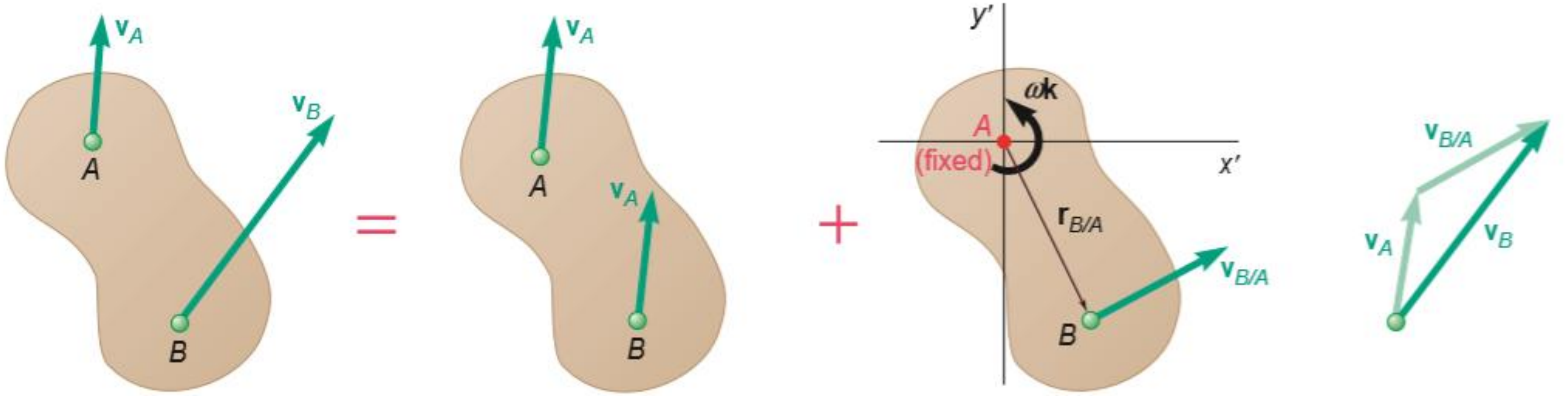
Κινηματική Στερεού Σώματος

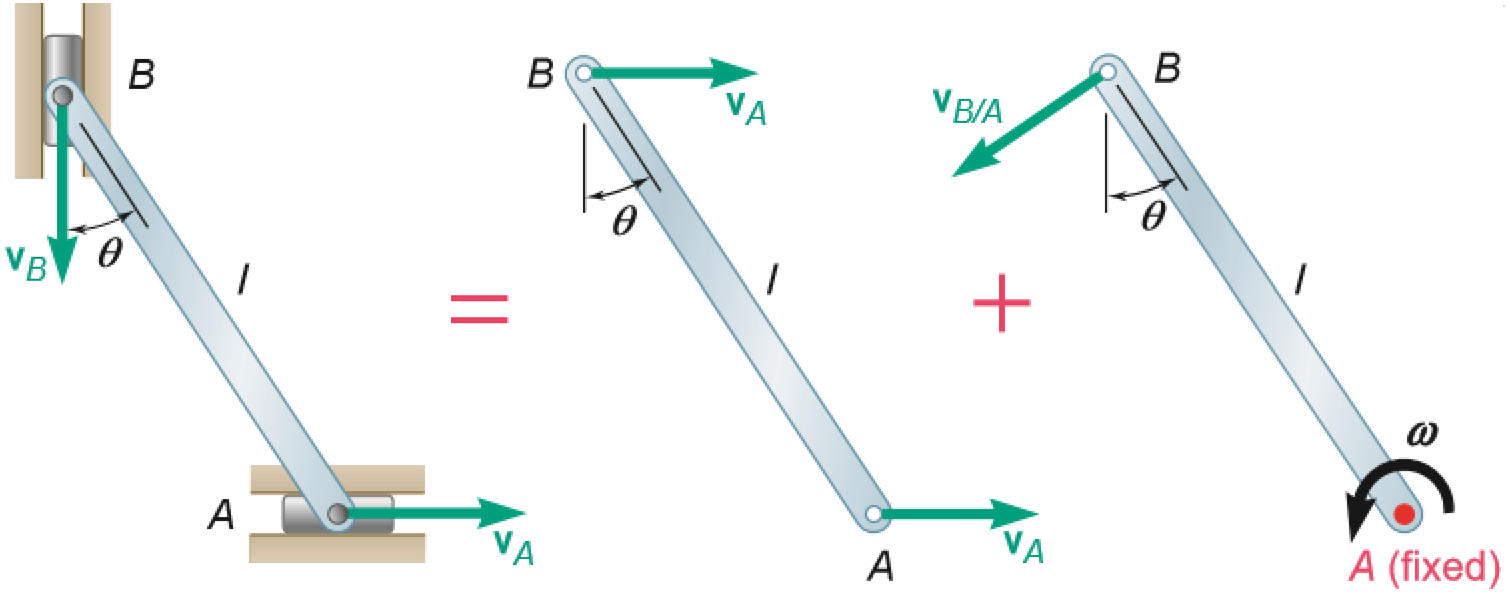
Κίνηση στο επίπεδο

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

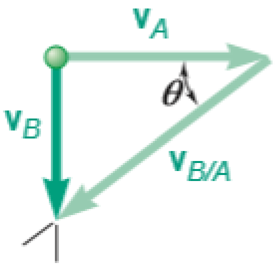
Παραδείγματα

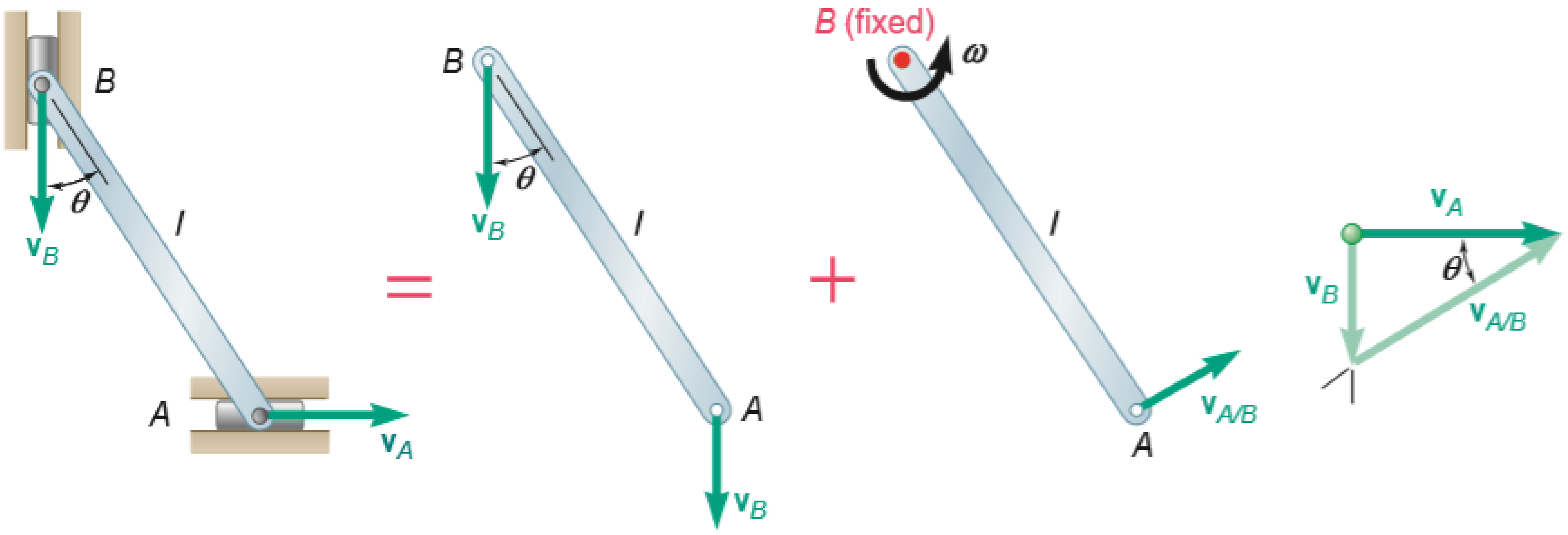


$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathrm{v}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

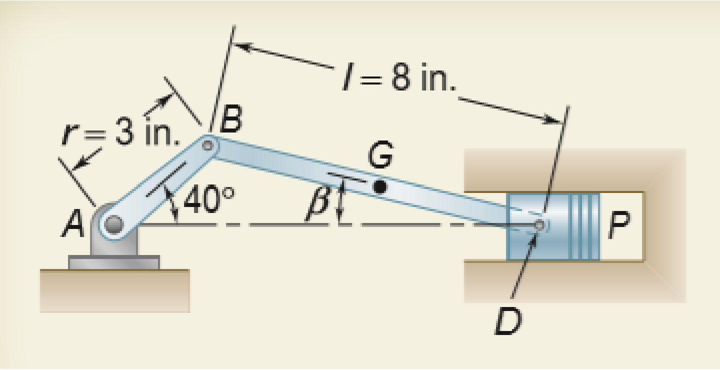
$$v_B = v_A \tan \mathrm{u} \qquad \mathrm{v} = \frac{v_{B/A}}{l} = \frac{v_A}{l \cos \mathrm{u}}$$





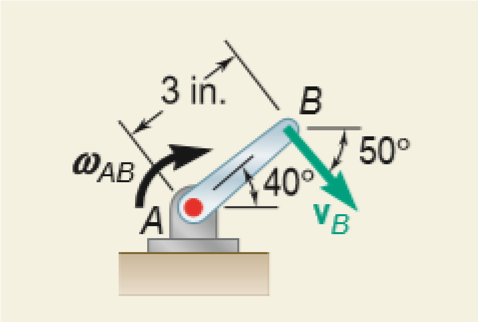
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

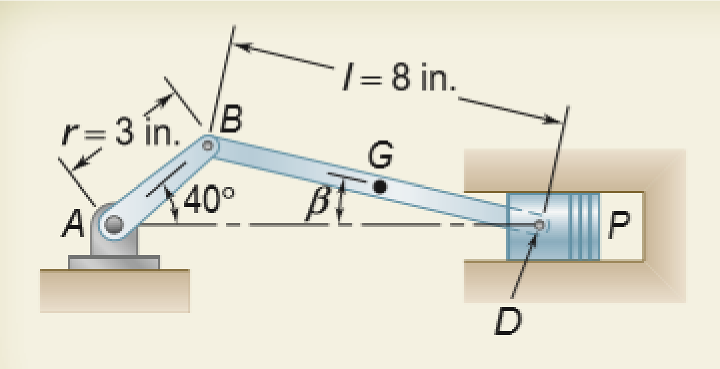
Άσκηση 1



Ωρολογιακή περιστροφή της AB με ω=2000 rpm
Να βρεθούν:
(α) η γωνιακή ταχύτητα της BD
(β) η ταχύτητα του πιστονιού P

Βήμα 1ο μετατροπή μεγεθών και υπολογισμός γωνιών



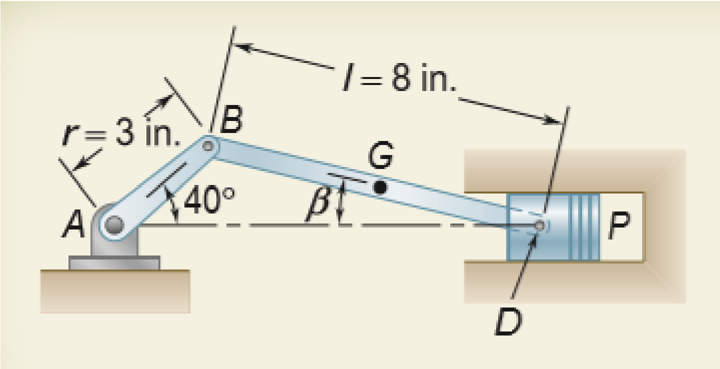


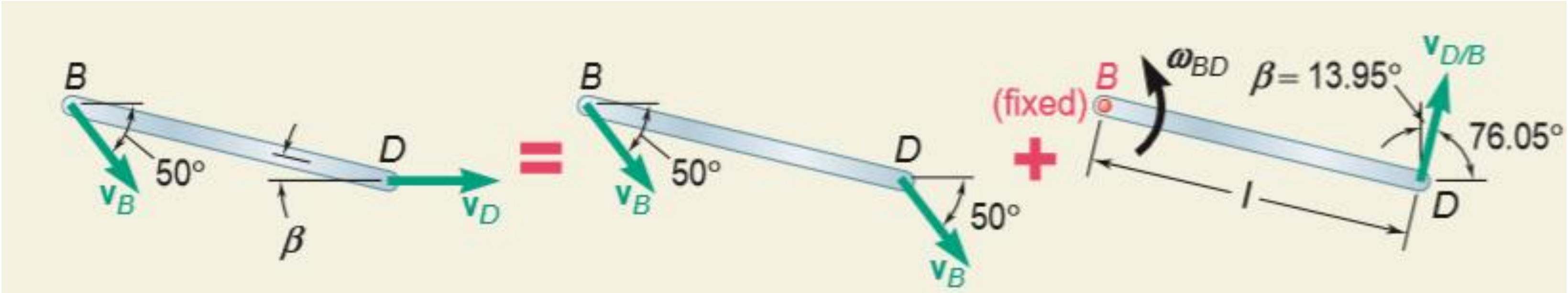
$\Omega=2\pi n/60=2*2000*\pi/60=209{,}4$ r/s
$V_B=\omega*AB=3*209{,}4=628{,}3$ in/s
$V_{Bx}=628.3*\cos 50$
$V_{By}=628.3*\sin 50$

Νόμος ημιτόνων:

$$\frac{\sin 40^\circ}{8\text{ in.}} = \frac{\sin b}{3\text{ in.}} \qquad b = 13.95^\circ$$

Γωνιακή ταχύτητα BD και ταχύτητα D





Άρα το D έχει:

Μεταφορά:

$V_{Bx}= V_{Dx}$

$V_{By}= V_{Dy}$

Περιστροφή:

$V_{D/B}=\omega_{BD}*L_{BD}$

$V_{D/Bx}= \omega_{BD}*L_{BD} *\sin 13.95$

$V_{D/By}= \omega_{BD}*L_{BD} *\cos 13.95$

Άρα:

$V_D=V_B+ V_{D/B}$ ή

$V_{Dx}=V_{Bx}+ V_{D/Bx}$

$V_{Dy}=V_{By}+ V_{D/By}$

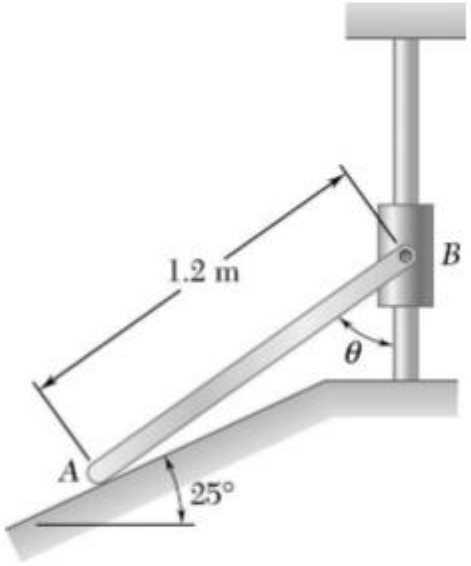
Όμως

$V_{Dy}=0 \Rightarrow \omega_{BD}=.....$

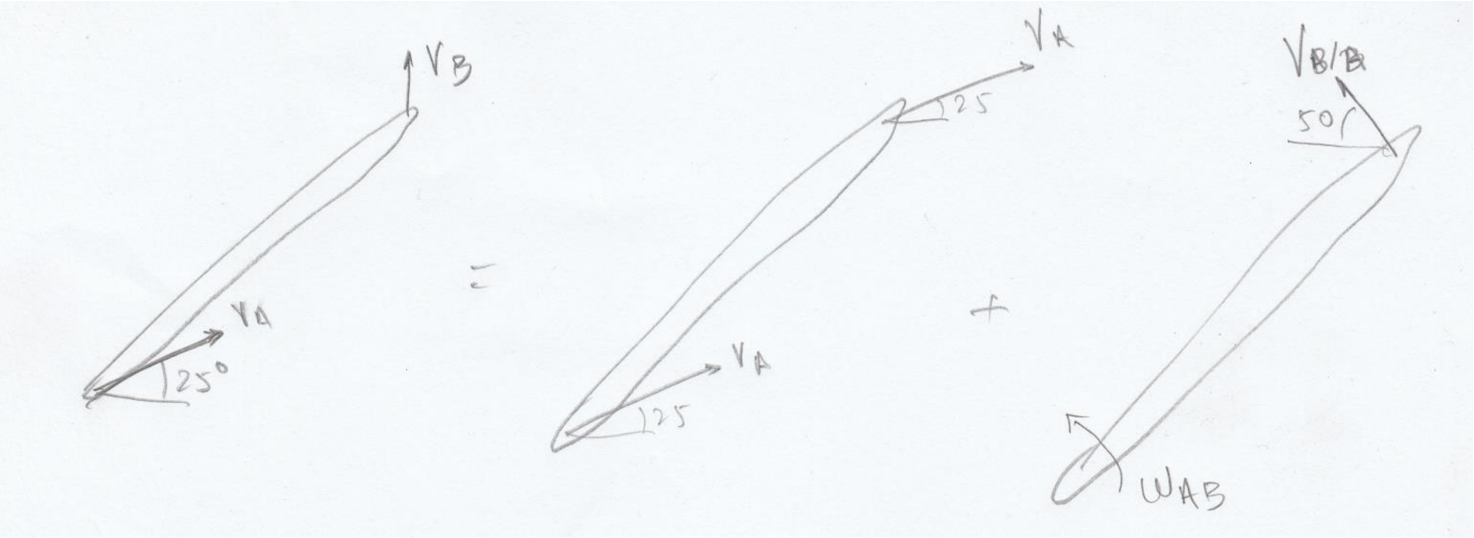
Και συνεπώς

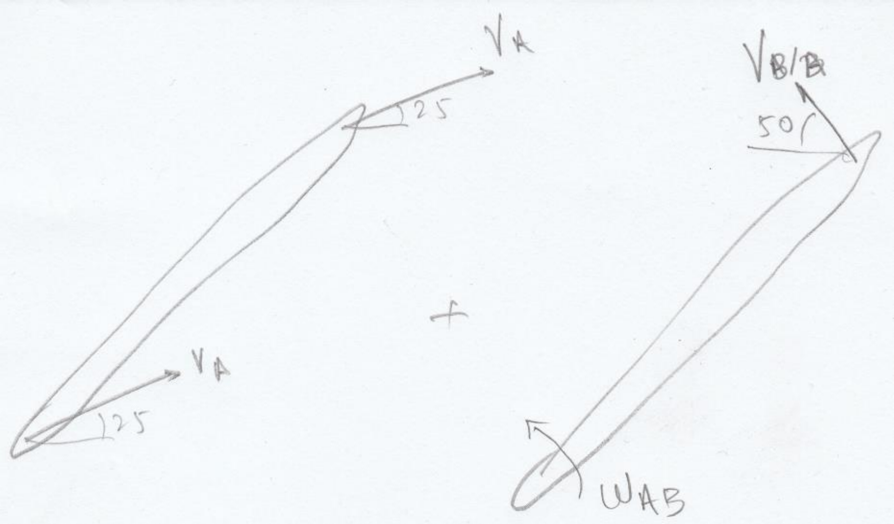
$V_{Dx}=......$

Άσκηση 2η



Το κολάρο B κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω 1.5m/s. Αν θ=50ο να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της AB και η ταχύτητα του A





$$V_{A_x} = V_A \cos 25^\circ$$

$$V_{A_y} = V_A \sin 25^\circ$$

$$V_{B/A} = \omega_{AB} \cdot L_{AB}$$

$$V_{B/A_x} = -\omega_{AB} L_{AB} \cos 50$$

$$V_{B/A_y} = \omega_{AB} L_{AB} \sin 50$$

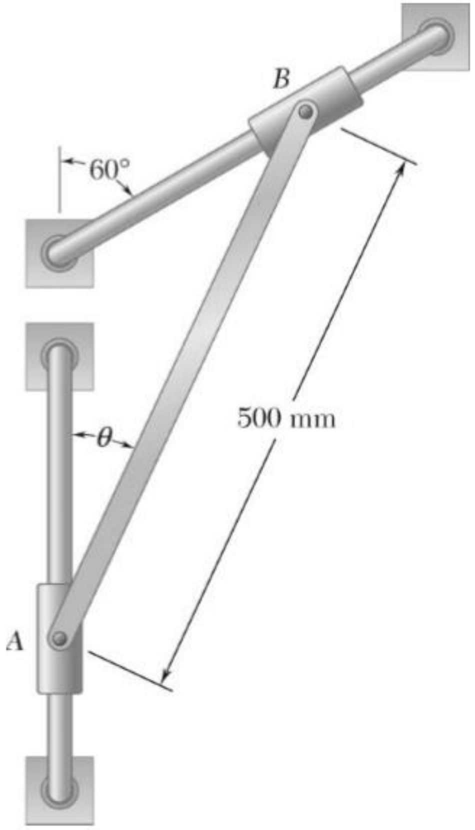
$$V_{B} = V_A + V_{B/A} \longrightarrow$$

$$V_{Bx} = V_{Ax} + V_{B/Ax} = 0$$

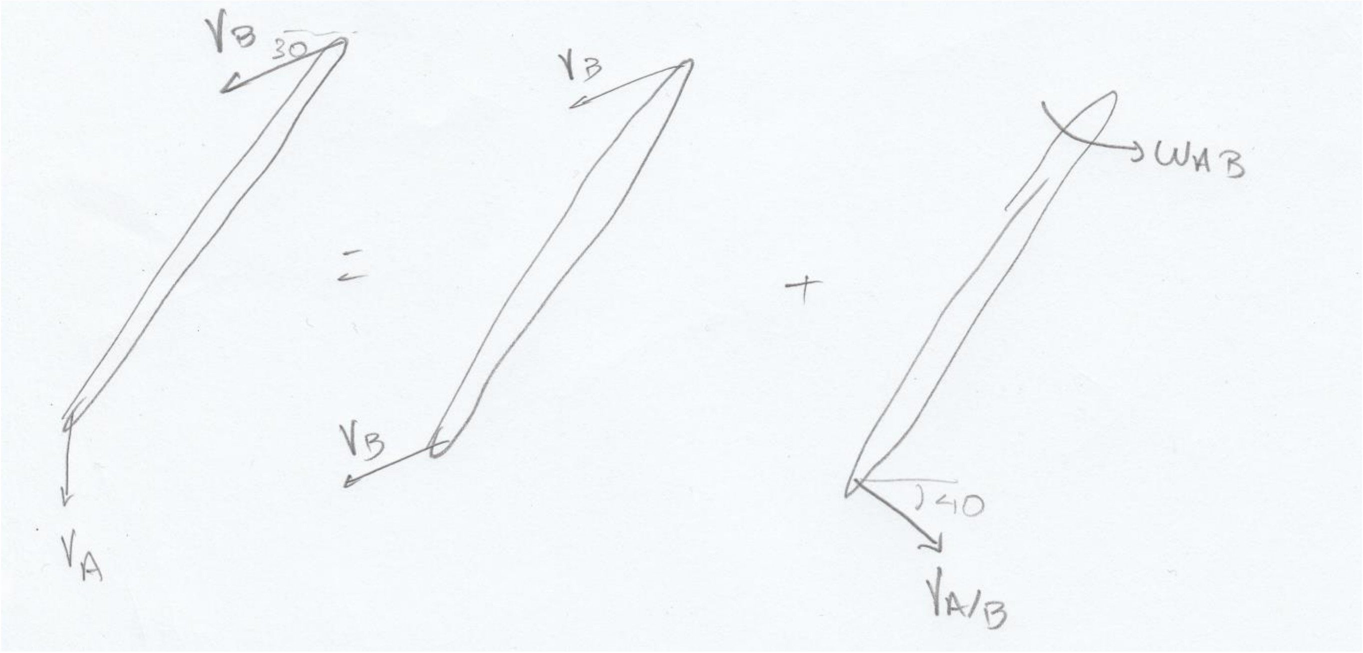
$$V_{By} = V_{Ay} + V_{B/Ay} = 1,5 \ m/s$$

$$A_{p\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{AB} = --- \\ V_A = ---- \end{cases}$$

Άσκηση 3η



Το κολάρο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα αριστερά 1.6m/s. Αν θ=40° να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της ΑΒ και η ταχύτητα του Α



$$V_{Bx} = -V_B \cos 30$$

$$V_{By} = -V_B \sin 30$$

$$V_{A/B} = \omega_{AB} L_{AB}$$

$$V_{A/Bx} = \omega_{AB} L_{AB} \cos 40$$

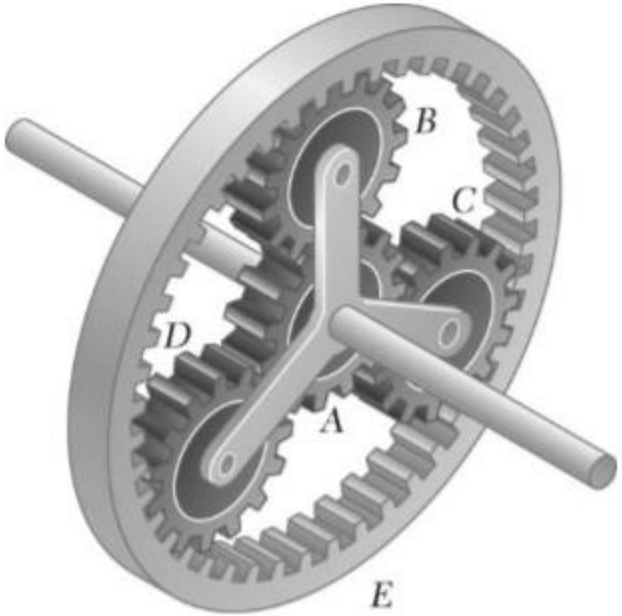
$$V_{A/By} = -\omega_{AB} L_{AB} \sin 40$$

$$V_A = V_B + V_{A/B}$$

$$V_{Ax} = V_{Bx} + V_{A/Bx} = 0 \rightsquigarrow \omega_{AB}$$

$$V_{Ay} = V_{By} + V_{A/By} = \dots$$

Πλανητικό σύστημα



Η ακτίνα όλων των γραναζιών είναι και του εξωτερικού 3α. Η γωνιακή ταχύτητα του Α είναι γνωστή και ωρολογιακή σε φορά και το εξωτερικό γρανάζι είναι ακίνητο.

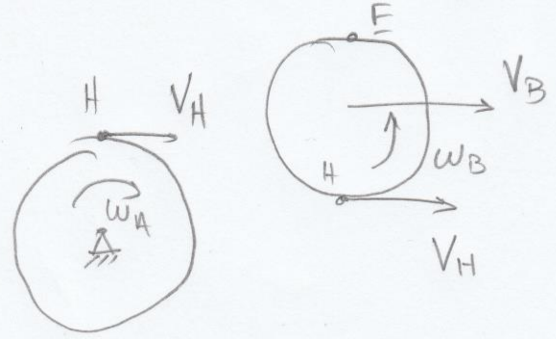
Ποια η γωνιακή ταχύτητα του κάθε γραναζιού

Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου σύνδεσης

$V_E = 0$ σταθερο

κινηση B, C, D ιδια λογω συνδεσης

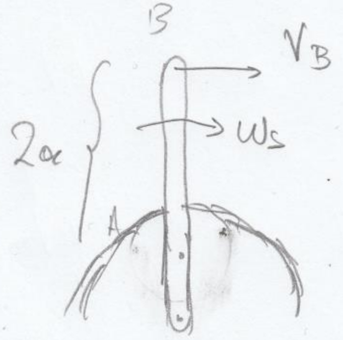
Εστω H σημειο επαφης των A, B



$$\left.\begin{aligned} V_H &= a\cdot\omega_A \\ V_{A/E} &= \omega_B\cdot 2a \end{aligned}\right\} \quad V_H = \cancel{V_E}^{\,\phi} + V_{H/E} \longrightarrow \omega_B = \frac{1}{2}\,\omega_A$$

$$\left.\begin{aligned} V_B &= V_E + V_{B/E} \\ V_{B/E} &= a\cdot\omega_B = \frac{1}{2}\,a\,\omega_A \end{aligned}\right\} \quad V_B = 0 + \frac{1}{2}\,a\,\omega_A$$

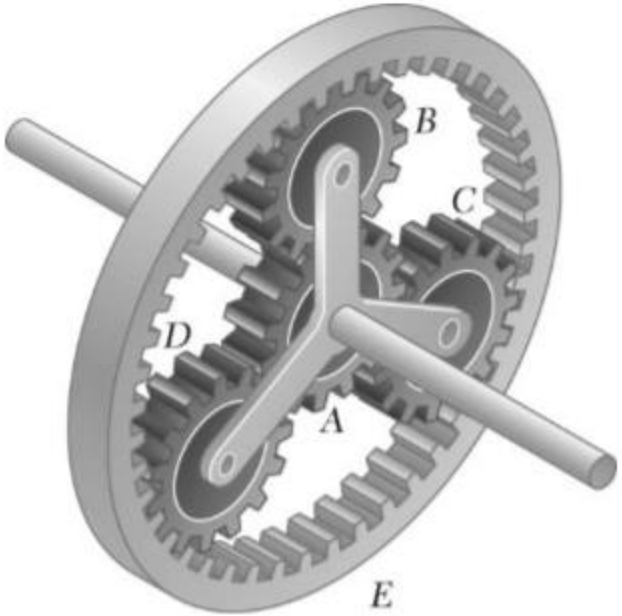
Συνδεση



$$v_B = 2a \cdot w_s \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} a \, w_A = 2a \cdot w_s \longrightarrow w_s = \frac{1}{4} w_A$$

Πλανητικό σύστημα 2



Η ακτίνα όλων των γραναζιών είναι και του εξωτερικού 3^{α}. Η γωνιακή ταχύτητα του E είναι γνωστή (180 rpm) και ωρολογιακή σε φορά και το γρανάζι Α έχει επίσης γνωστή γωνιακή ταχύτητα επίσης ωρολογιακή (240 rpm).

Ποια η γωνιακή ταχύτητα του κάθε γραναζιού

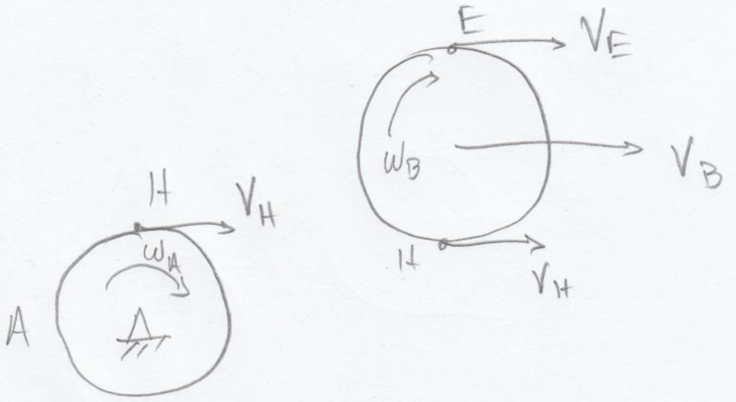
Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου σύνδεσης

Μετατροπη μοναδων

$$\omega_E = \frac{2\pi\, 180}{2} \qquad \omega_A = \frac{2\pi\, 240}{2}$$

Κινηση B, C, D ιδια λογω συνδεσης

Εστω H σημειο επαφης των A, B



$$V_E = \omega_E \cdot R_E = \omega_E \cdot 3a$$

στο A

$$V_H = a \cdot \omega_A$$

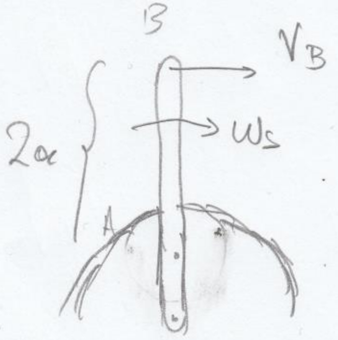
στο B

$$\left.\begin{aligned} V_H &= V_E + V_{H/E} \\ V_{H/E} &= 2a\,\omega_B \end{aligned}\right\} \; a\omega_A = 3a\omega_E + 2a\omega_B$$

$$\longrightarrow \omega_B = \dots$$

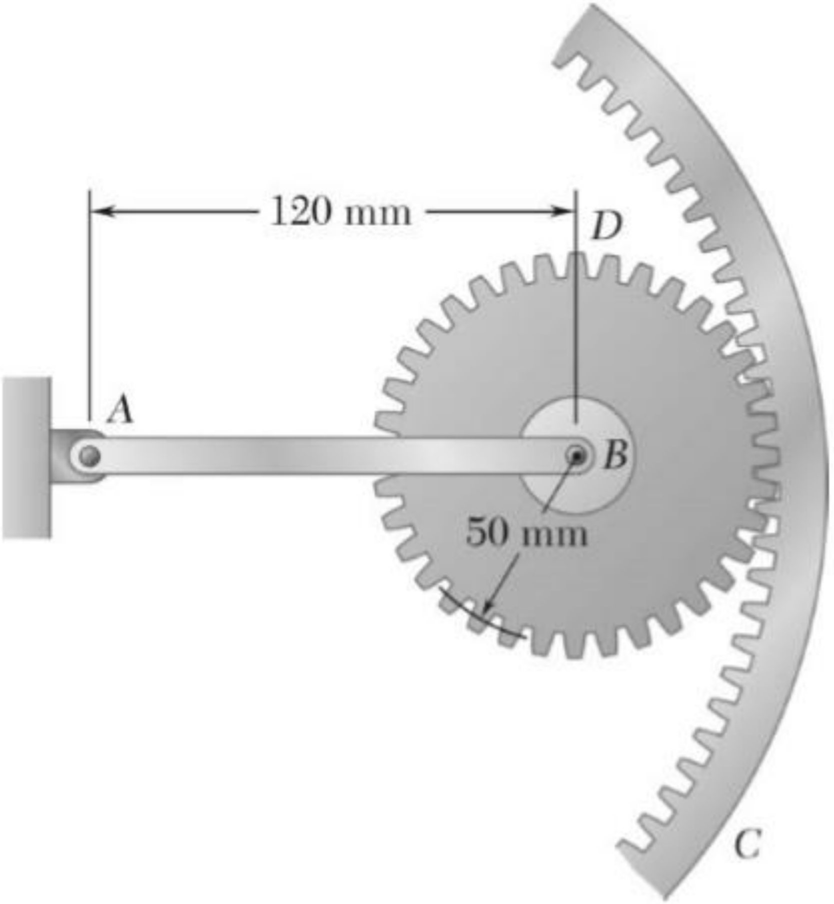
$$\left.\begin{aligned} V_B &= V_H + V_{B/H} \\ V_{B/H} &= a\,\omega_B \end{aligned}\right\} \; V_B = \dots$$

Συνδεση



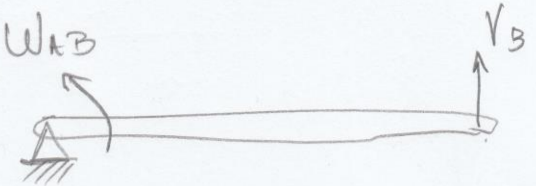
$$V_B = 2\alpha \cdot \omega_s$$

Γρανάζια και ράβδοι



Η ράβδος AB περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 20 r/s ωρολογιακά. Αν το εξωτερικό γρανάζι είναι σταθερό να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του γραναζιού B και η ταχύτητα του δοντιού στο D

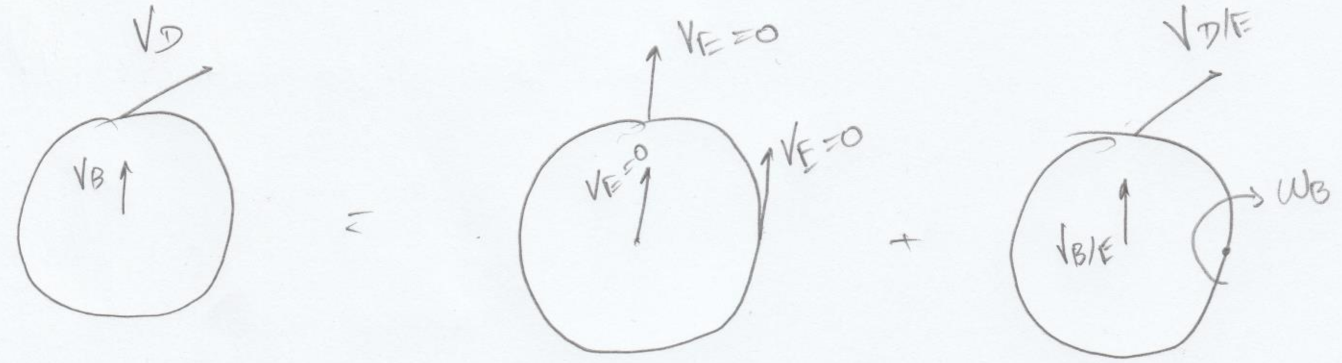
Par bJos AB



$$V_B = \omega_{AB} \cdot L_{AB}$$

Γρανάζι B

Έστω E σημείο επαφής με C



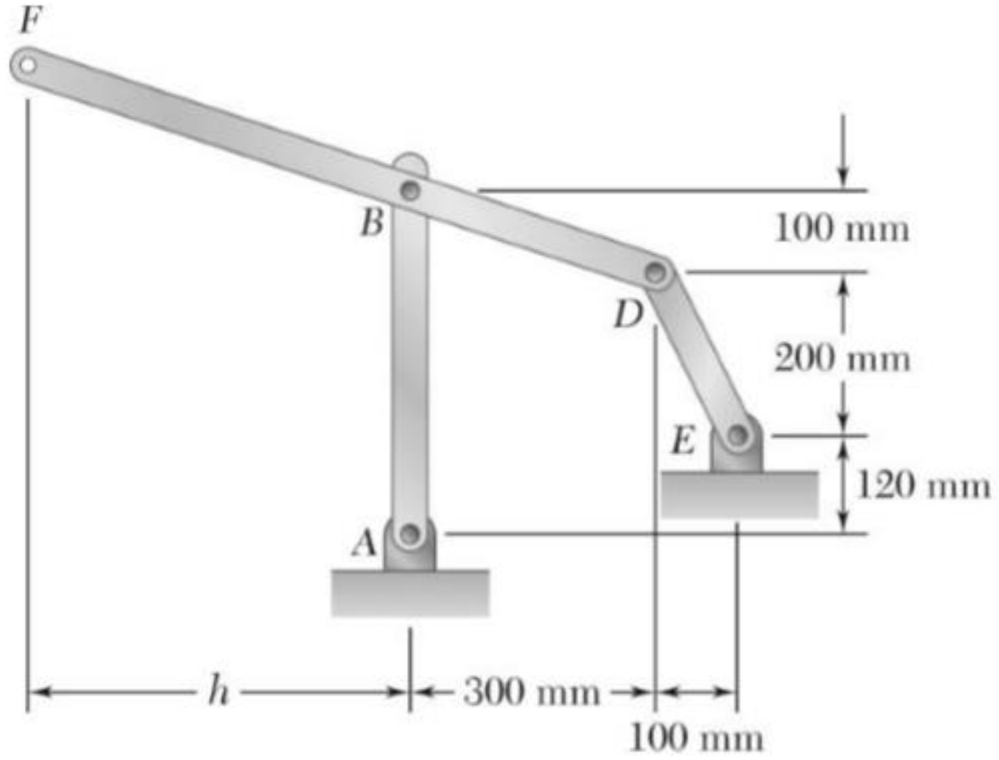
$BE = 0{,}05\,m$

$DE = 0{,}05\sqrt{2}\,m$

$$V_B = V_D + V_{B/E} = 0 + BE\,\omega_B \rightsquigarrow \omega_B = \ldots$$

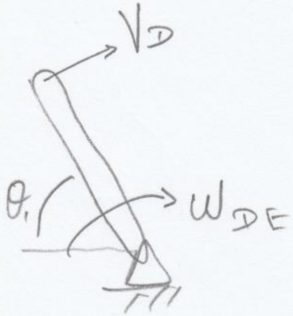
$$V_D = V_E + V_{D/E} = 0 + DE\,\omega_B \longrightarrow V_D = \ldots$$

Περισσότεροι σύνδεσμοι



Στην παρούσα θέση η ράβδος DE έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα 10r/s ωρολογιακά. Αν h=500
Ποια η γωνιακή ταχύτητα της FDB
Η ταχύτητα του F

Ράβδος DE



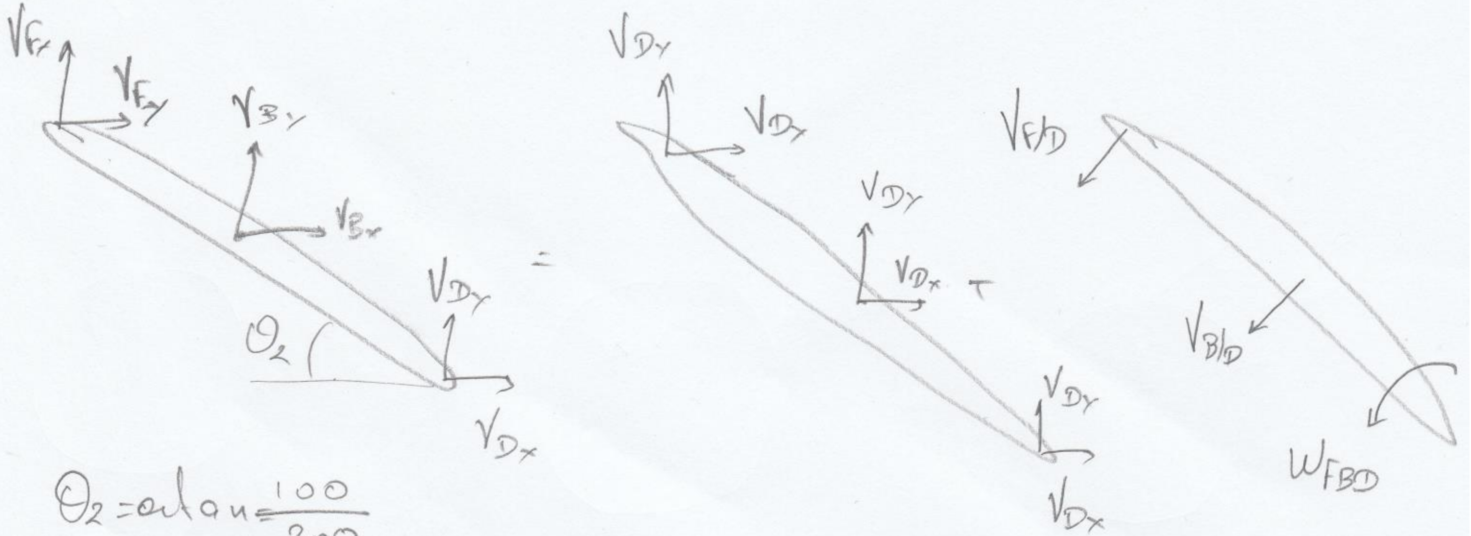
$$V_D = \omega_{DE} L_{DE}$$

$$\theta_1 = \operatorname{atan} \frac{200}{100}$$

$$V_{Dx} = +\omega_{DE} L_{DE} \cos\theta_1$$

$$V_{Dy} = \omega_{DE} L_{DE} \sin\theta_1$$

Pados FBD



$$\theta_2 = \text{atan} \frac{100}{300}$$

$$V_{B/D} = \omega_{FBD} \cdot L_{BD}$$

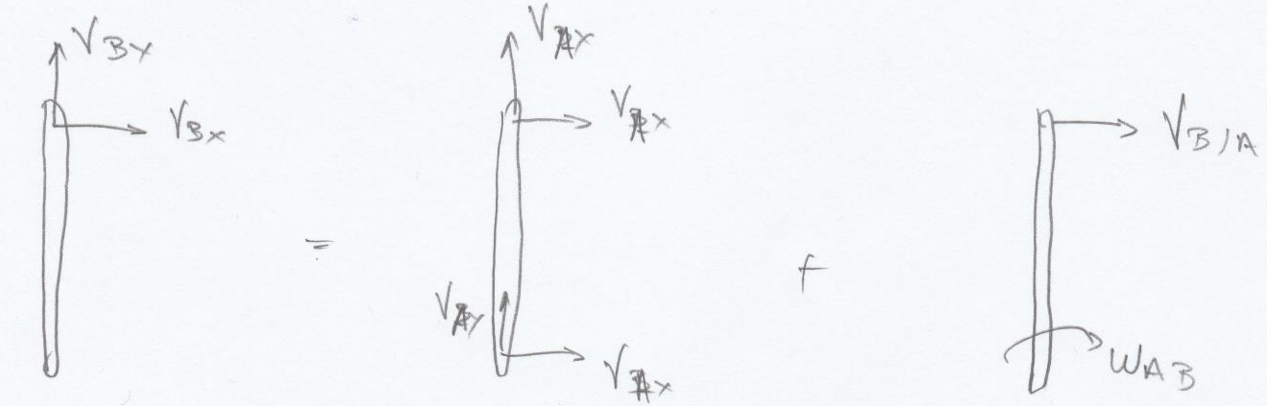
$$V_{B/Dx} = \omega_{FBD} L_{BD} \cos\theta_2$$

$$V_{B/Dy} = \omega_{FBD} L_{BD} \sin\theta_2$$

$$V_{Bx} = V_{Dx} + V_{B/Dx}$$

$$V_{By} = V_{Dy} + V_{B/Dy} \quad (1)$$

Pablos AB



$V_{B/A} = \omega_{AB} L_{AB}$

$V_B = V_A + V_{B/A}$

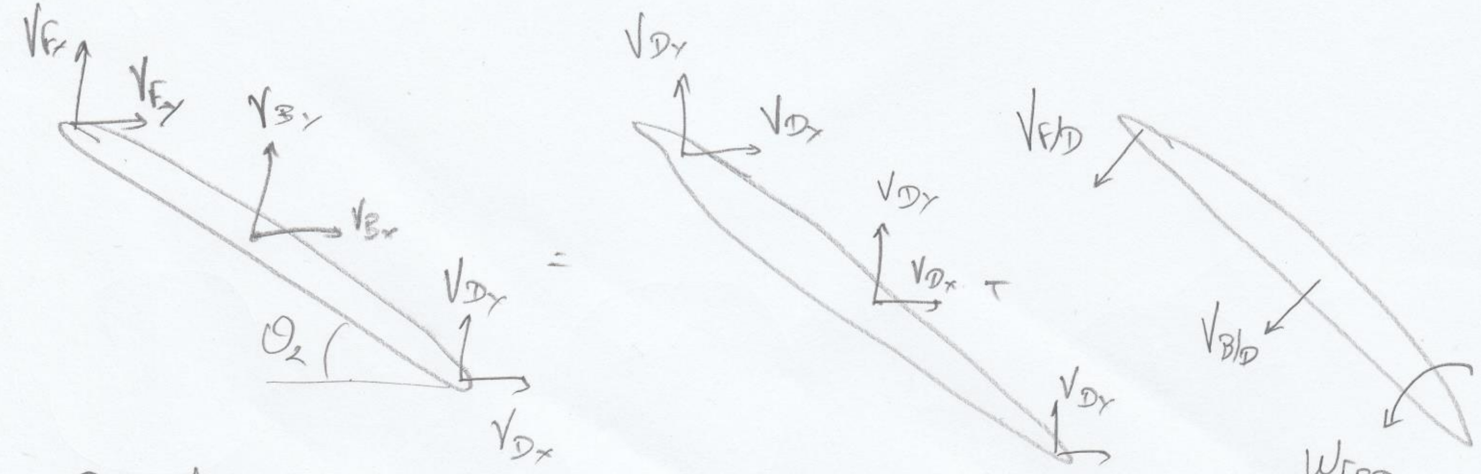
$V_{By} = 0 + 0$

$V_{Bx} = 0 + V_{B/A}$ 2

Από σχέσεις 1, 2 $\longrightarrow$ ω_{BD}

ω_{AB}

Ραδος FBD



$$\theta_2 = \operatorname{atan}\frac{100}{300}$$

Αρα πισω στην FBD

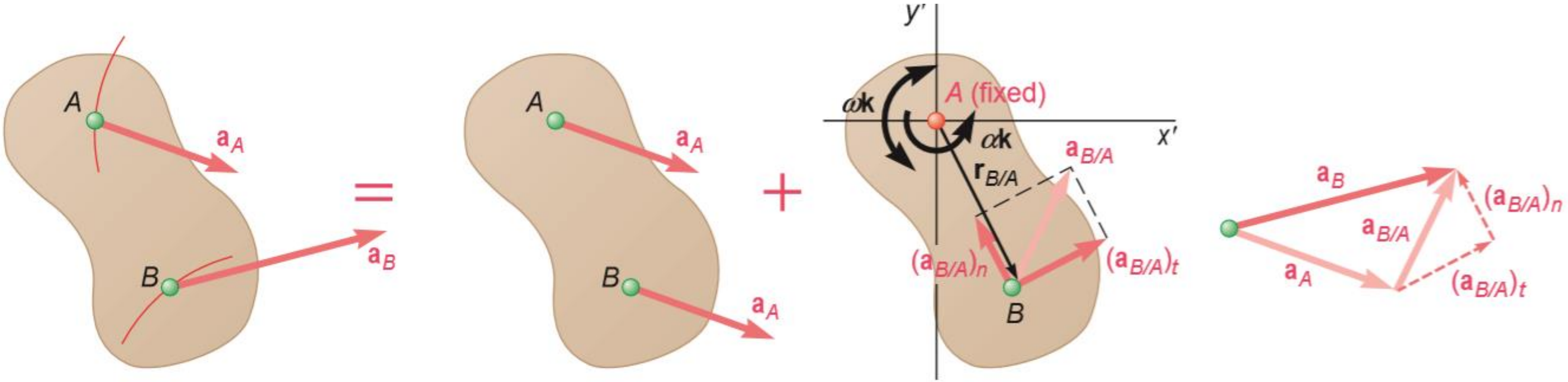
$$V_{Fx} = V_{Dx} + V_{F/Dx}$$

$$V_{Fy} = V_{Dy} + V_{F/Dy}$$

$$V_{F/Dy} = \omega_{FBD} \cdot L_{FD}$$

Επιταχύνσεις

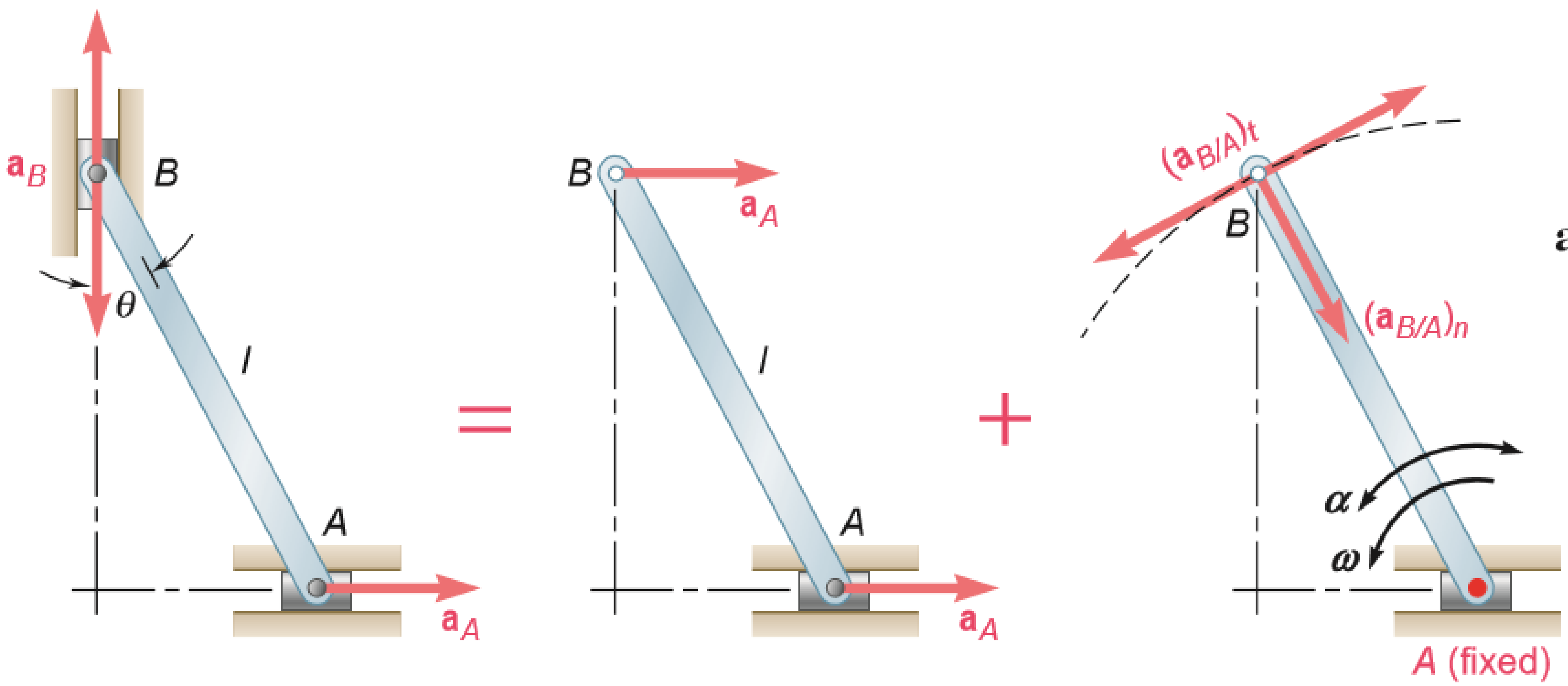
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$



$$(\mathbf{a}_{B/A})_t = \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$(\mathbf{a}_{B/A})_n = -\omega^2\mathbf{r}_{B/A}$$

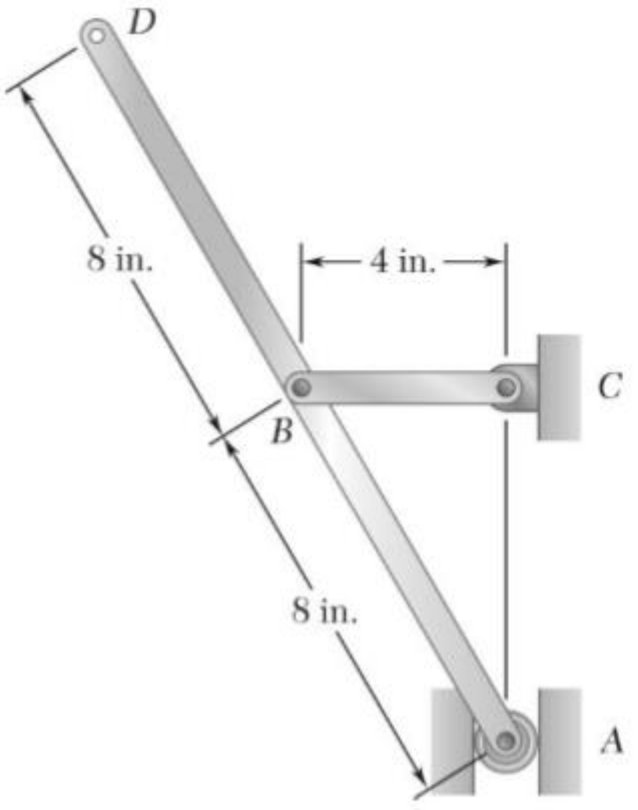
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$$

Παράδειγμα



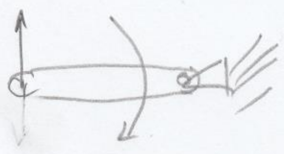
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$= \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_n + (\mathbf{a}_{B/A})_t$$

Άσκηση 1η



Αν η ράβδος BC έχει ταχύτητα (γωνιακή) 45rpm ωρολογιακά να βρεθεί η επιτάχυνση του σημείου A και D

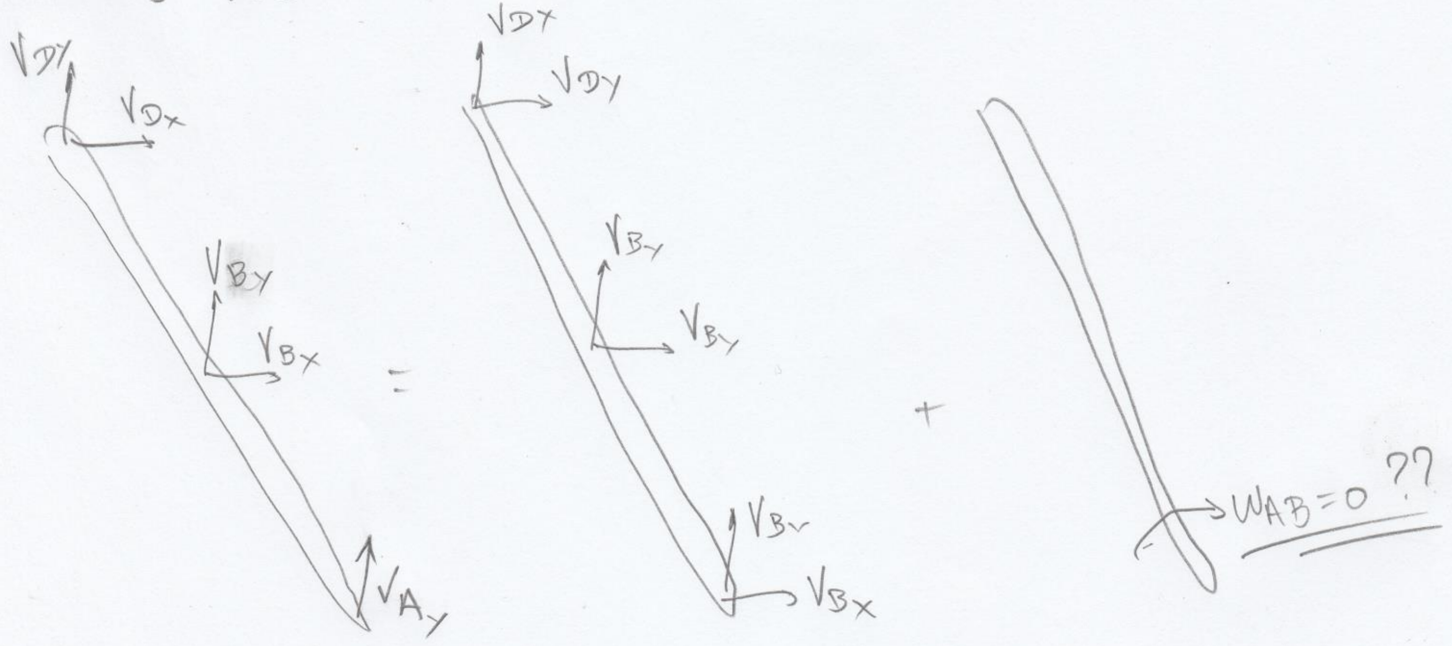
Parafuso BC



$$\omega_{BC} = \frac{2\pi\, 40}{60}$$

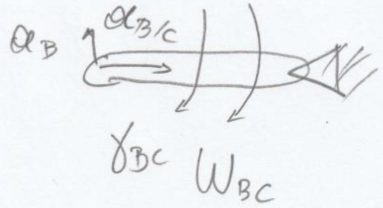
$$V_B = \omega_{BC} \cdot L_{BC}$$

Partes AD



Επιταχυνσεις.

BC



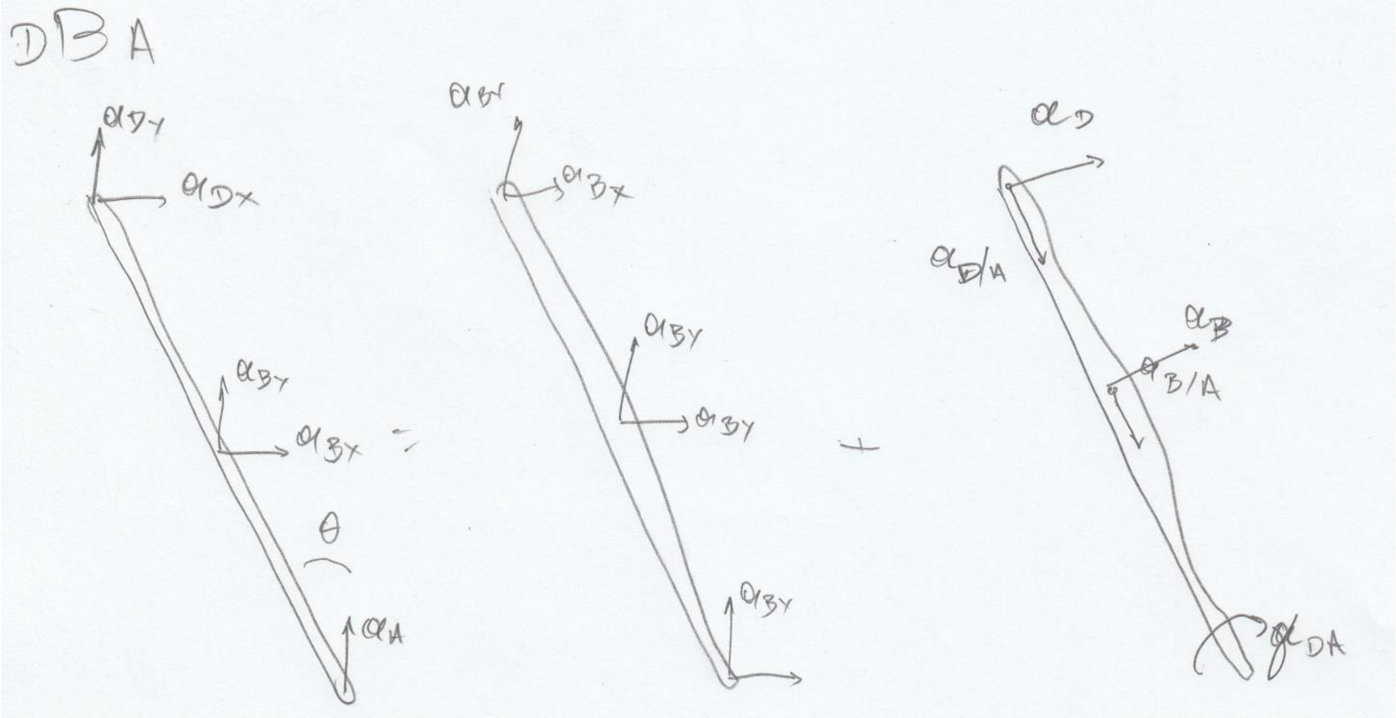
$a_B = 0$ γιατι??

$\gamma_{BC} = 0$

$a_{B/C} = \omega_{BC}^2 \cdot L_{BC}$ (κεντρομολος)

αρα $a_{By} = 0 = a_B$

$a_{Bx} = a_{B/C} = \omega_{BC}^2 \cdot L_{BC}$


DBA
a_{Dy}
a_{Dx}
a_{By}
a_{Bx}
=
θ
a_A
a_{By}
a_{Bx}
a_{By}
a_{By}
a_{By}
+
a_D
$a_{D/A}$
a_B
$a_{B/A}$
α_{DA}

a_{Bx}

$\theta = \operatorname{asin} \frac{4}{8}$

$$\left.\begin{aligned} a_{B/A} &= \omega_{AD}^2 \cdot L_{AD} \\ a_{D/A} &= \omega_{AD}^2 L_{AD} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_{B/Ax} &= +a_{B/A} \sin\theta_1 \\ a_{B/Ay} &= -a_{B/A} \cos\theta_1 \\ a_{D/Ax} &= +a_{D/A} \sin\theta_1 \\ a_{D/Ay} &= -a_{D/A} \cos\theta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_B &= \gamma_{DA} \cdot L_{BA} \\ a_D &= \gamma_{DA} L_{DA} \end{aligned} \quad \left\{\begin{aligned} a_{Bx} &= \gamma_{DA} L_{BA} \cos\theta_1 \\ a_{By} &= \gamma_{DA} L_{BA} \sin\theta_1 \\ a_{Dx} &= \gamma_{DA} L_{BA} \cos\theta_1 \\ a_{Dy} &= \gamma_{DA} L_{BA} \sin\theta_1 \end{aligned}\right.$$

Αρα στο B

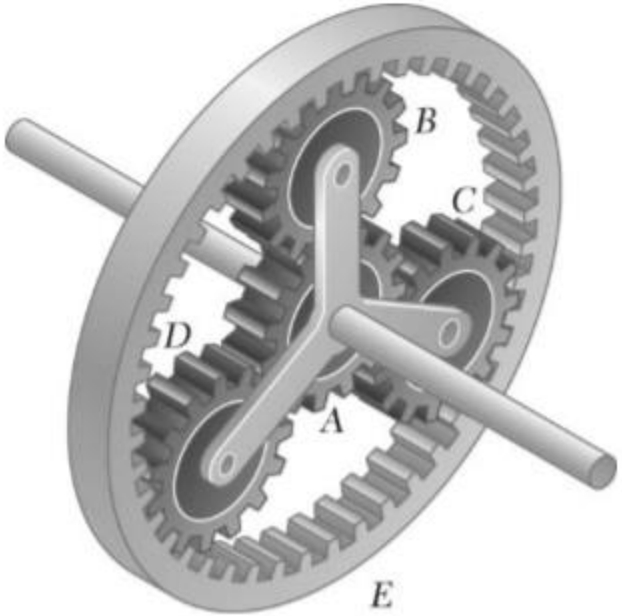
$$a_B = a_A + a_{B/A} \quad \begin{cases} x-x & a_{Bx} = \omega_{BC}^2 L_{BC} \rightarrow a_A. \\ & \rightarrow \\ y-y & a_{By} = 0 \qquad \gamma_{AD} = \dots \end{cases}$$

γιατί $\underline{a_y = 0}$!?

6-20 D

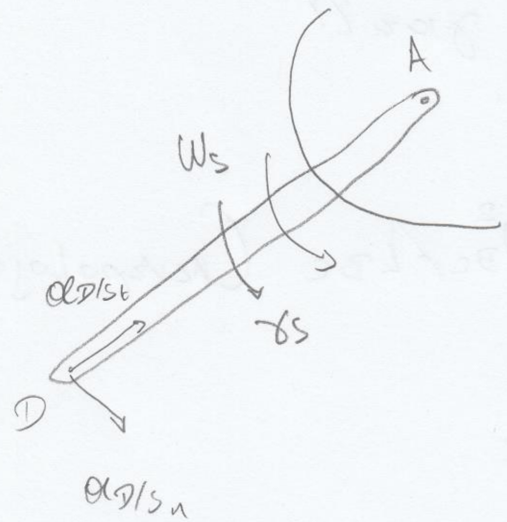
$$a_D = a_A + a_{DA} \quad \begin{cases} x-x & a_{Dy} \\ y-y & a_{Dy} \end{cases}$$

Πίσω στα πλανητικά



Η ακτίνα όλων των γραναζιών είναι και του εξωτερικού 3α. Η γωνιακή ταχύτητα του Α είναι γνωστή και ωρολογιακή σε φορά και το εξωτερικό γρανάζι είναι ακίνητο.
Ποια η επιτάχυνση του δοντιού D όταν είναι σε επαφή με το γρανάζι (α) A (β) E

Συνδεσμος



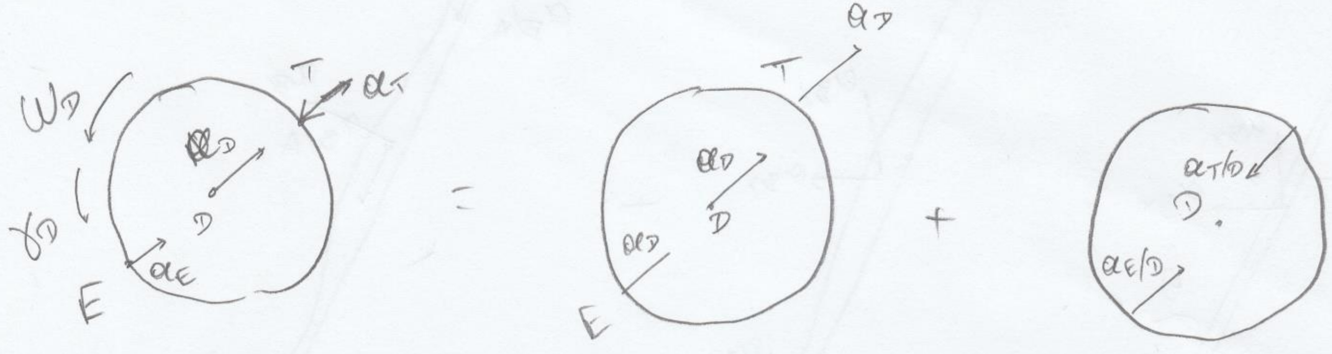
W_s = γνωστο

$\gamma_s = 0$ (γιατι??)

$\alpha_{D/S_n} = 0$

$\alpha_{D/S_t} = W_s^2 \cdot 2\alpha$

Γρανάζι D



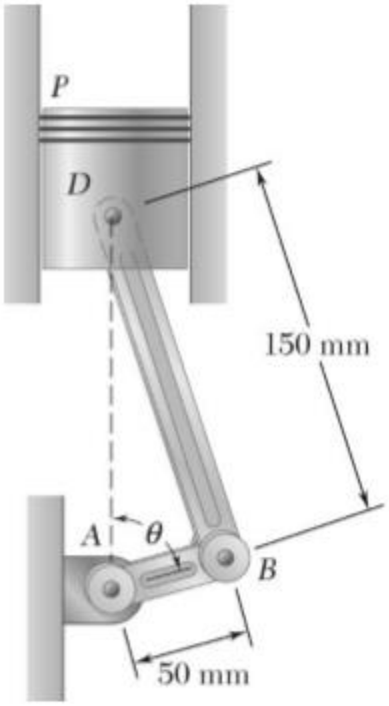
γιατί Ø οι περιφερειακής ταχ. ??
δόντι T (επαφή με γρανάζι A)

$$a_T = a_D + a_{T/D} = a_D - \omega_D^2 a \longrightarrow a_T$$

δοντι Ε

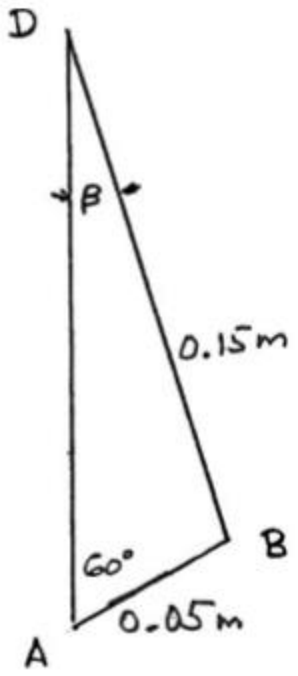
$$a_E = a_D + a_{E/D} = a_D + \omega_D^2 a$$

Έμβολο διωστήρας



Γνωρίζοντας ότι η AB περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα   ωρολογιακά να βρεθεί η επιτάχυνση του εμβόλου στο Θ=60^o

Ταχύτητες



$$\frac{\sin\beta}{0.05} = \frac{\sin 60^\circ}{0.15} \qquad \beta = 16.779^\circ$$

$$\omega_{AB} = 900 \text{ rpm} = 30\pi \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{v}_B = 0.05\omega_{AB} = 1.5\pi \text{ m/s} \quad 60^\circ$$

$$\mathbf{v}_D = v_D \downarrow \qquad \omega_{BD} = \omega_{BD}$$

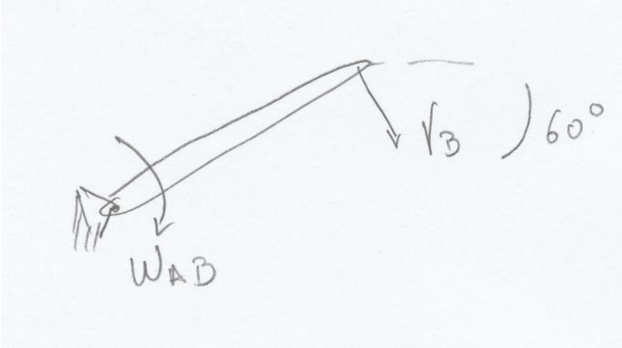
$$\mathbf{v}_{D/B} = 0.15\,\omega_{BD} \quad \beta$$

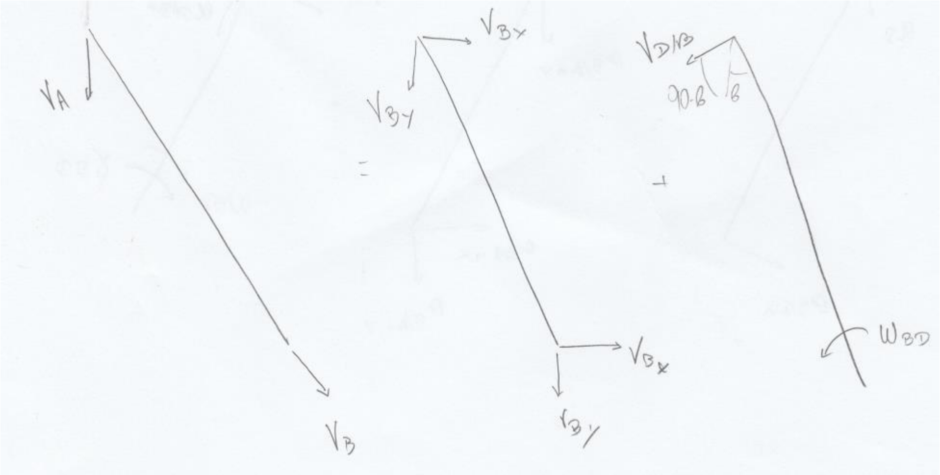
$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B}$$

$$[v_D \downarrow] = [1.5\pi \quad 60^\circ] + [0.15\omega_{BD} \quad \beta]$$

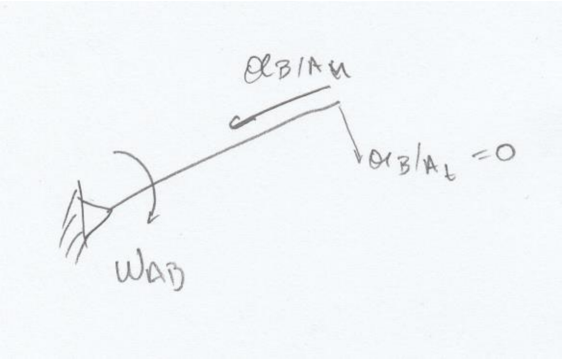
$$0 = 1.5\pi\cos 60^\circ - 0.15\omega_{BD}\cos\beta$$

$$\omega_{BD} = \frac{1.5\pi\cos 60^\circ}{0.15\cos\beta} = 16.4065 \text{ rad/s}$$





Επιταχύνσεις



$$\alpha_{AB} = 0$$

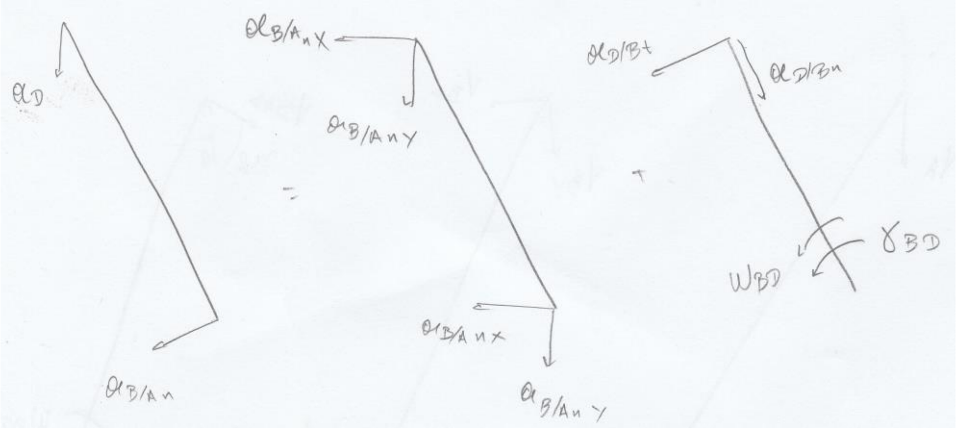
$$\mathbf{a}_B = 0.05\omega_{AB}^2 = (0.05)(30\pi)^2 = 444.13 \text{ m/s}^2 \swarrow 30^\circ$$

$$\mathbf{a}_D = a_D \downarrow \qquad \alpha_{BD} = \alpha_{BD} \circlearrowright$$

$$\mathbf{a}_{D/B} = [0.15\alpha_{AB} \measuredangle \beta] + [0.15\omega_{BD}^2 \searrow \beta]$$

$$= [0.15\alpha_{BD} \measuredangle \beta] + [40.376 \searrow \beta]$$

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D/B} \qquad \text{Resolve into components.}$$



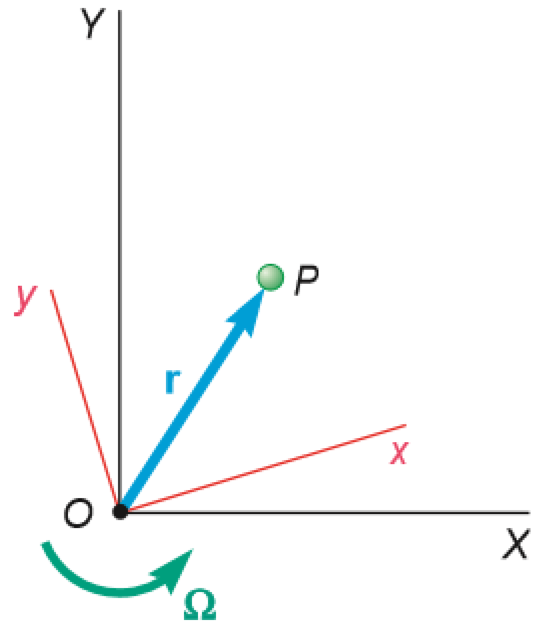
$$\xrightarrow{+}: \quad 0 = -444.13 \cos 30^\circ + 0.15\alpha_{BD} \cos \beta + 40.376 \sin \beta$$

$$\alpha_{BD} = 2597.0 \text{ rad/s}^2$$

$$+\downarrow: \quad a_D = 444.13 \sin 30^\circ - (0.15)(2597.0) \sin \beta + 40.376 \cos \beta$$

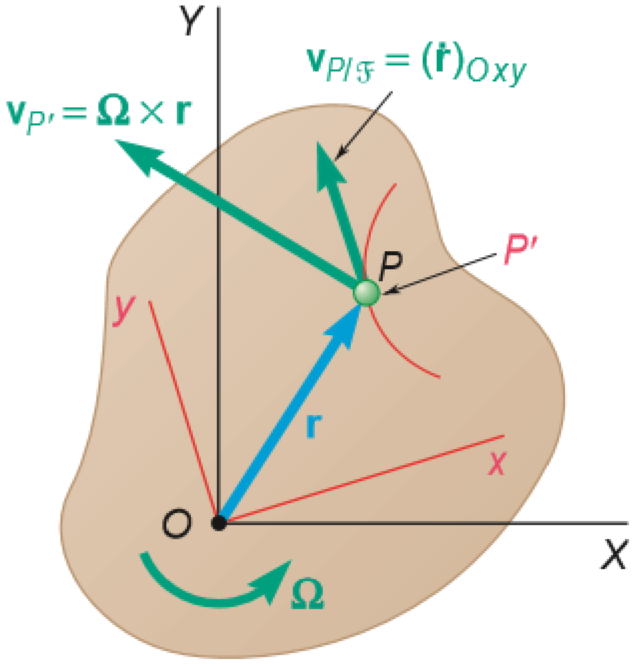
$$= 148.27 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_P = \mathbf{a}_D \qquad \mathbf{a}_P = 148.3 \text{ m/s}^2 \downarrow$$

Επιτάχυνση Coriolis



$$\mathbf{v}_P = (\dot{\mathbf{r}})_{OXY} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$$

Σε στερεό σώμα



$$\boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}}$$

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}]$$

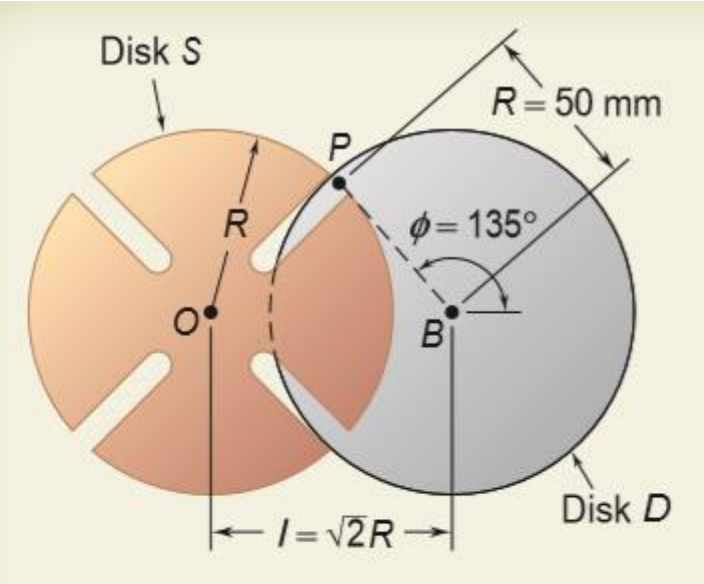
$$\frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}] = (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxy} + \mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$$

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} + (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxy}}$$

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c}$$

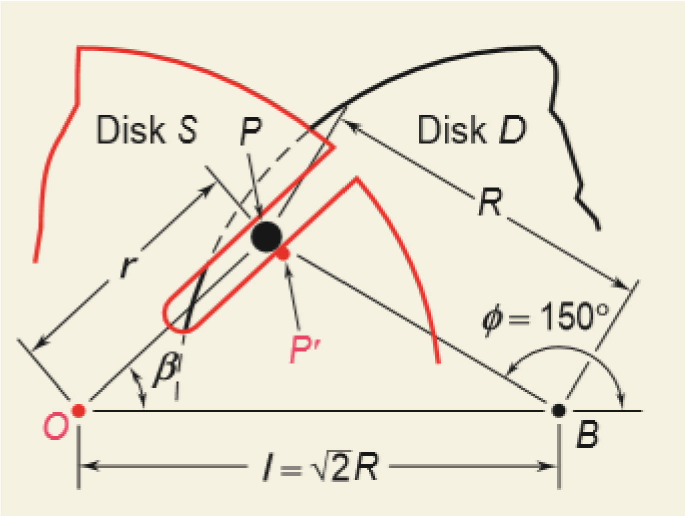
$$\mathbf{a}_c = 2\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} = 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$$

Μηχανισμός της Γενεύης



Ο δίσκος D περιστρέφεται ανθωρολογιακά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 10r/s. Ο πείρος P είναι κολλημένος στον D και γλιστρά στις εσοχές του δίσκου S. Θεωρείται ότι η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου S είναι 0 όταν ο πείρος μπαίνει ή βγαίνει από μια εσοχή. Για γωνία $\phi=150^o$ να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου S και η επιτάχυνση του πείρου

Βήμα 1ο θέση πείρου



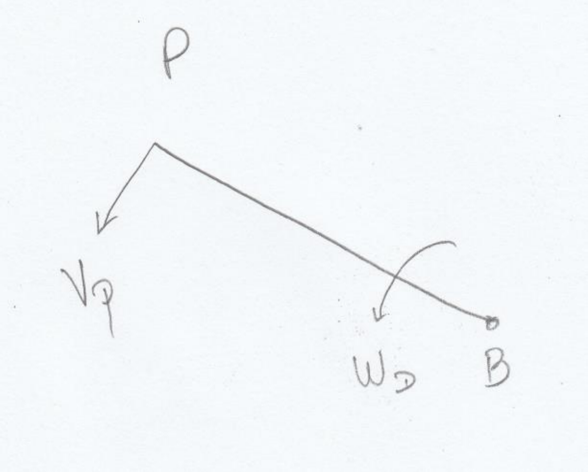
$$r^2 = R^2 + l^2 - 2Rl \cos 30° = 0.551R^2 \qquad r = 0.742R = 37.1 \text{ mm}$$

$$\frac{\sin b}{R} = \frac{\sin 30°}{r} \qquad \sin b = \frac{\sin 30°}{0.742} \qquad b = 42.4°$$

Ταχύτητα πείρου

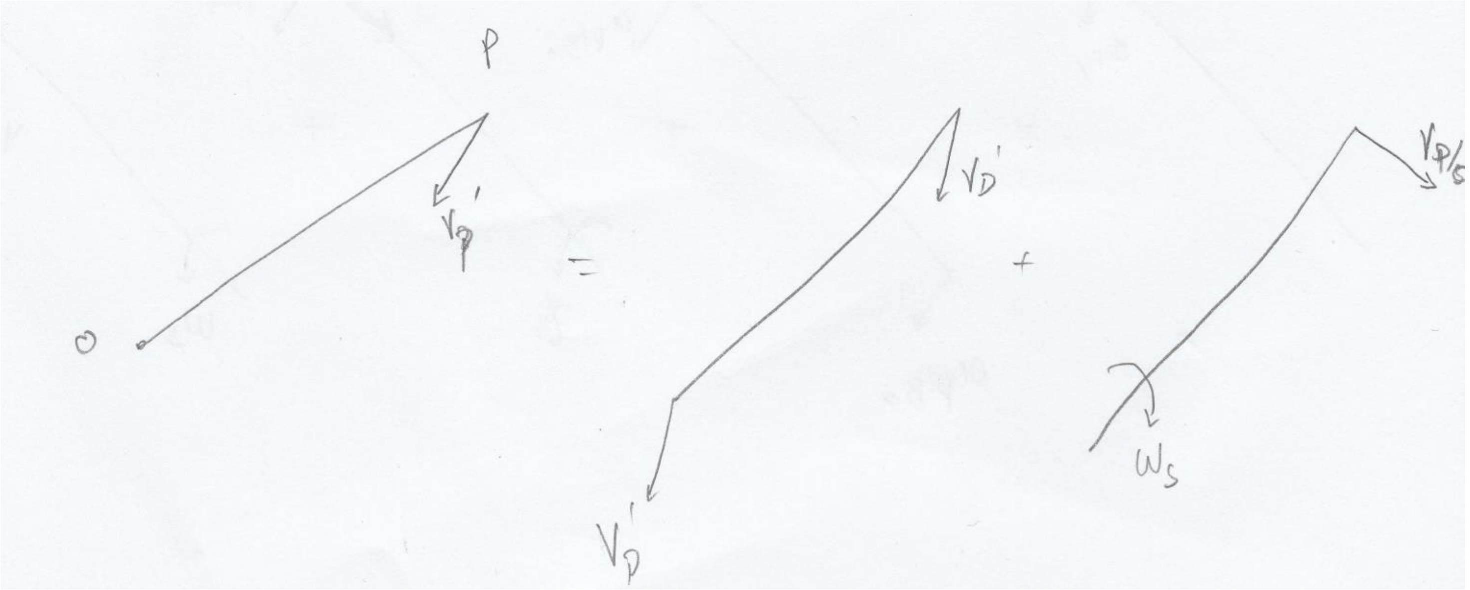
Ο πείρος είναι κολλημένος στον δίσκο D άρα

$$v_P = R\mathbf{v}_D = (50\text{ mm})(10\text{ rad/s}) = 500\text{ mm/s}$$



Κίνηση πείρου σε εσοχή

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{S}}$$



Επιτάχυνση πείρου

$$a_P = R\mathrm{v}_D^2 = (500 \text{ mm})(10 \text{ rad/s})^2 = 5000 \text{ mm/s}^2$$