



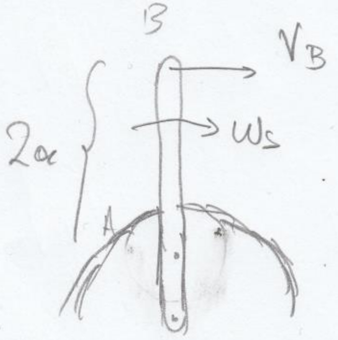
Στο B

$$\left.\begin{aligned} V_H &= V_E + V_{H/E} \\ V_{H/E} &= 2a\,\omega_B \end{aligned}\right\} \quad a\,\omega_A = 3a\,\omega_E + 2a\,\omega_B$$

$$\longrightarrow \omega_B = ---$$

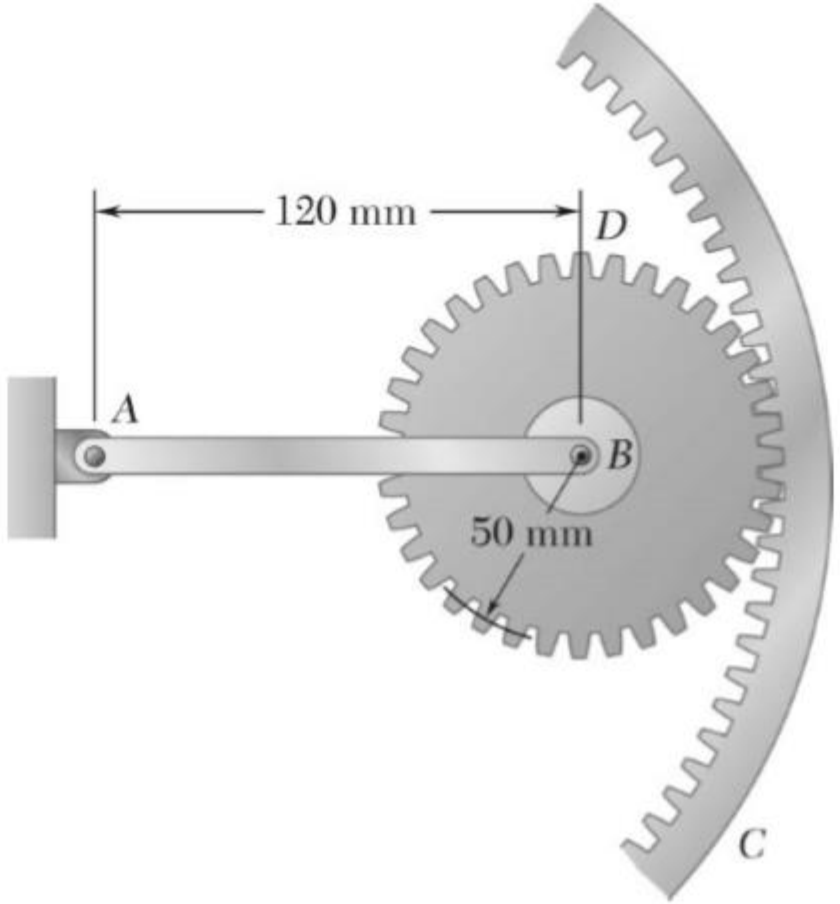
$$\left.\begin{aligned} V_B &= V_H + V_{B/H} \\ V_{B/H} &= a\,\omega_B \end{aligned}\right\} \quad V_B = \ldots\ldots$$

Συνδεση



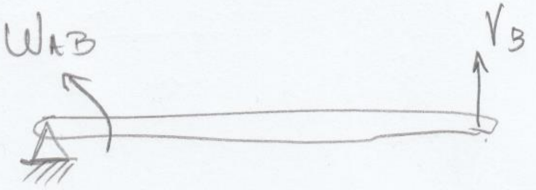
$$V_B = 2\alpha \cdot \omega_s$$

Γρανάζια και ράβδοι



Η ράβδος AB περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 20 r/s ωρολογιακά. Αν το εξωτερικό γρανάζι είναι σταθερό να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του γραναζιού B και η ταχύτητα του δοντιού στο D

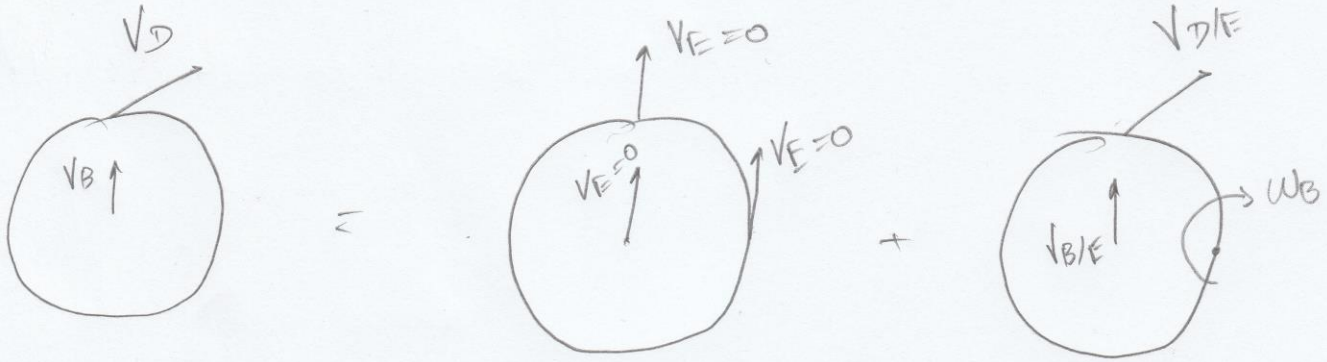
Par bJos AB



$$V_B = \omega_{AB} \cdot L_{AB}$$

Γρανάζι B

Έστω E σημείο επαφής με C



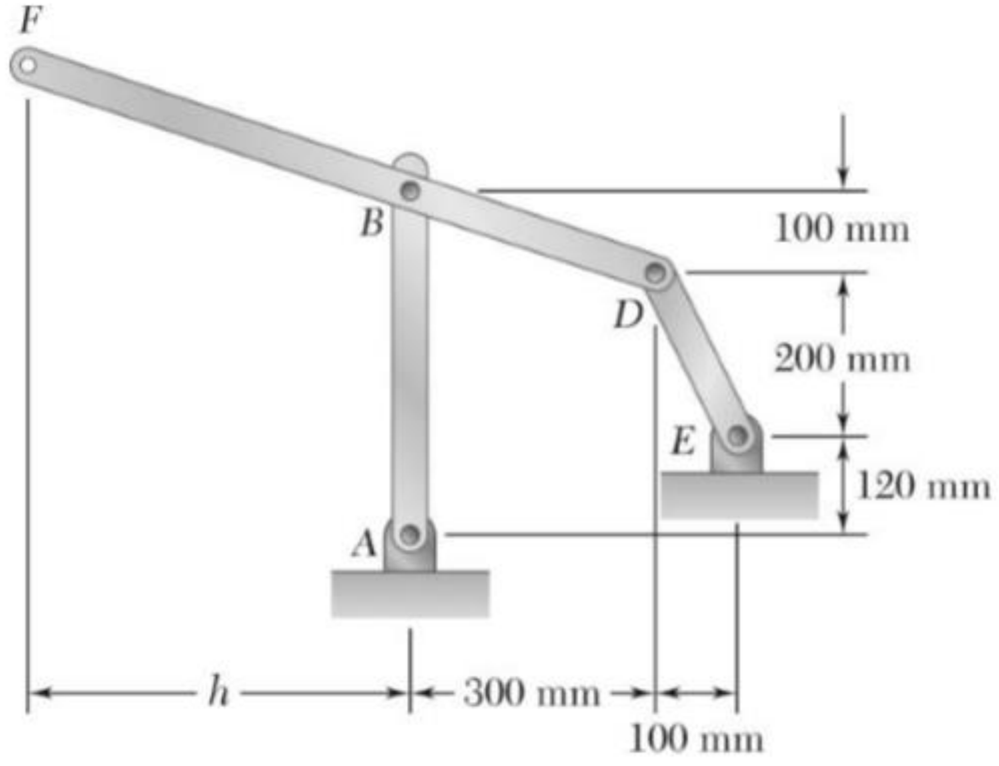
$BE = 0{,}05\,m$

$DE = 0{,}05\sqrt{2}\,m$

$$V_B = V_D + V_{B/E} = 0 + BE\,\omega_B \rightsquigarrow \omega_B = \ldots$$

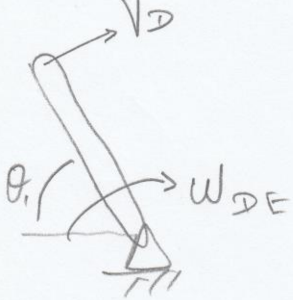
$$V_D = V_E + V_{D/E} = 0 + DE\,\omega_B \longrightarrow V_D = \ldots$$

Περισσότεροι σύνδεσμοι



Στην παρούσα θέση η ράβδος DE έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα 10r/s ωρολογιακά. Αν h=500
Ποια η γωνιακή ταχύτητα της FDB
Η ταχύτητα του F

Ράβδος DE



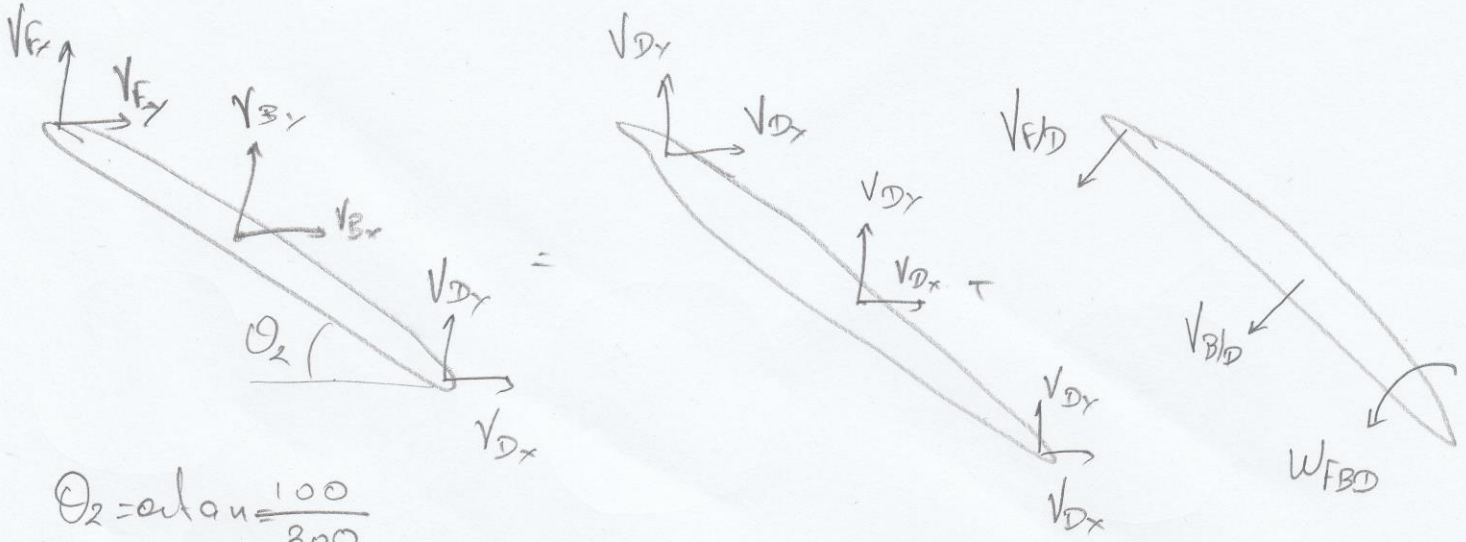
$$V_D = \omega_{DE} L_{DE}$$

$$\theta_1 = \text{atan}\,\frac{200}{100}$$

$$V_{Dx} = +\omega_{DE} L_{DE} \cos\theta_1$$

$$V_{Dy} = \omega_{DE} L_{DE} \sin\theta_1$$

Pados FBD



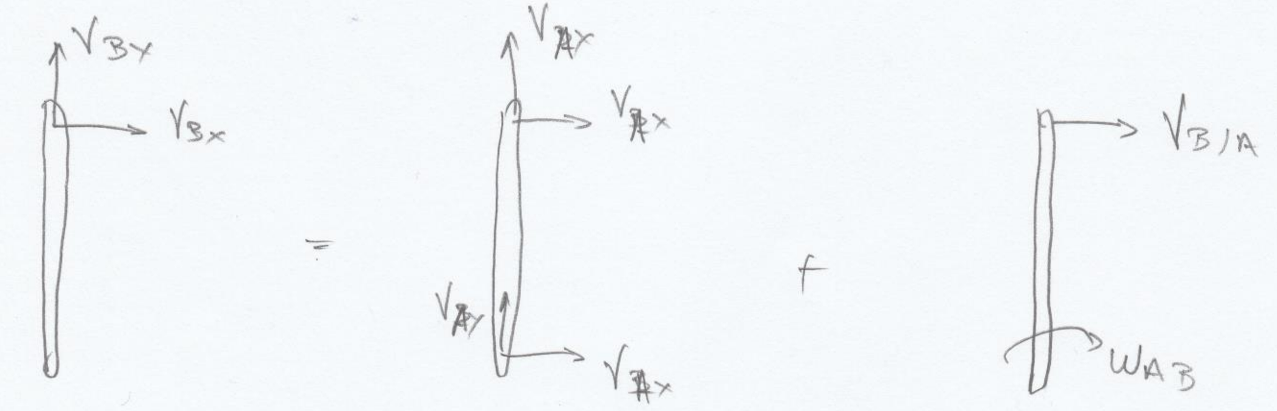
$$\theta_2 = \operatorname{atan} \frac{100}{300}$$

$$V_{B/D} = \omega_{FBD} \cdot L_{BD}$$

$$V_{B/Dx} = \omega_{FBD} L_{BD} \cos\theta_2$$
$$V_{B/Dy} = \omega_{FBD} L_{BD} \sin\theta_2$$

$$V_{Bx} = V_{Dx} + V_{B/Dx}$$
$$V_{By} = V_{Dy} + V_{B/Dy} \quad (1)$$

Parafuso AB



$V_{B/A} = \omega_{AB} L_{AB}$

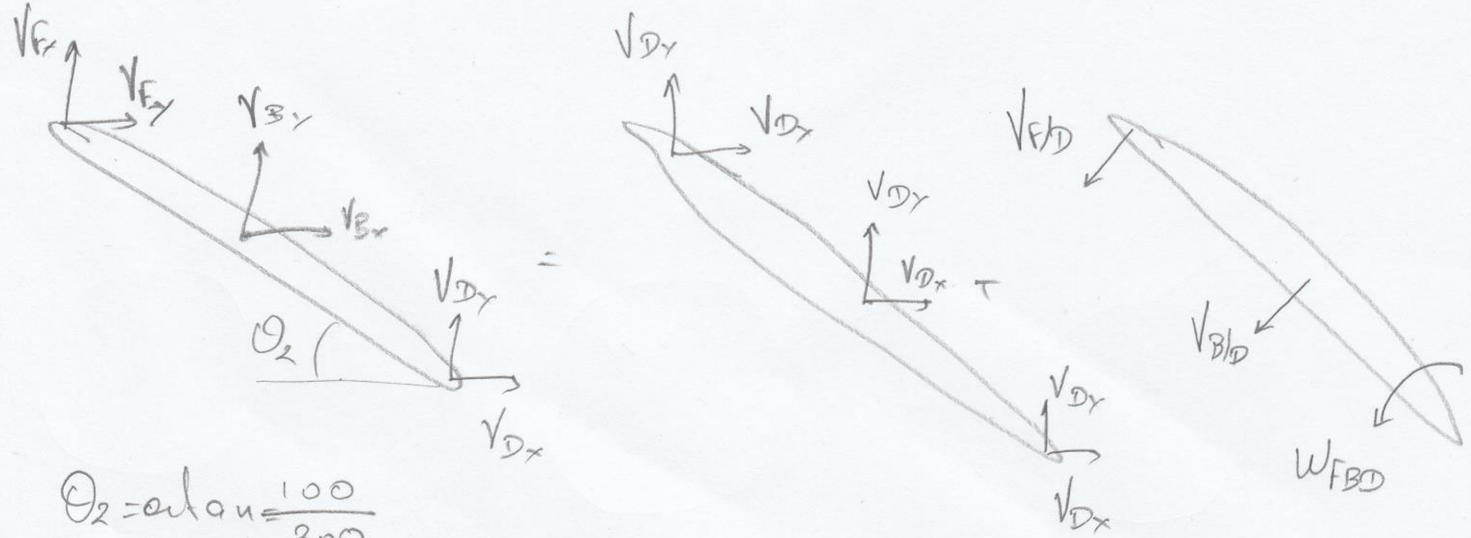
$V_B = V_A + V_{B/A}$

$V_{By} = 0 + V_B$

$V_{Bx} = 0 + V_{B/A}$ (2)

Απο σχεσεις (1), (2) $\longrightarrow$ ω_{BD}, ω_{AB}

Ράβδος FBD



$$\theta_2 = \operatorname{atan}\frac{100}{300}$$

Άρα πίσω στην FBD

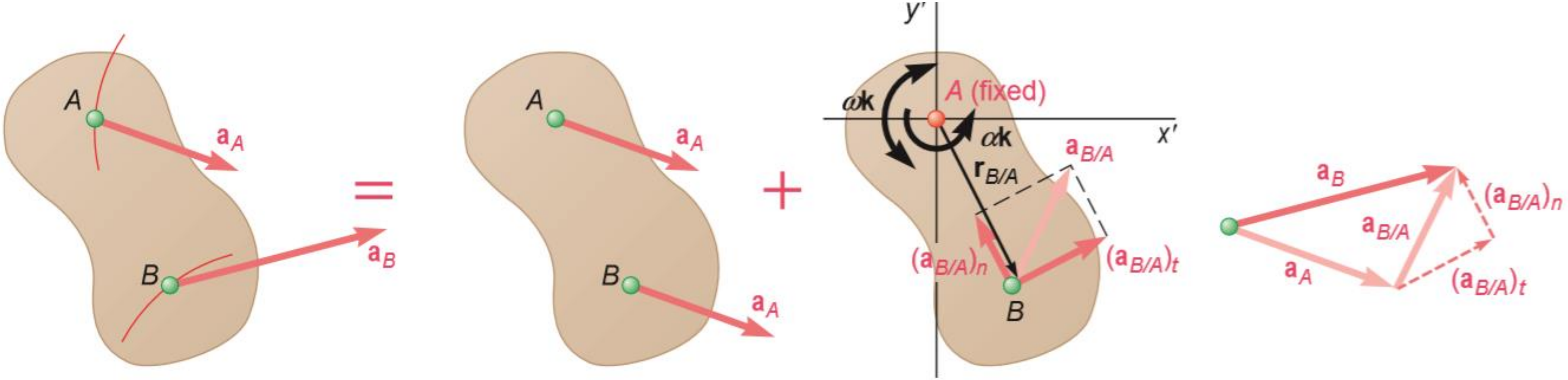
$$V_{Fx} = V_{Dx} + V_{F/Dx}$$

$$V_{Fy} = V_{Dy} + V_{F/Dy}$$

$$V_{F/Dy} = \omega_{FBD} \cdot L_{FD}$$

Επιταχύνσεις

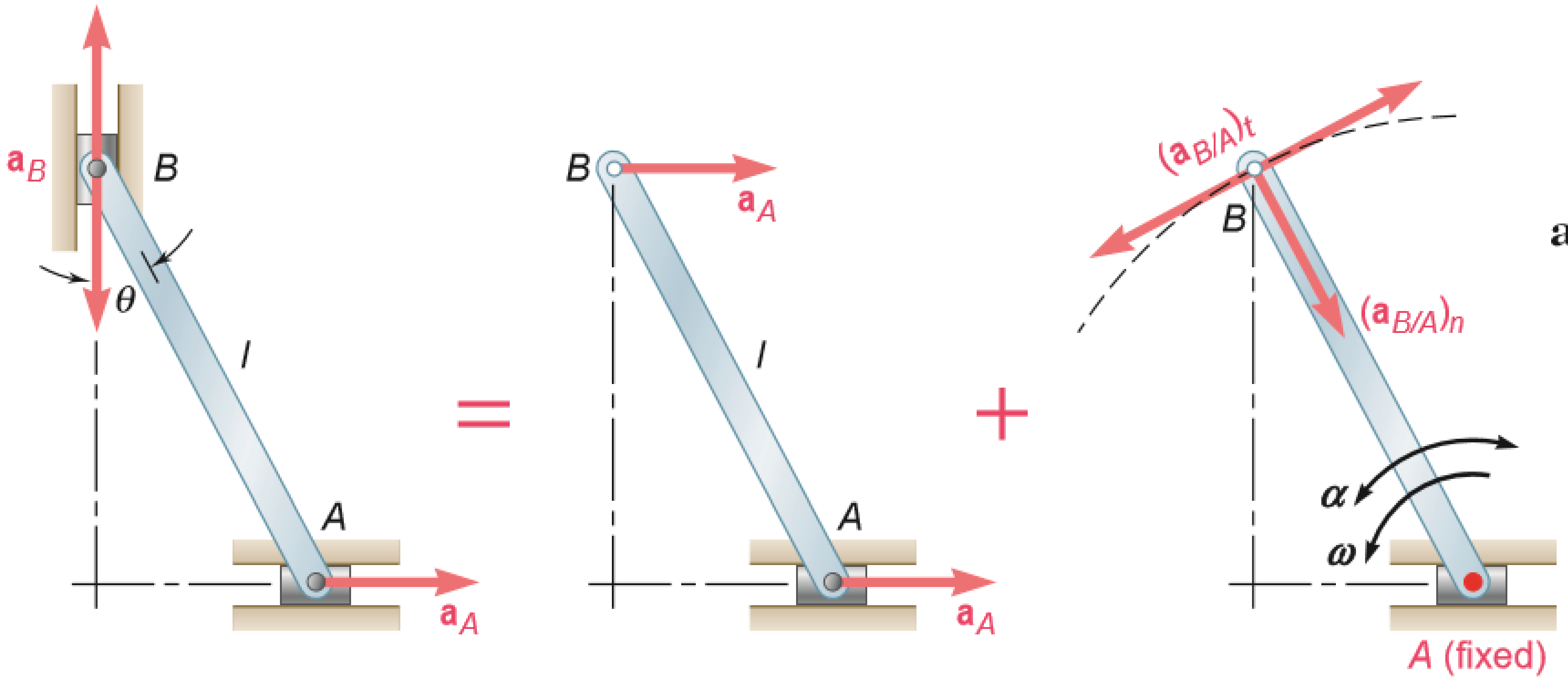
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$



$$(\mathbf{a}_{B/A})_t = \mathrm{a}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$(\mathbf{a}_{B/A})_n = -\mathrm{v}^2\mathbf{r}_{B/A}$$

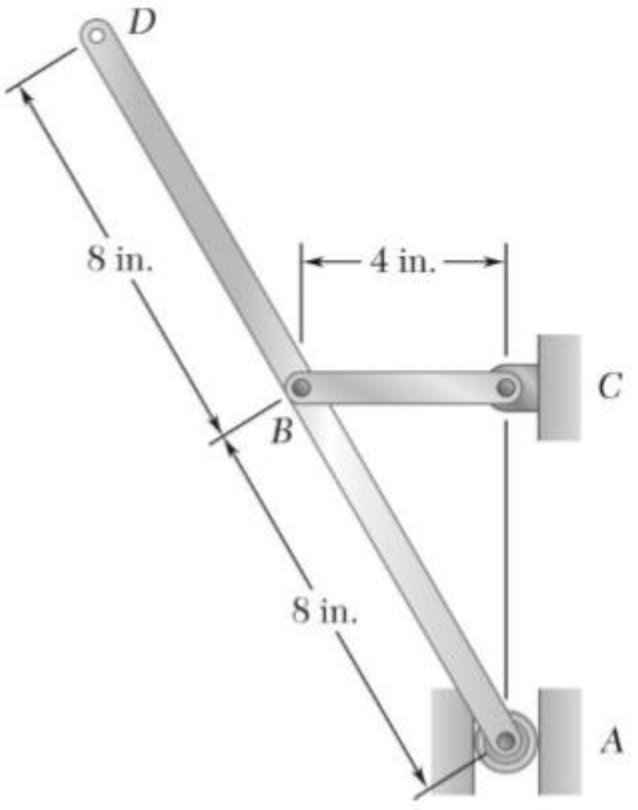
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathrm{a}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} - \mathrm{v}^2\mathbf{r}_{B/A}$$

Παράδειγμα



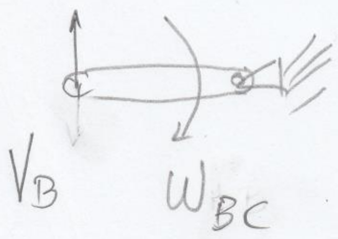
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$= \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_n + (\mathbf{a}_{B/A})_t$$

Άσκηση 1η



Αν η ράβδος BC έχει ταχύτητα (γωνιακή) 45rpm ωρολογιακά να βρεθεί η επιτάχυνση του σημείου A και D

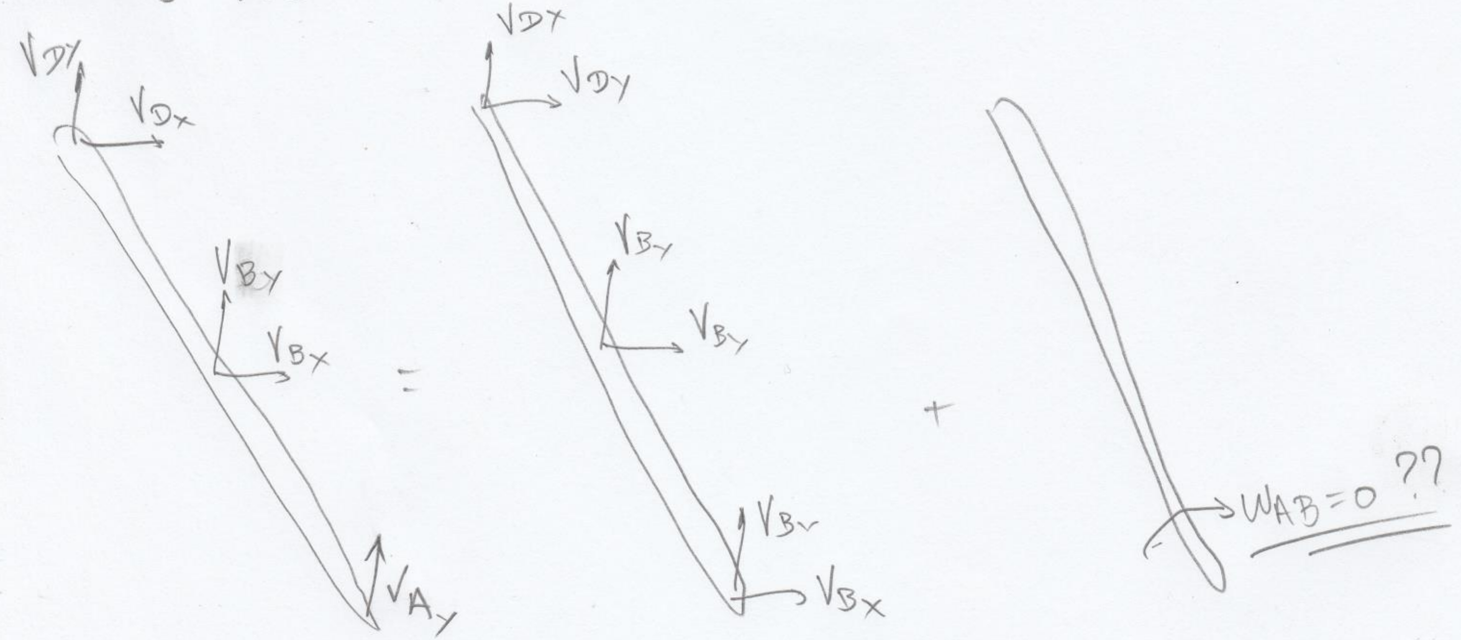
Pablos BC



$$\omega_{BC} = \frac{2\pi \, 40}{60}$$

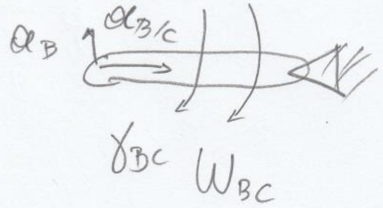
$$V_B = \omega_{BC} \cdot L_{BC}$$

Palitos AD



Επιταχυνσεις.

BC



$a_B = 0$ γιατι??

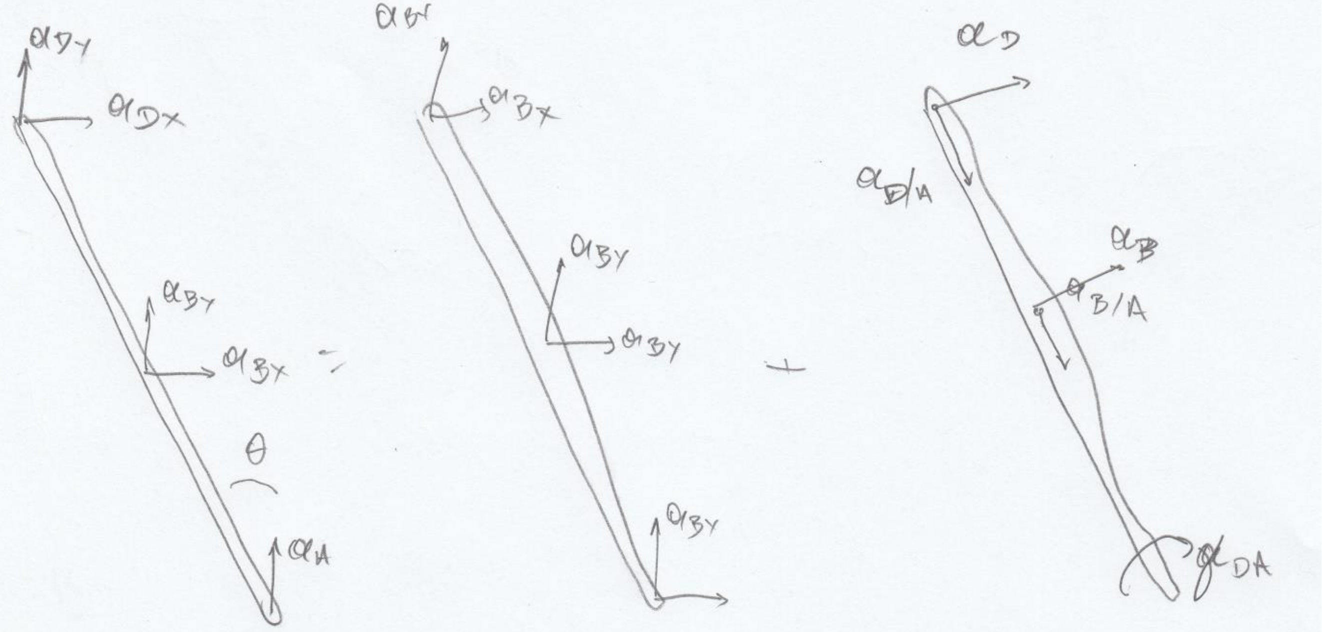
$\gamma_{BC} = 0$

$a_{B/C} = \omega_{BC}^2 \cdot L_{BC}$ (κεντρομολος)

αρα $a_{B_y} = 0 = a_B$

$a_{B_x} = a_{B/C} = \omega_{BC}^2 \cdot L_{BC}$

DBA



a_{Dy}
a_{Dx}
a_{By}
a_{Bx}
θ
a_A
=
a_{Br}
a_{Bx}
a_{By}
a_{By}
a_{By}
+
a_D
$a_{D/A}$
a_B
$a_{B/A}$
α_{DA}

a_{BX}

$\theta = a\sin\frac{4}{8}$

$$a_{B/A} = \omega_{AD}^2 \cdot L_{AD} \qquad a_{D/A} = \omega_{AD}^2 L_{AD}$$

$$\begin{cases} a_{B/Ax} = +a_{B/A}\sin\theta_1 \\ a_{B/Ay} = -a_{B/A}\cos\theta_1 \\ a_{D/Ax} = +a_{D/A}\sin\theta_1 \\ a_{D/Ay} = -a_{D/A}\cos\theta_1 \end{cases}$$

$$a_B = \gamma_{DA} \cdot L_{BA} \qquad a_D = \gamma_{DA} L_{DA}$$

$$\begin{cases} a_{Bx} = \gamma_{DA} L_{BA}\cos\theta_1 \\ a_{By} = \gamma_{DA} L_{BA}\sin\theta_1 \\ a_{Dx} = \gamma_{DA} L_{BA}\cos\theta_1 \\ a_{Dy} = \gamma_{DA} L_{BA}\sin\theta_1 \end{cases}$$

Άρα στο B

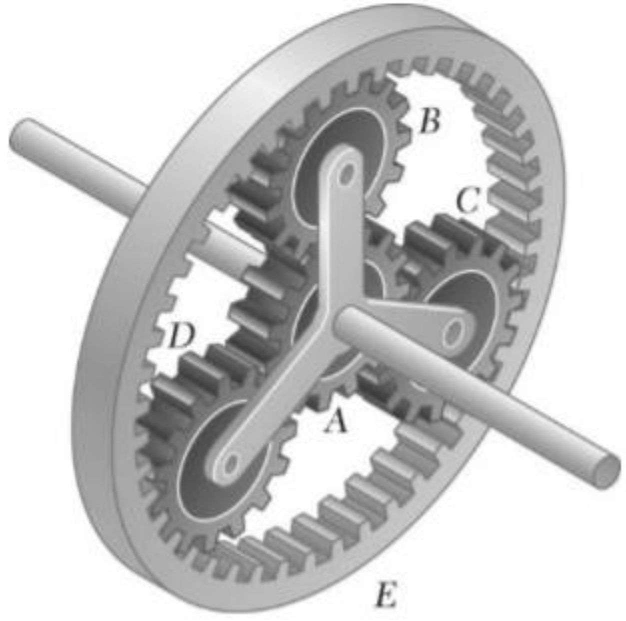
$$a_B = a_A + a_{B/A} \quad \begin{cases} x-x \quad a_{B_x} = \omega_{BC}^2 L_{BC} \rightarrow a_A \\ \\ y-y \quad a_{B_y} = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma_{AD} = \dots \end{cases}$$

γιατί $\underline{a_y = 0}$!?

$6 \to$ D

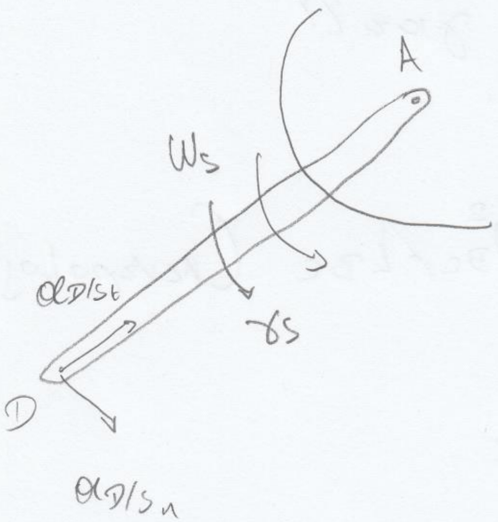
$$a_D = a_{\cancel{D}A} + a_{DA} \begin{cases} x - x & a_{Dx} \\ y - y & a_{Dy} \end{cases}$$

Πίσω στα πλανητικά



Η ακτίνα όλων των γραναζιών είναι και του εξωτερικού 3α. Η γωνιακή ταχύτητα του A είναι γνωστή και ωρολογιακή σε φορά και το εξωτερικό γρανάζι είναι ακίνητο.
Ποια η επιτάχυνση του δοντιού D όταν είναι σε επαφή με το γρανάζι (α) A (β) E

Συνδεσμος



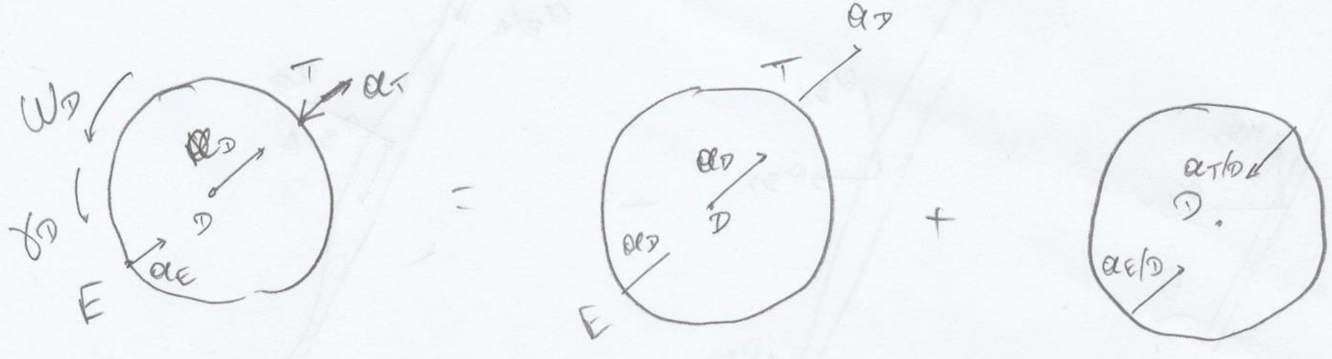
ω_s = γνωστο

$\gamma_s = 0$ (γιατι??)

$a_{D/S_n} = 0$

$a_{D/S_t} = \omega_s^2 \cdot 2a$

Γραναζι D



γιατι $\emptyset$ οι περιφερειακης παζι ??

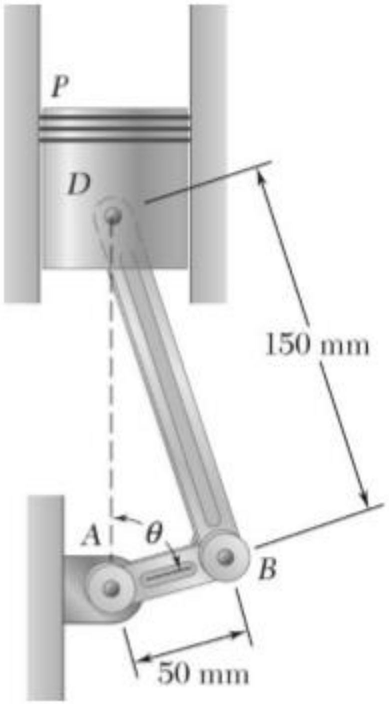
δοντι T (επαφη με γραναζι A)

$$a_T = a_D + a_{T/D} = a_D - \omega_D^2 a \longrightarrow a_T$$

δοντι Γ=

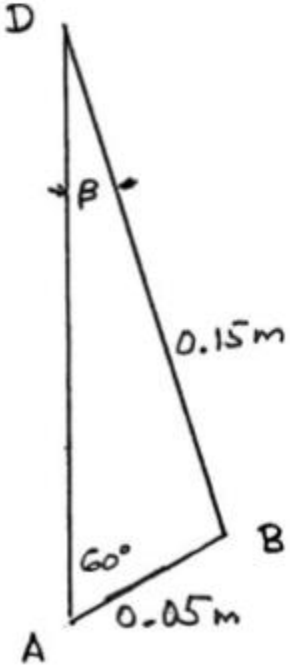
$$a_{\Gamma} = a_D + a_{\Gamma/D} = a_D + \omega_D^2 a$$

Έμβολο διωστήρας



Γνωρίζοντας ότι η AB περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα   ωρολογιακά να βρεθεί η επιτάχυνση του εμβόλου στο Θ=60^o

Ταχύτητες



$$\frac{\sin\beta}{0.05} = \frac{\sin 60^\circ}{0.15} \qquad \beta = 16.779^\circ$$

$$\omega_{AB} = 900 \text{ rpm} = 30\pi \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{v}_B = 0.05\omega_{AB} = 1.5\pi \text{ m/s} \quad 60^\circ$$

$$\mathbf{v}_D = v_D \downarrow \qquad \omega_{BD} = \omega_{BD}$$

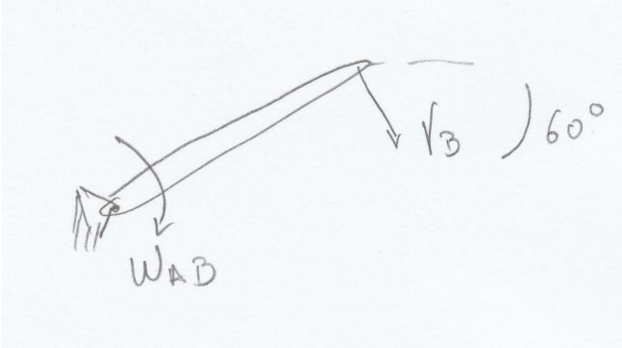
$$\mathbf{v}_{D/B} = 0.15\,\omega_{BD} \quad \beta$$

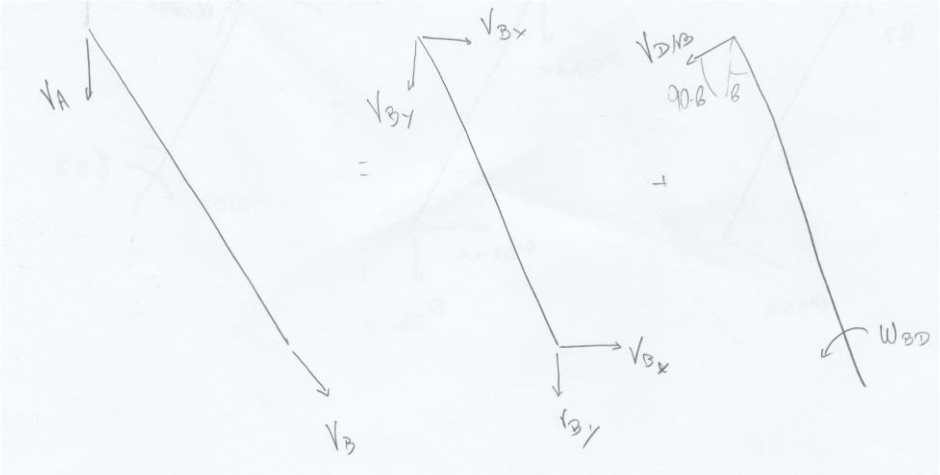
$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B}$$

$$[v_D \downarrow] = [1.5\pi \quad 60^\circ] + [0.15\omega_{BD} \quad \beta]$$

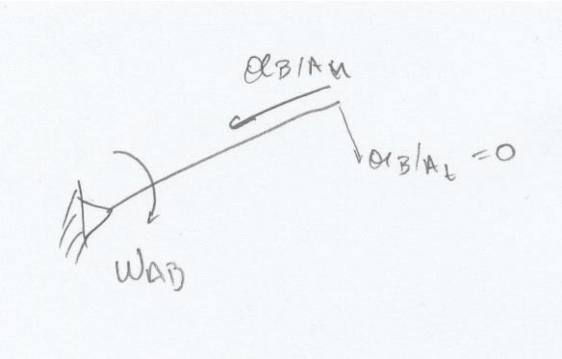
$$0 = 1.5\pi\cos 60^\circ - 0.15\omega_{BD}\cos\beta$$

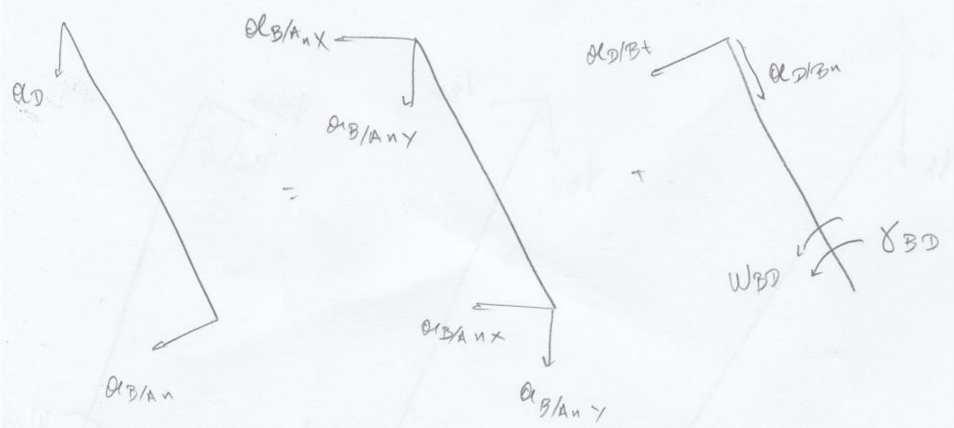
$$\omega_{BD} = \frac{1.5\pi\cos 60^\circ}{0.15\cos\beta} = 16.4065 \text{ rad/s}$$





Επιταχύνσεις





$$\alpha_{AB} = 0$$

$$\mathbf{a}_B = 0.05\omega_{AB}^2 = (0.05)(30\pi)^2 = 444.13 \text{ m/s}^2 \;\measuredangle\; 30°$$

$$\mathbf{a}_D = a_D \downarrow \qquad \alpha_{BD} = \alpha_{BD} \circlearrowright$$

$$\mathbf{a}_{D/B} = [0.15\alpha_{AB} \measuredangle \beta] + [0.15\omega_{BD}^2 \searrow \beta]$$

$$= [0.15\alpha_{BD} \measuredangle \beta] + [40.376 \searrow \beta]$$

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D/B} \qquad \text{Resolve into components.}$$

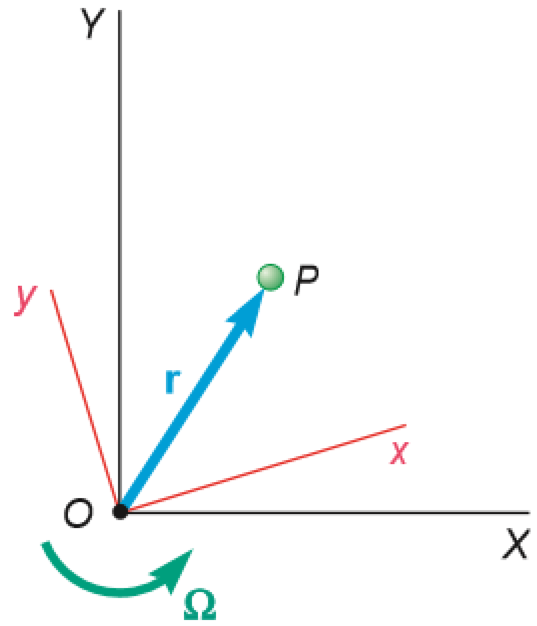
$$\xrightarrow{+}: \quad 0 = -444.13 \cos 30° + 0.15\alpha_{BD} \cos \beta + 40.376 \sin \beta$$

$$\alpha_{BD} = 2597.0 \text{ rad/s}^2$$

$$+\downarrow: \quad a_D = 444.13 \sin 30° - (0.15)(2597.0) \sin \beta + 40.376 \cos \beta$$

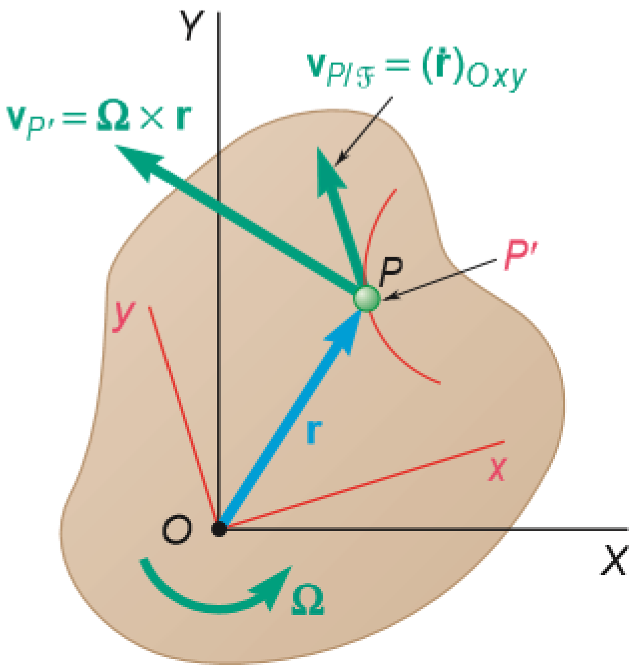
$$= 148.27 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_P = \mathbf{a}_D \qquad \mathbf{a}_P = 148.3 \text{ m/s}^2 \downarrow$$

Επιτάχυνση Coriolis



$$\mathbf{v}_P = (\dot{\mathbf{r}})_{OXY} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$$

Σε στερεό σώμα



$$\boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}}$$

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}]$$

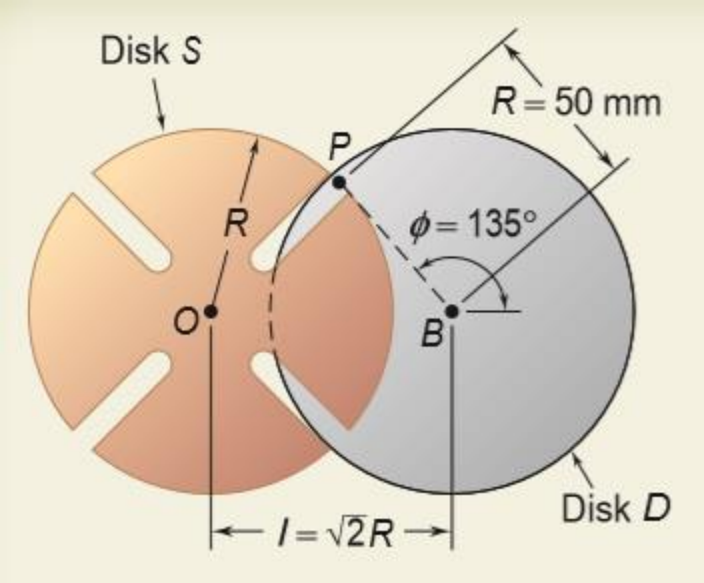
$$\frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}] = (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxy} + \mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$$

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} + (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxy}}$$

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c}$$

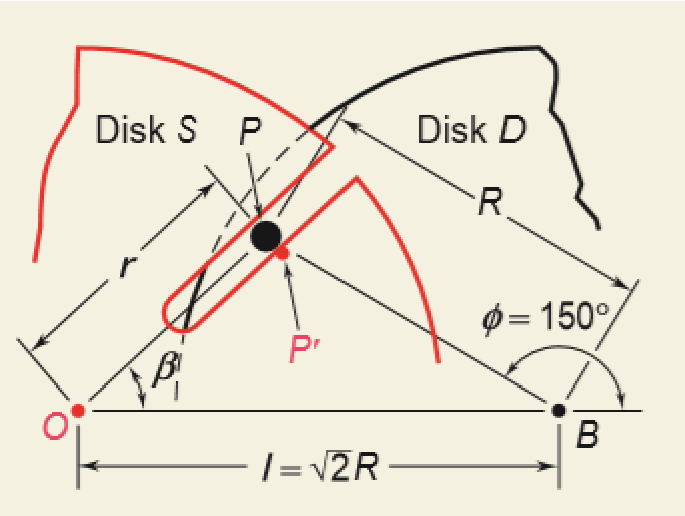
$$\mathbf{a}_c = 2\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} = 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$$

Μηχανισμός της Γενεύης



Ο δίσκος D περιστρέφεται ανθωρολογιακά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 10r/s. Ο πείρος P είναι κολλημένος στον D και γλιστρά στις εσοχές του δίσκου S. Θεωρείται ότι η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου S είναι 0 όταν ο πείρος μπαίνει ή βγαίνει από μια εσοχή. Για γωνία $\phi=150^o$ να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου S και η επιτάχυνση του πείρου

Βήμα 1ο θέση πείρου



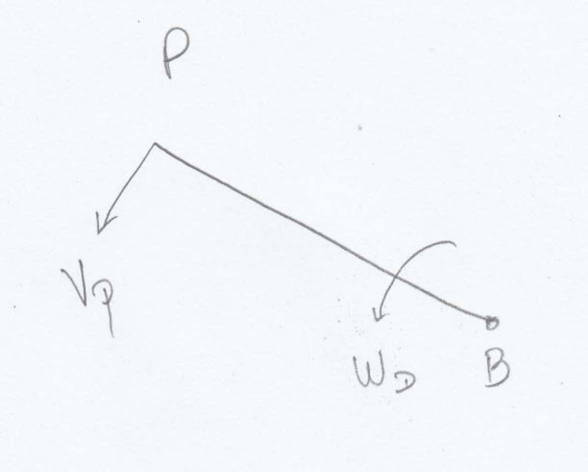
$$r^2 = R^2 + l^2 - 2Rl\cos 30° = 0.551R^2 \qquad r = 0.742R = 37.1 \text{ mm}$$

$$\frac{\sin \mathrm{b}}{R} = \frac{\sin 30°}{r} \qquad \sin \mathrm{b} = \frac{\sin 30°}{0.742} \qquad \mathrm{b} = 42.4°$$

Ταχύτητα πείρου

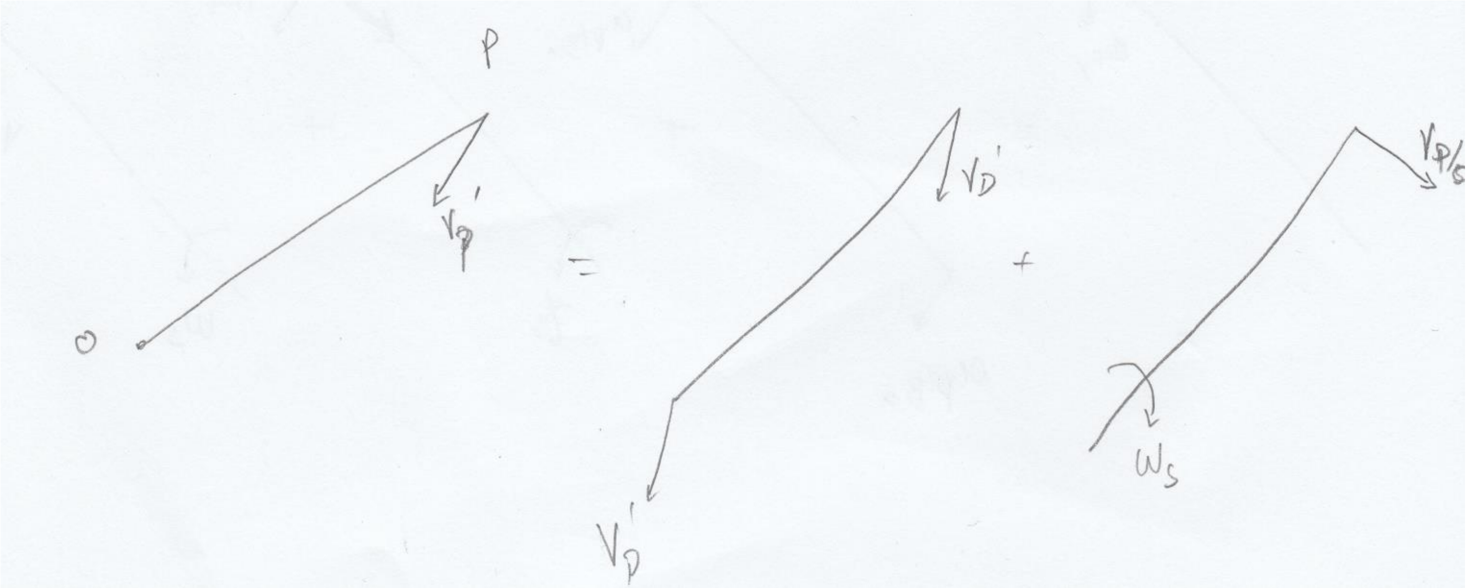
Ο πείρος είναι κολλημένος στον δίσκο D άρα

$$v_P = R\mathbf{v}_D = (50 \text{ mm})(10 \text{ rad/s}) = 500 \text{ mm/s}$$



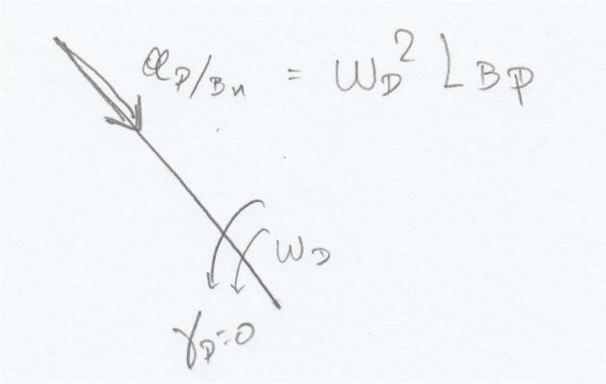
Κίνηση πείρου σε εσοχή

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{S}}$$



Επιτάχυνση πείρου

$$a_P = R\mathrm{v}_D^2 = (500\ \text{mm})(10\ \text{rad/s})^2 = 5000\ \text{mm/s}^2$$



Κίνηση στο χώρο

Σώμα

$$\vec{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i$$

$$\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\gamma}_i + \sum \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_j \qquad i > j$$

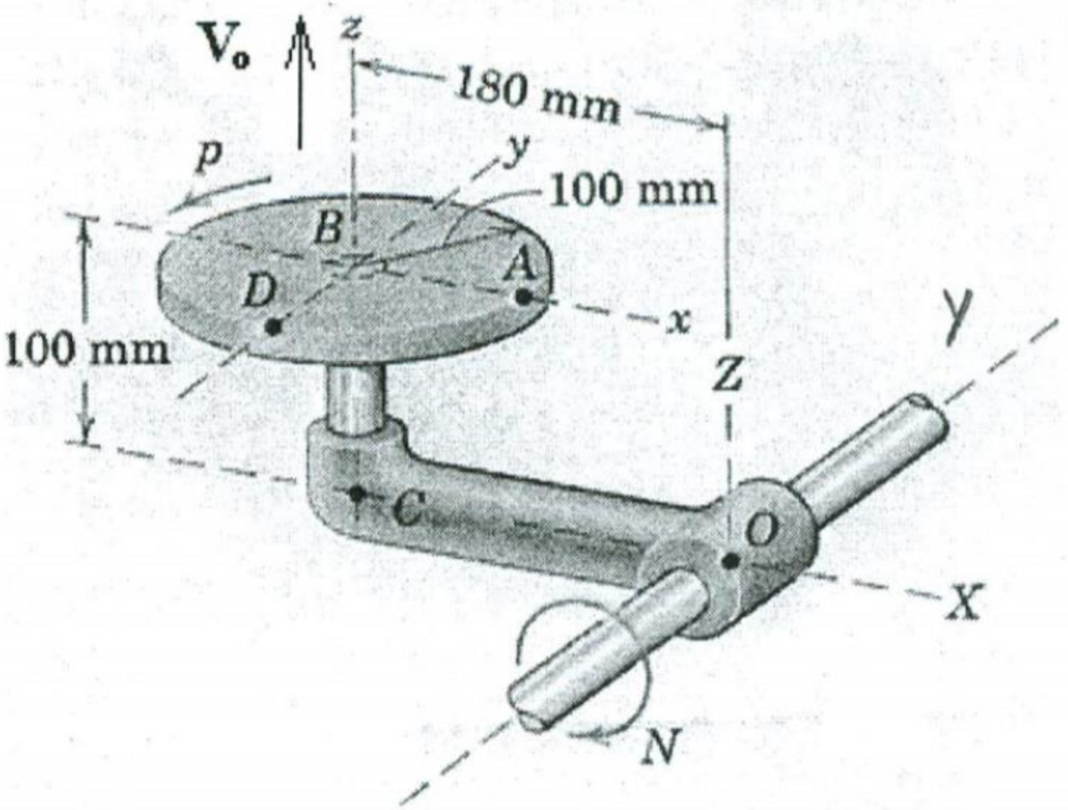
Σημείο.

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i$$

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\gamma}_i \times \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i) +$$

$$+ \sum 2 \omega_i \times (\vec{u}_j) \qquad i > j$$

Ο κυκλικός δίσκος ακτίνας 100-mm περιστρέφεται γύρω από τον z-άξονα με γωνιακή ταχύτητα p=240 rpm, γωνιακή επιτάχυνση $\dot{p}$=2 rad/sec^2 (ίδιας φοράς) και ταυτόχρονα μεταφέρεται με σταθερή ταχύτητα V_o=10 m/sec ενώ ο βραχίονας OCB περιστρέφεται γύρω από τον Y με σταθερή γωνιακή ταχύτητα N=30 rpm. Προσδιορίστε τη γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου καθώς επίσης και την ταχύτητα και επιτάχυνση του σημείου A.



$\vec{P} = 240\,\hat{k}$

$\dot{\vec{P}} = 2\,\hat{k}$

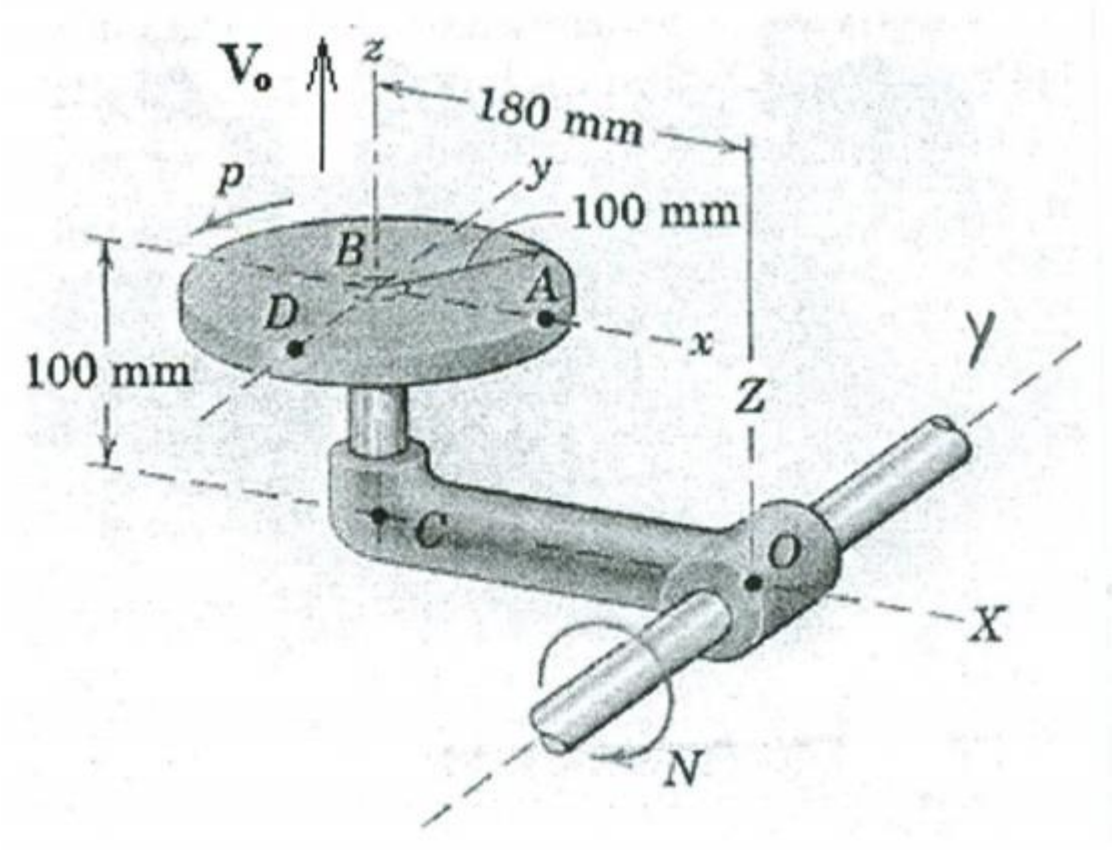
$\vec{V}_o = 10\,\hat{k}$

$\vec{N} = 30\,\hat{j}$

<u>Δισκος</u>

$\vec{\Omega} = \vec{N} + \vec{p}$

$\vec{\Gamma} = \dot{p} + \vec{N} \times \vec{P}$



Inicio A

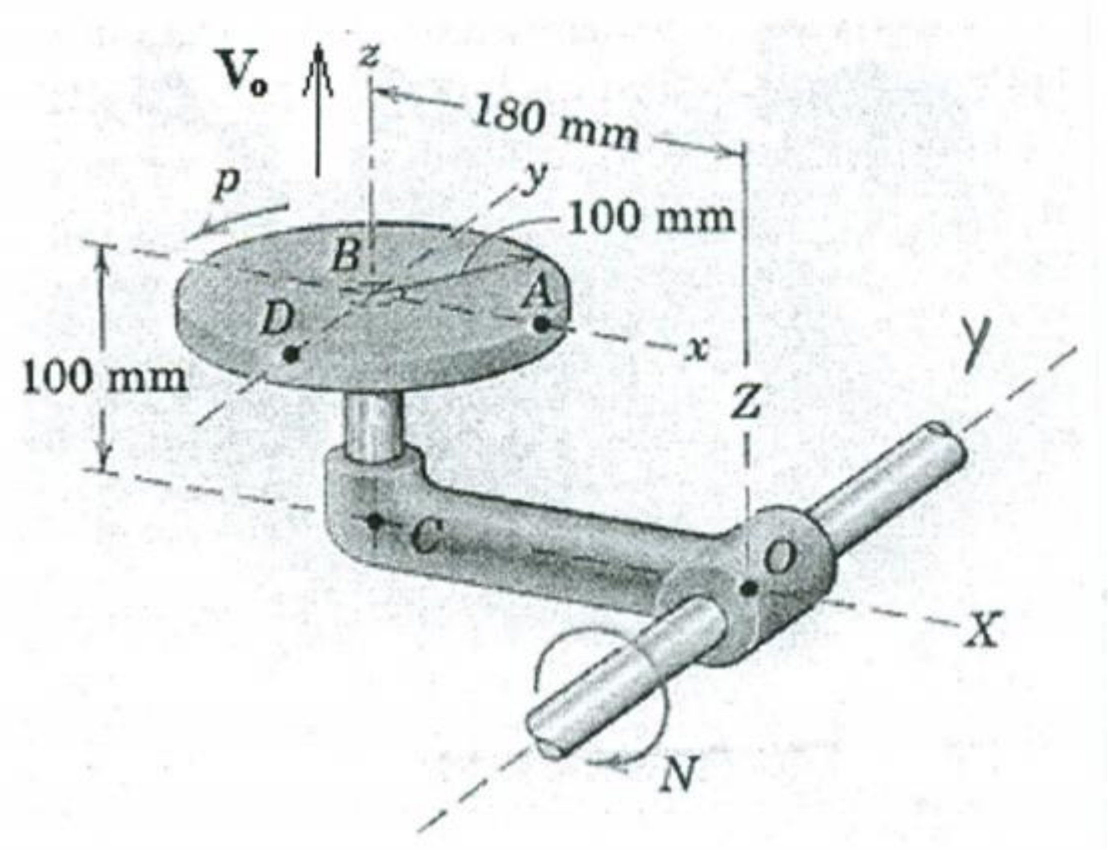
$$\vec{V}_A = \vec{V}_o + \vec{N}\times\vec{r}_N + \vec{p}\times\vec{r}_p$$

$$a_A = \dot{\vec{p}}\times\vec{r}_p + \vec{N}\times(\vec{N}\times\vec{r}_N) + \vec{p}\times(\vec{p}\times\vec{r}_p) +$$

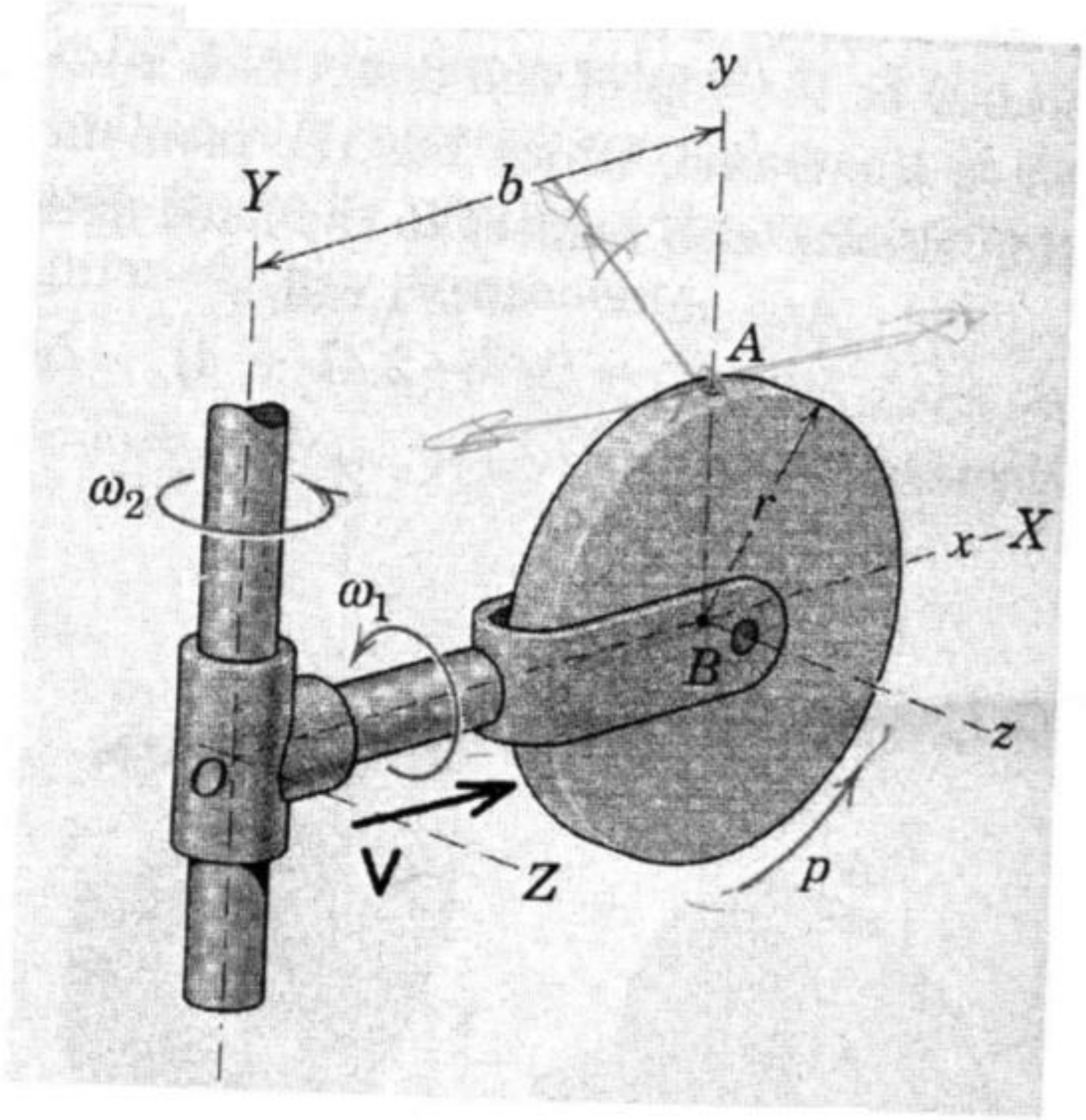
$$+ 2N\times(\vec{V}_o + \vec{p}\times\vec{r}_p) + 2\vec{p}\times\vec{V}_o$$

$$\vec{r}_N = 100\hat{k} - 80\hat{\imath}$$

$$\vec{r}_p = 100\hat{\imath}$$



Ο δίσκος του σχήματος μάζας m και ακτίνας r περιστρέφεται γύρω από τον z-άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα p, γύρω από τον x-άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_1 και γύρω από τον Y-άξονα με ω_2. Ταυτοχρόνως το τμήμα OB επεκτείνεται τηλεσκοπικά με σταθερή γραμμική ταχύτητα v. Προσδιορίσατε α) τη συνολική γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση του δίσκου β) την ταχύτητα και επιτάχυνση του σημείου A.



$$\vec{\omega}_2 = \omega_2 \hat{j}$$

$$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \hat{i}$$

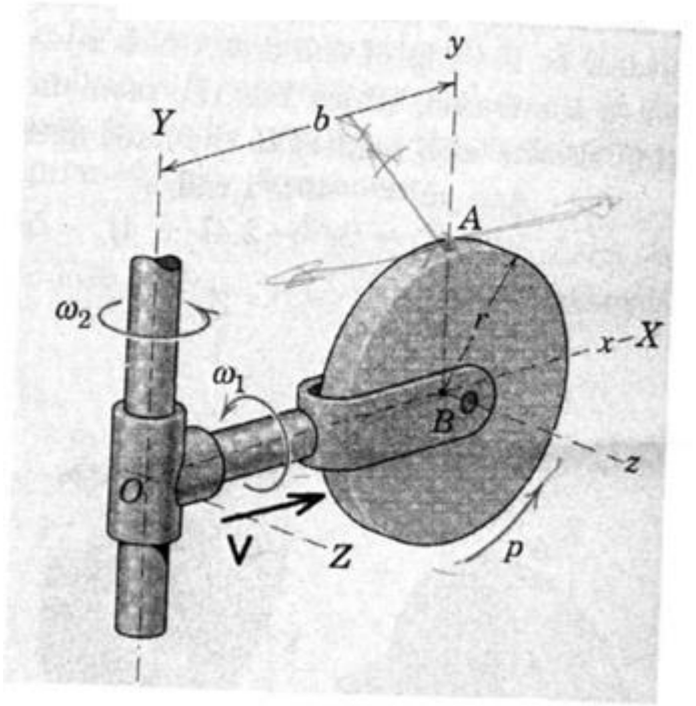
$$\vec{V} = V \hat{i}$$

$$\vec{p} = p \hat{h}$$

Δισκος

$$\underline{\vec{\Omega}} = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1 + \vec{p}$$

$$\vec{\Gamma} = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{p} + \vec{\omega}_1 \times \vec{p}$$



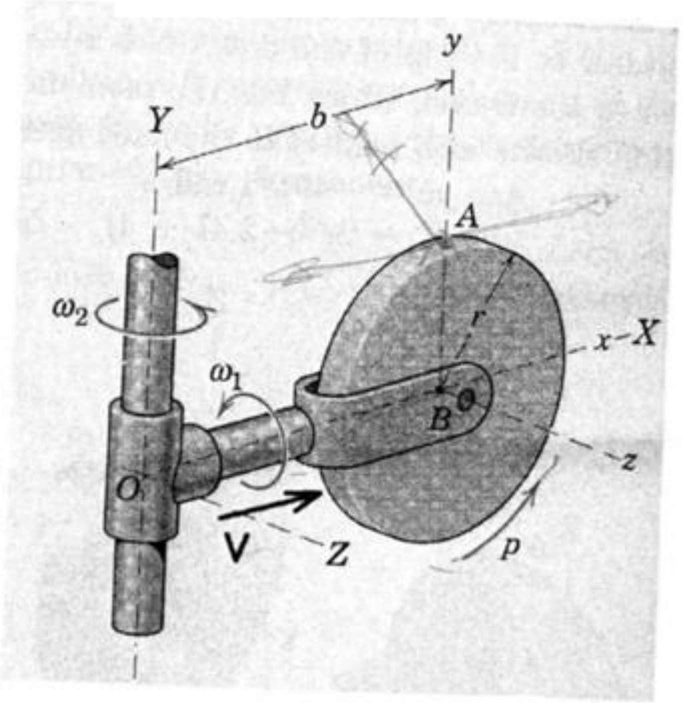
Σημειο A

$$\vec{U} = \vec{V} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_p \times \vec{r}_p$$

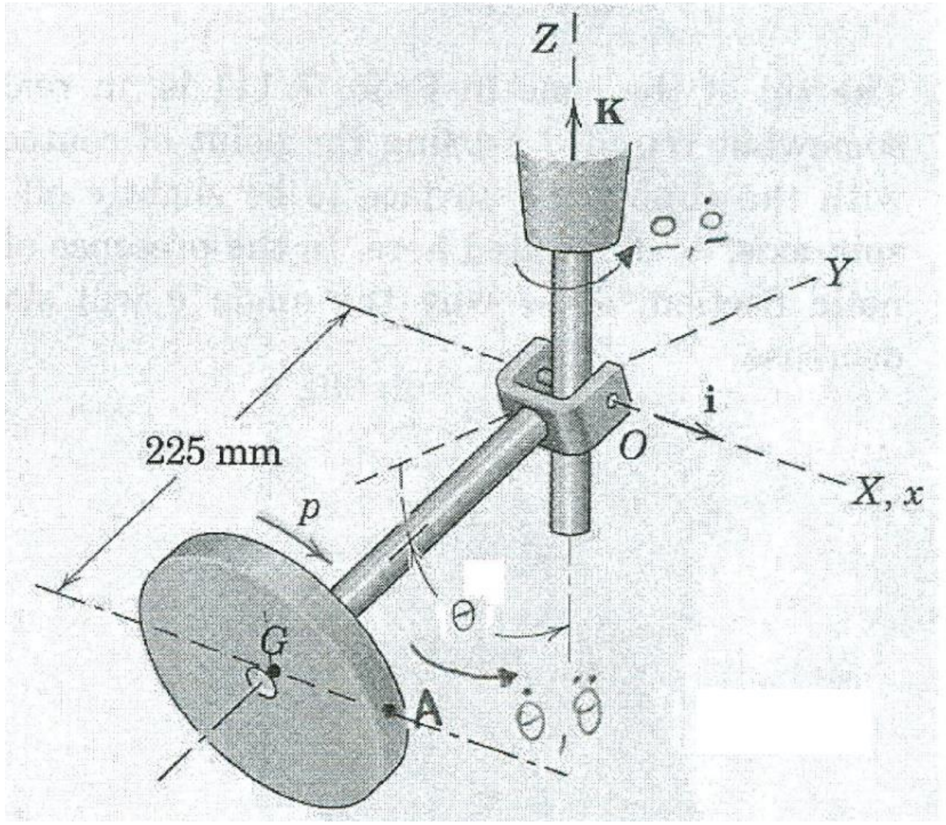
$$\vec{a} = \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) + \vec{\omega}_p \times (\vec{\omega}_p \times \vec{r}_p)$$

$$+ 2\,\omega_2 \times (\vec{V} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_p \times \vec{r}_p)$$

$$+ 2\,\omega_1 \times (\vec{V} + \vec{\omega}_p \times \vec{r}_p)$$

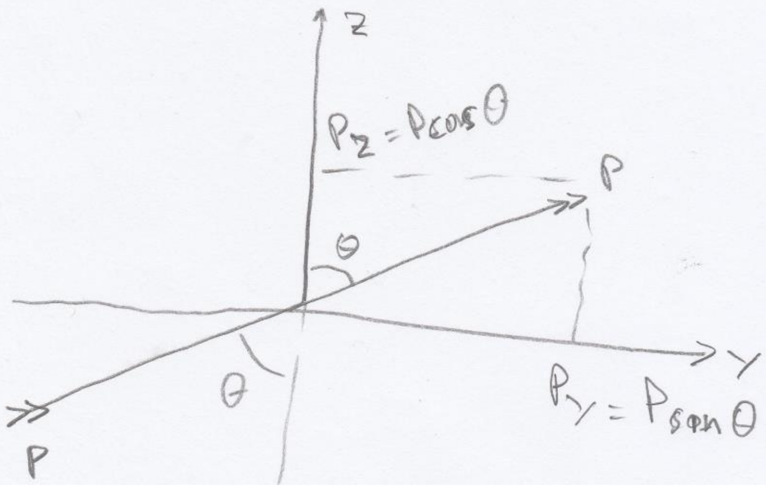


Ο δίσκος ακτίνας 70 mm του σχήματος έχει σταθερή ταχύτητα περιστροφής p=3000 rpm γύρω από τον άξονα OG. Ταυτόχρονα ο άξονας OG περιστρέφεται γύρω απο τον Z-άξονα με γωνιακή ταχύτητα Ω= 5 rad/sec και γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\Omega}$=1 rad/sec^2 και γύρω από τον άξονα X με $\dot{\theta}$=0.5 rad/sec και $\ddot{\theta}$=0.25 rad/sec^2 όπως φαίνονται στο σχήμα. Προσδιορίστε α) τη γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση του δίσκου
β) την ταχύτητα και επιτάχυνση του σημείου A στη θέση θ=70°.



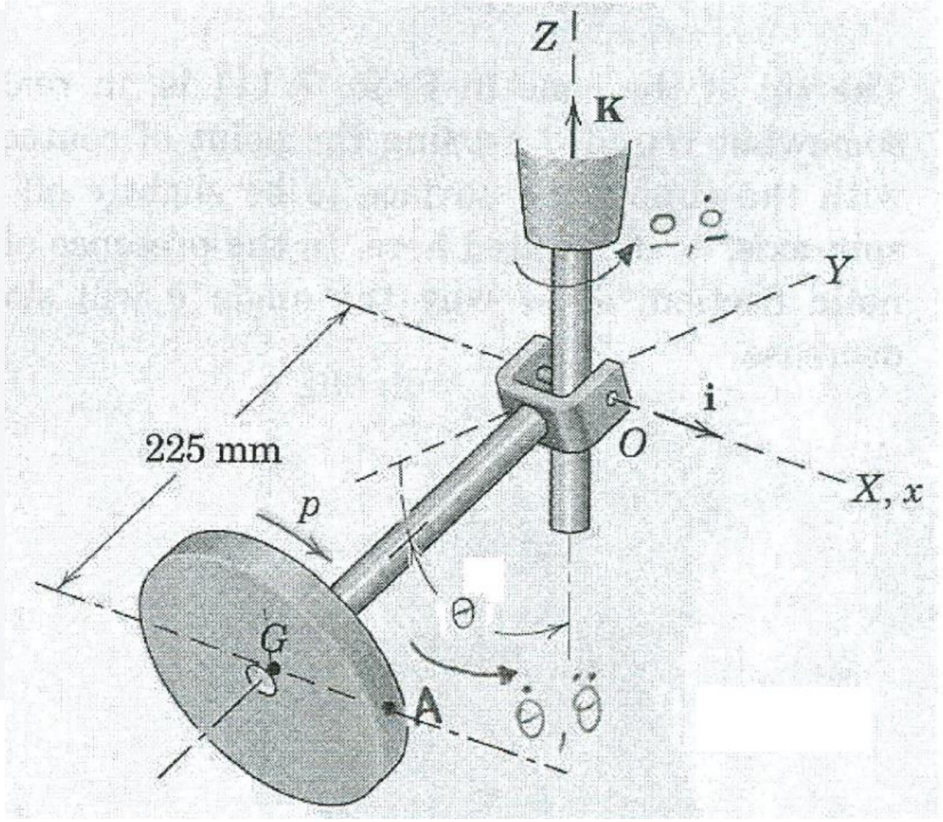
$\vec{O} = 5\,\hat{k}$ $\qquad \dot{\theta} = 0{,}5\,\hat{\imath}$

$\dot{\vec{O}} = 1\,\hat{k}$ $\qquad \ddot{\theta} = 0{,}25\,\hat{\jmath}$



$$p = \frac{2\pi 3000}{60} \text{ r/s}$$

$$\vec{P} = P\sin\theta\,\hat{\jmath} + P\cos\theta\,\hat{k}$$



Δισκος

$$\vec{\Omega}_\Delta = \vec{\Omega} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{p}$$

$$\vec{\Gamma}_\Delta = \vec{\dot{\Omega}} + \vec{\ddot{\theta}}$$

Σημειο A

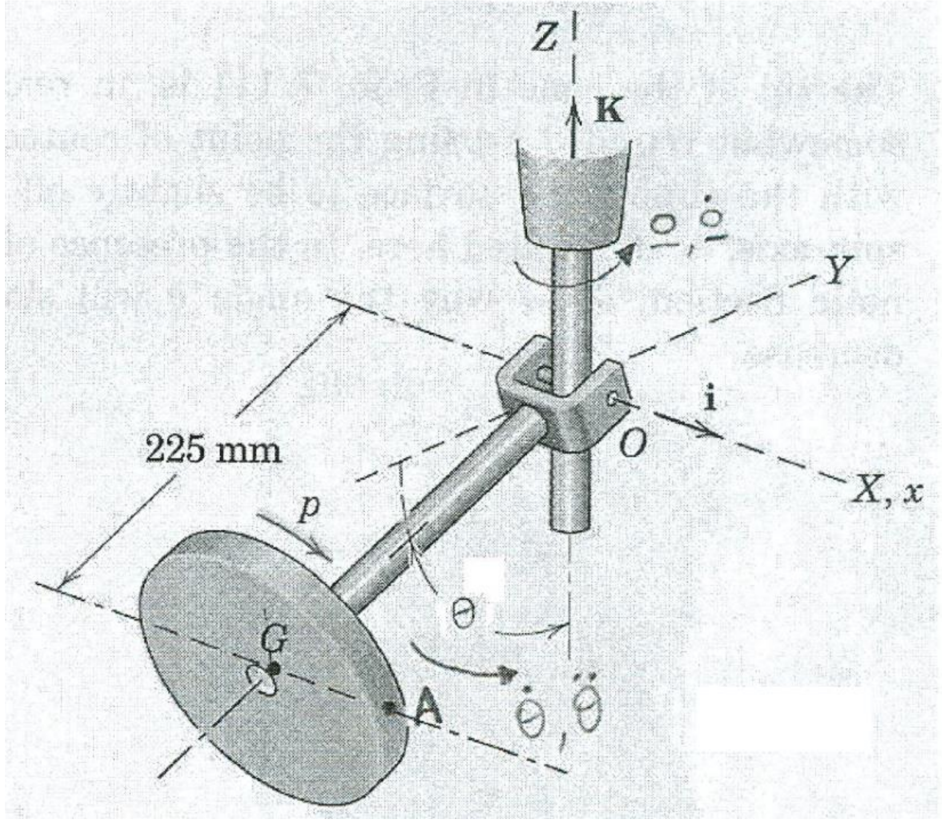
$$\vec{u} = \vec{\Omega}\times\vec{r}_\Omega + \dot{\theta}\times\vec{r}_\theta + \vec{p}\times\vec{r}_p$$

$$\vec{a} = \vec{\Omega}\times\vec{\Omega}\times\vec{r}_\Omega + \vec{\dot{\theta}}\times(\vec{\dot{\theta}}\times\vec{r}_\theta) + \vec{p}\times(\vec{p}\times\vec{r}_p)$$

$$+ \vec{\dot{\Omega}}\times\vec{r}_\Omega + \vec{\ddot{\theta}}\times\vec{r}_\theta$$

$$+ 2\vec{\Omega}\times(\dot{\theta}\times\vec{r}_\theta + \vec{p}\times\vec{r}_p)$$

$$+ 2\dot{\theta}\times(\vec{p}\times\vec{r}_p)$$



$L_{1y} = L_1 \sin\theta$

$L_{1z} = L_1 \cos\theta$

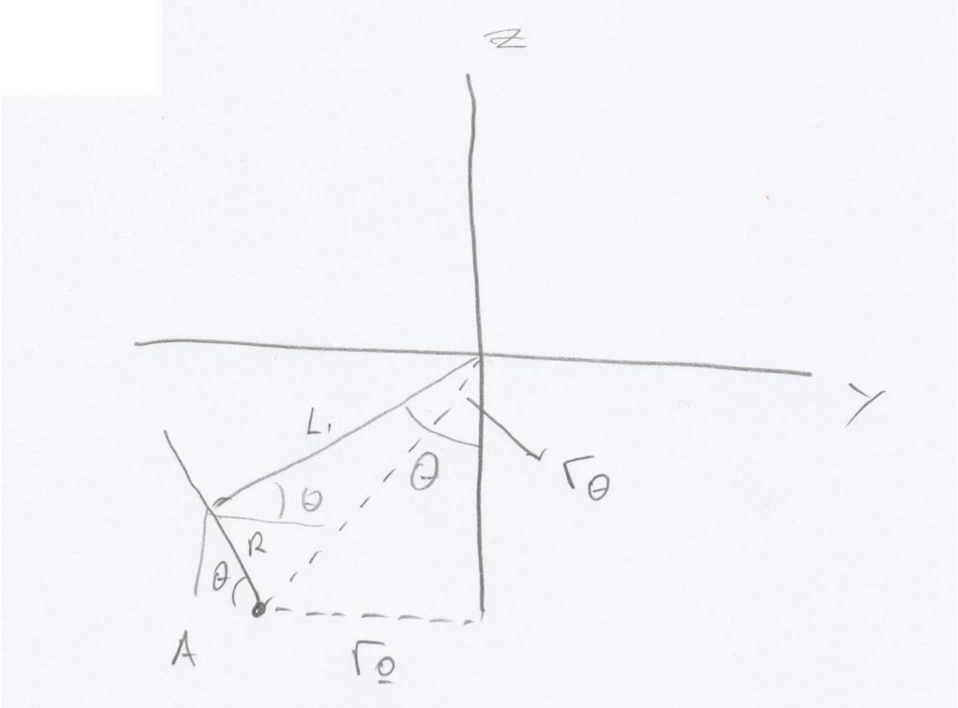
$\vec{L}_1 = -\vec{L}_{1y}\hat{j} + \vec{L}_{1z}\hat{k}$

$\vec{r}_{\Theta} = -L_{1y}\hat{j} + R_y\hat{j}$

$R_y = R\cos\theta$

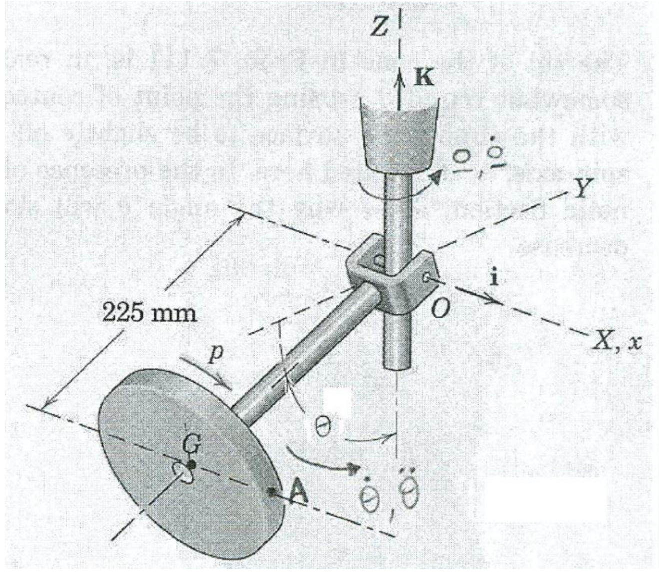
$R_z = R\sin\theta$

$\vec{R} = R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$

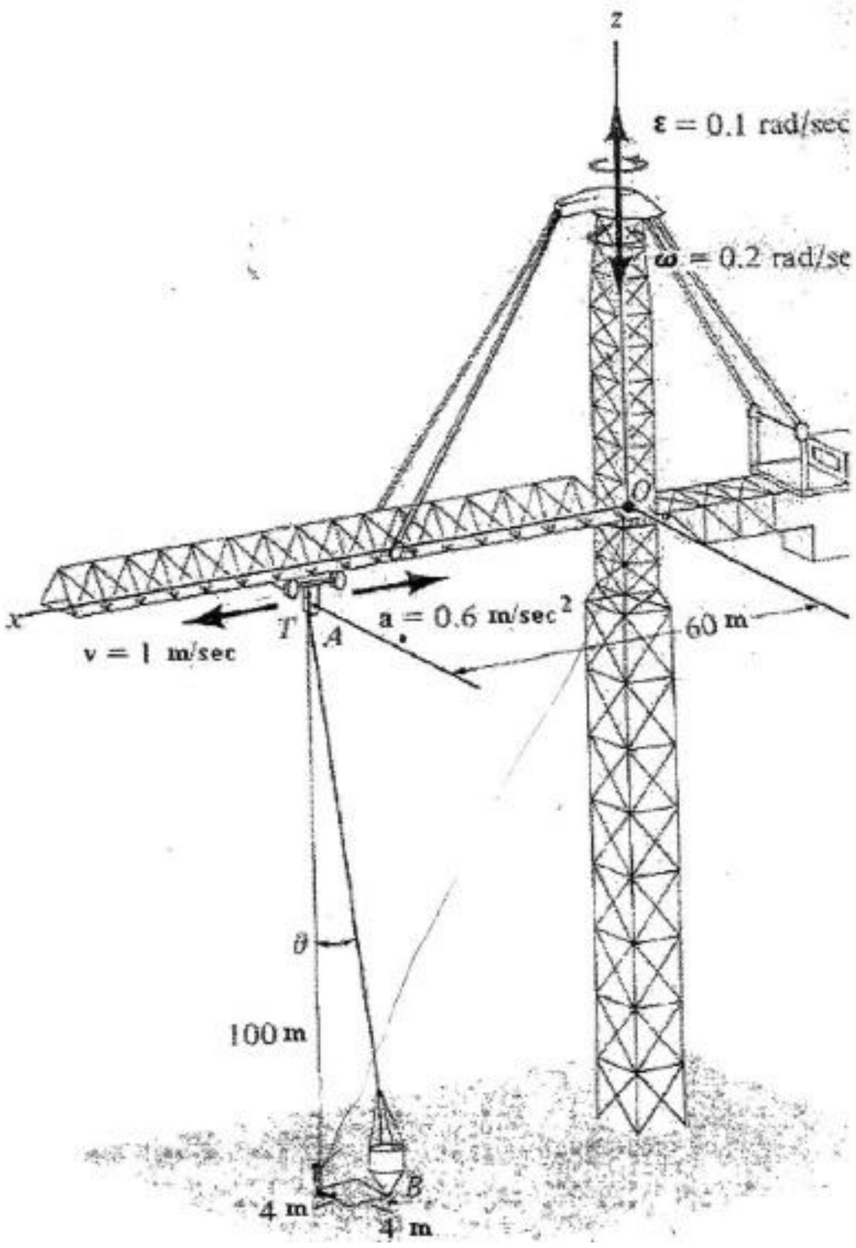


$\vec{r}_{\theta} = -L_{1y}\hat{j} + L_{1z}\hat{k} + R_y\hat{j} - R_y\hat{k}$

$\vec{r}_{?} = R_y\hat{j} - R_y\hat{k}$



<u>Άσκηση 1</u>: Ο εικονιζόμενος γερανός περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω=0.2 rad/sec και γωνιακή επιτάχυνση ε=0.1 rad/sec^2 ενώ το βαγονάκι Τ κινείται κατά μήκος του οριζοντίου σκέλους με ταχύτητα και επιβράδυνση όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Αν το καλώδιο ΑΒ "μαζεύεται"προς τα πάνω με ρυθμό 1 m/sec προσδιορίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κουβά Β στη θέση θ=0.



$\vec{\varepsilon} = \varepsilon \hat{k}$ $\qquad$ $V_B = \hat{V}_B k$

$\vec{\omega} = -\omega \hat{k}$

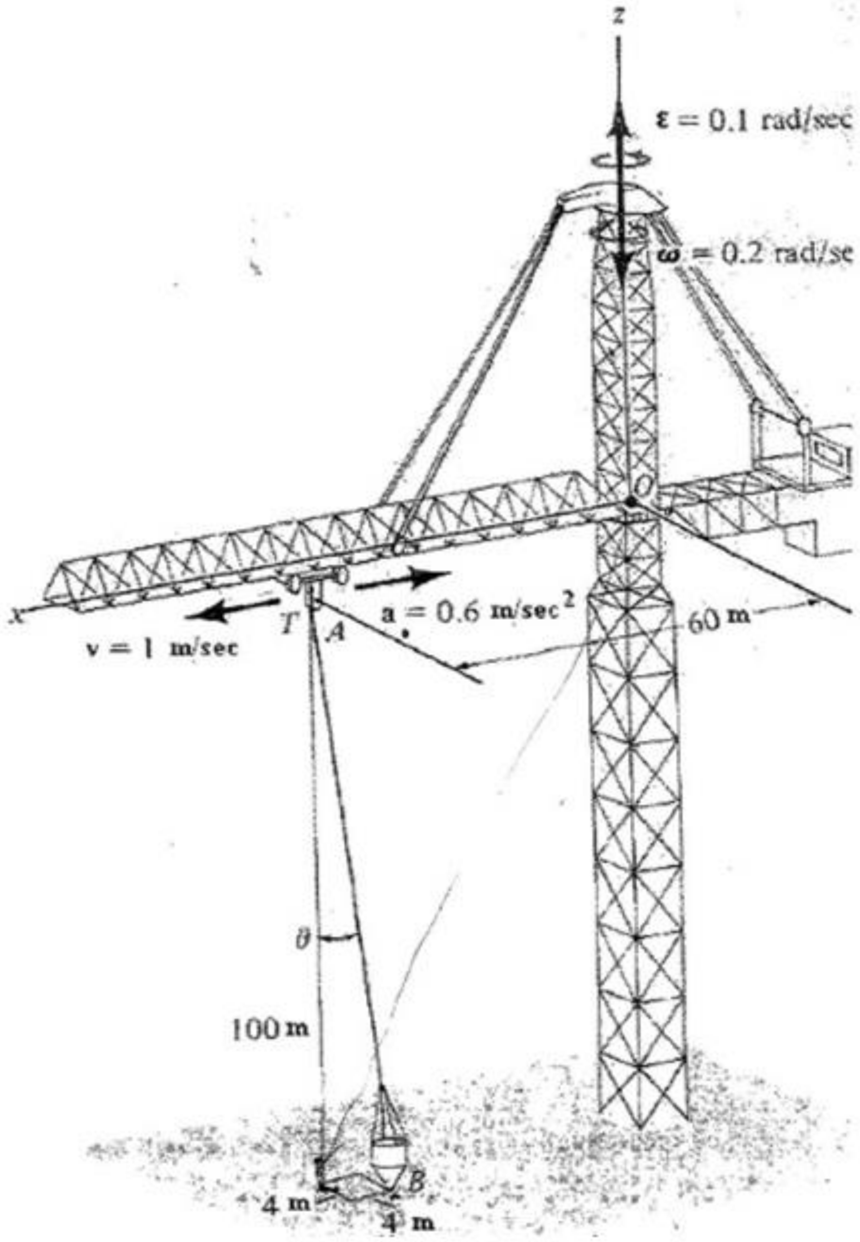
$\vec{V} = V \hat{i}$

$\vec{\alpha} = -\alpha \hat{i}$

Kayarlı

$\vec{\Omega} = \vec{\omega}$

$\vec{\Gamma} = \vec{\varepsilon}$

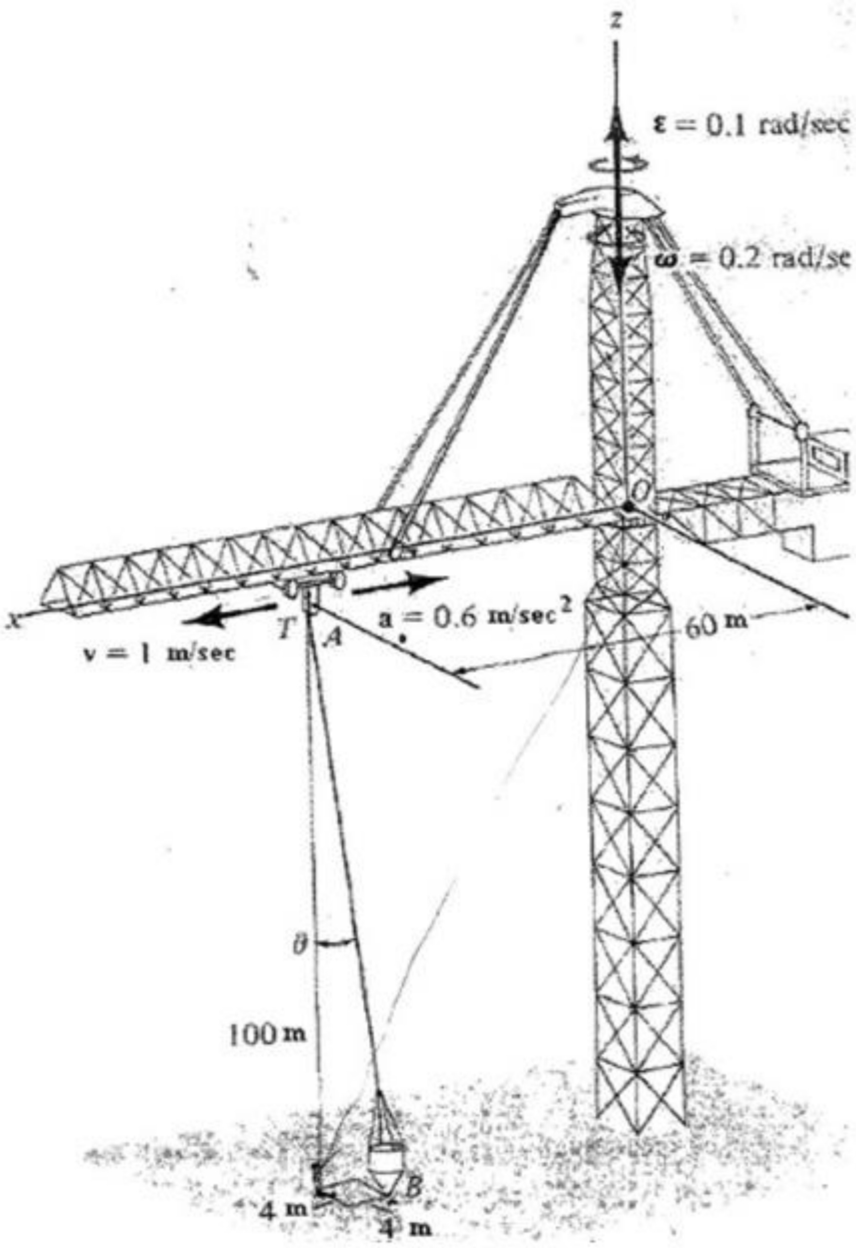


Σημειο B

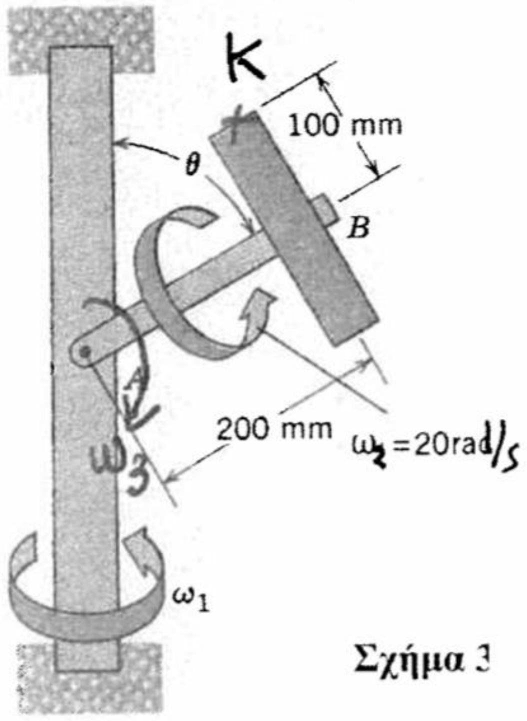
$$\vec{U} = \vec{V} + \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_B$$

$$\vec{a}_B = \vec{a} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_B) +$$
$$+ 2\,\vec{\omega} \times (\vec{V} + \vec{V}_B)$$

$$\vec{r}_B = 60\,\hat{i}$$ (γιατι)??

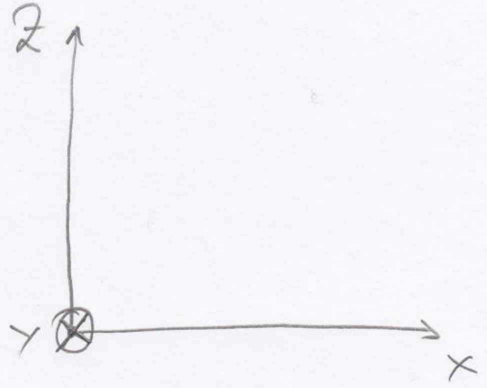


Ο δίσκος του σχήματος 3 περιστρέφεται γύρω από το βραχίονα AB με σταθερή ω_2=20 rad/sec και φορά όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο βραχίονας AB με τη σειρά του περιστρέφεται ωρολογιακά με $\omega_3=\dot{\theta}=1$ rad/sec και $\varepsilon_3=\ddot{\theta}=10$ rad/sec^2 και συνδέεται με άρθρωση στο A με κατακόρυφο άξονα ο οποίος περιστρέφεται με ω_1=2 rad/sec και ε_1=20 rad/sec^2. Προσδιορίστε α) τη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου β) την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου K του δίσκου.



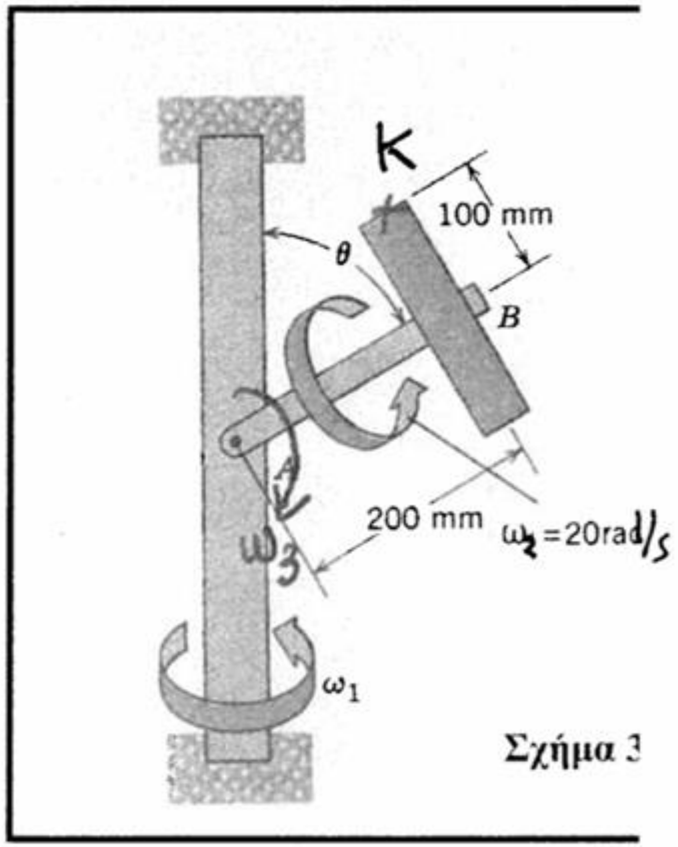
Σχήμα 3

Ορίζω

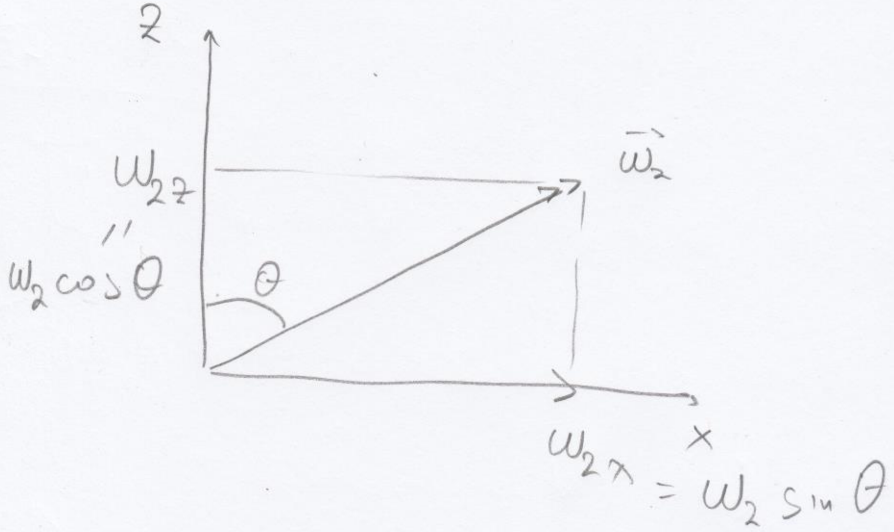


$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \times k \qquad \vec{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \times k$

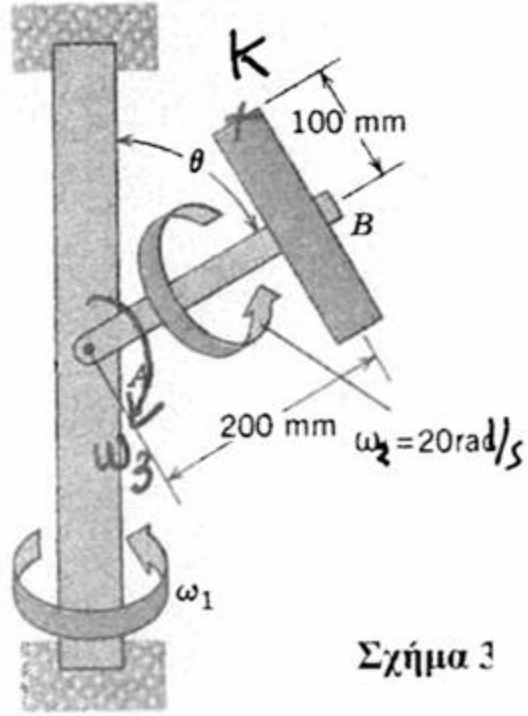
$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_3 \times j \qquad \vec{\varepsilon}_3 = \varepsilon_3 \hat{j}$



Σχήμα 3



$$\vec{\omega}_2 = \omega_2 \sin\theta\, \hat{i} + \omega_2 \cos\theta\, \hat{j}$$



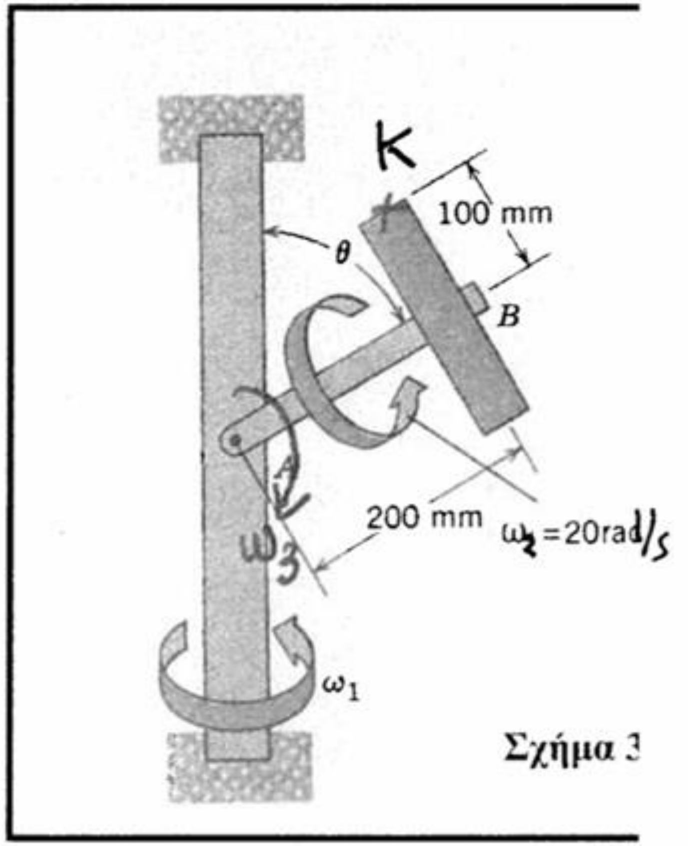
Σχήμα 3

Δισκος

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

!!!

$$\vec{\Gamma} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_2$$



Σχήμα 3

Σημείο K

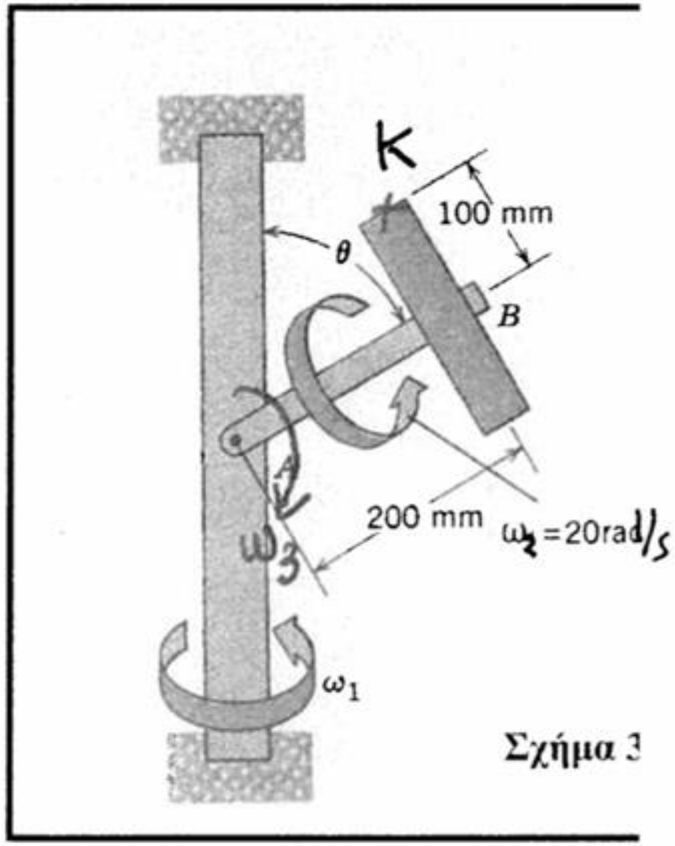
$$\vec{V}_K = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3$$

$$\vec{\alpha}_K = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\varepsilon}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)$$

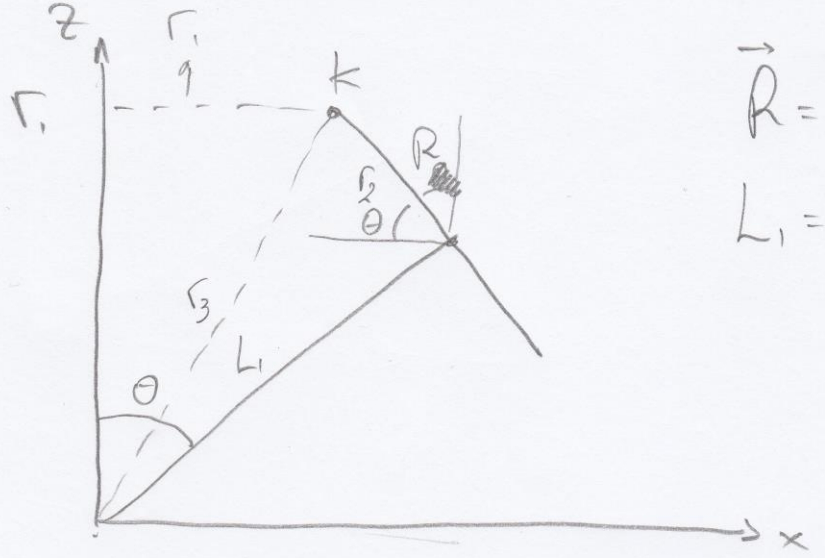
$$+ \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) + \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3)$$

$$+ 2\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3)$$

$$+ 2\vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)$$

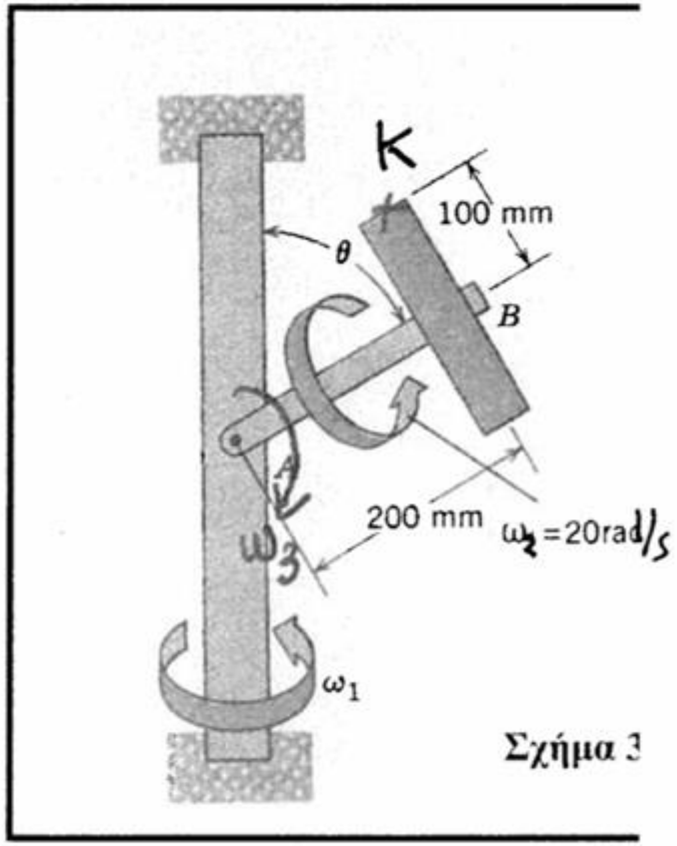


Σχήμα 3



$$\vec{R} = -R\cos\theta\,\hat{i} + R\sin\theta\,\hat{k}$$

$$L_1 = L_1\sin\theta\,\hat{i} + L_1\cos\theta\,\hat{k}$$



Σχήμα 3

$$\vec{r}_1 = L_1\sin\theta_1\,\hat{i} - R\cos\theta\,\hat{i}$$

$$\vec{r}_3 = L_1\sin\theta\,\hat{i} + L_1\cos\theta\,\hat{k} - R\cos\theta\,\hat{i} + R\sin\theta\,\hat{k}$$

$$\vec{r}_2 = -R\cos\theta\,\hat{i} + R\sin\theta\,\hat{k}$$

Επιτάχυνση πείρου σε εσοχή

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c$$

$$\mathbf{a}_P = (\mathbf{a}_{P'})_n + (\mathbf{a}_{P'})_t + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c$$

$$(a_{P'})_n = r\omega_{\mathcal{F}}^2 = (37.1\ \text{mm})(4.08\ \text{rad/s})^2 = 618\ \text{mm/s}^2$$

$$(a_{P'})_t = r\alpha_{\mathcal{F}} = 37.1\alpha_{\mathcal{F}}$$

$$a_c = 2\omega_{\mathcal{F}} v_{P/\mathcal{F}} = 2(4.08\ \text{rad/s})(477\ \text{mm/s}) = 3890\ \text{mm/s}^2$$