Ανάλυση θέσης συνδέσεων

1. Εισαγωγή στην ανάλυση θέσης

Συχνά απαιτείται γνώση της συμπεριφοράς των συνδέσμων που αποτελούν ένα μηχανισμό σε όλο το εύρος κίνησης του. Μερικοί σημαντικοί λόγοι περιλαμβάνουν:

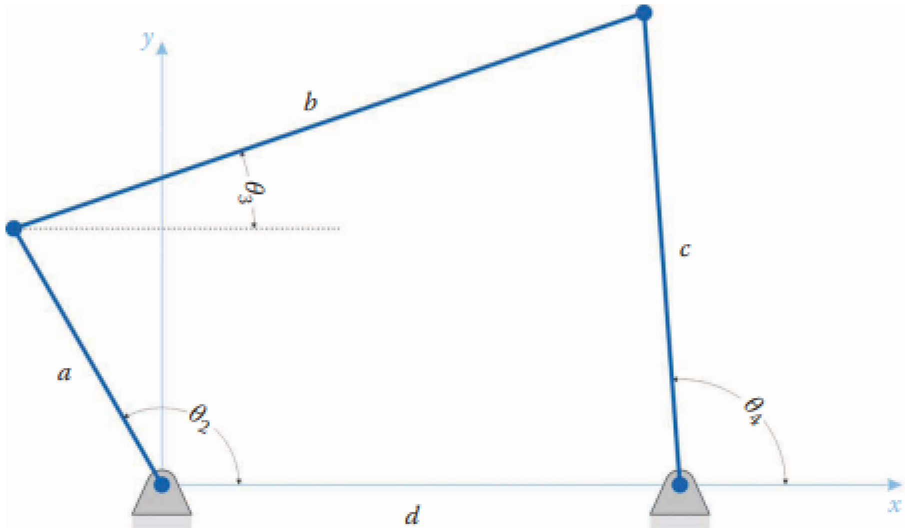
1. Ανάλυση χρονισμού Μπορεί να είναι σημαντικό να προβλεφθεί το χρονικό διάστημα που χρειάζεται ένας σύνδεσμος για να φτάσει σε κάθε καθορισμένη θέση. Η διασύνδεση με άλλα μηχανήματα, όπως γίνεται στις γραμμές συναρμολόγησης, απαιτεί συχνά ακριβή χρονισμό κάθε εξαρτήματος.
2. Πρόληψη παρεμβολών Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι συνδέσεις πρέπει να λειτουργούν σε περιορισμένο χώρο (π.χ. χώρο κινητήρα, χώρο εγκατάστασης συναρμολόγησης, κ.λπ.). Η γνώση του «φάκελου» μέσω του οποίου ταξιδεύει ένας σύνδεσμος είναι επομένως κρίσιμη. Ένας σύνδεσμος με πολύ μεγάλο φάκελο πρέπει να επανασχεδιαστεί και να επαναξιολογηθεί.
3. Πρόληψη αποτυχίας Αυτό μπορεί να χωριστεί σε τρεις κατηγορίες:
    a. Αστοχία σύνδεσης: Εάν οι τάσεις εντός των συνδέσμων ή στις αρθρώσεις μιας σύνδεσης γίνουν πολύ μεγάλες, τότε η σύνδεση μπορεί να αποτύχει. Παράδειγμα: αστοχία στροφαλοφόρου άξονα ή μπιέλας σε εμβολοφόρο κινητήρα.
    b. Αστοχία εξαρτημάτων που είναι συνδεδεμένα σε ένα μέρος του μηχανισμού: Εκτός και εάν μια σύνδεση είναι σωστά ισορροπημένη, η κίνησή μπορεί να δημιουργήσει δονήσεις στο περιβάλλον. Αυτό είναι πάντα ανεπιθύμητο.
    c. Αποτυχία μετακίνησης αντικειμένων από το μηχανισμό: Όλοι οι μηχανισμοί έχουν σχεδιαστεί για να μετακινούν κάτι. Εάν η κίνηση γίνει πολύ γρήγορα ή με υπερβολική δύναμη, τα αντικείμενα που μετακινούνται μπορεί να αποτύχουν. Παραδείγματα: βόλτες σε λούνα παρκ, υπερβολικές στροφές κινητήρα.

Στην περίπτωση (1), πρέπει να προβλέψουμε το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει ο μηχανισμός σε συγκεκριμένες θέσεις. Για την περίπτωση (2), πρέπει να γνωρίζουμε τις θέσεις των συνδέσμων ανά πάσα στιγμή. Για την περίπτωση (3), χρειαζόμαστε τις θέσεις, τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις κάθε ζεύξης για να προβλέψουμε τις δυναμικές δυνάμεις μέσα και γύρω από το μηχανισμό.

Εν γένει, μπορούμε να προβλέψουμε το χρονοδιάγραμμα κίνησης ενός μηχανισμού χρησιμοποιώντας γραφικές μεθόδους αρκετά εύκολα. Θεωρητικά, θα μπορούσαμε επίσης να προβλέψουμε την παρεμβολή γραφικά, αν και αυτό θα γινόταν γρήγορα κουραστικό. Η πρόβλεψη και η πρόληψη της αποτυχίας είναι πολύ δύσκολη και χρονοβόρα χρησιμοποιώντας μόνο γραφικά μέσα. Προφανώς, χρειάζεται καλύτερη λύση.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα αναπτύξουμε μεθόδους για την εύρεση της συνολικής διαμόρφωσης ορισμένων κοινών μηχανισμών ανά πάσα στιγμή. Δεδομένου ότι η εκτέλεση των υπολογισμών με το χέρι θα αποδειχθεί αρκετά περίπλοκη και χρονοβόρα, η μέθοδός μας θα πρέπει να επιτρέπει την εύκολη εφαρμογή σε λογισμικό, ειδικά στο MATLAB®. Η προσέγγιση που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι διανυσματική και γεωμετρική. Για μερικούς μηχανισμούς θα λύσουμε τη θέση κάθε συνδέσμου χρησιμοποιώντας μόνο τη γεωμετρία. Για άλλους θα υιοθετήσουμε την προσέγγιση του διανυσματικού βρόχου. Άλλοι θα χρησιμοποιήσουν έναν συνδυασμό των δύο προσεγγίσεων.

Για να καθορίσουμε πλήρως τη διαμόρφωση ενός μηχανισμού, πρέπει να γνωρίζουμε τουλάχιστον μία από τις γωνίες συνδέσμων εκ των προτέρων. Για παράδειγμα, ένας από τους συνδέσμους μπορεί να κινείται από έναν κινητήρα, όπως στον μηχανισμό του υαλοκαθαριστήρα. Στον μηχανισμό των τεσσάρων ράβδων, μας δίνεται η γωνία στροφάλου (εμφανίζεται ως θ2 στο σχήμα 1). Ο στόχος είναι τότε να βρεθούν οι γωνίες των άλλων συνδέσμων (θ3 και θ4) ως συνάρτηση της γωνίας του στρόφαλου. Σημειώστε ότι όλες οι γωνίες μετρώνται από την οριζόντια προς την αριστερόστροφη κατεύθυνση και η σύνδεση γείωσης (σύνδεσμος 1) θεωρείται ότι είναι οριζόντια. Εξαιτίας αυτού, το θ1 είναι πάντα μηδέν.



Εικόνα 1 Ένας τυπικός μηχανισμός τεσσάρων ράβδων που δείχνει τα μήκη και τις γωνίες του συνδέσμου

Εάν θέλουμε να μοντελοποιήσουμε ένα μηχανισμό τεσσάρων ράβδων που έχει μη οριζόντια γείωση, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων, ο οποίος θα συζητηθεί σε επόμενη ενότητα. Θα ξεκινήσουμε τη συζήτησή μας με μια ανασκόπηση των διανυσμάτων και των πινάκων. Στη συνέχεια, θα αναπτύξουμε μια μέθοδο για τον υπολογισμό των θέσεων των απλούστερων μηχανισμών. Από εκεί προχωράμε στον μηχανισμό των τεσσάρων ράβδων, και άλλους μηχανισμούς και τέλος στην οικογένεια των μηχανισμών έξι ράβδων.

2. Ανασκόπηση διανυσμάτων και πινάκων

Για να ξεκινήσουμε τη μελέτη μας για την ανάλυση θέσης, είναι απαραίτητη μια ανασκόπηση ορισμένων βασικών διανυσματικών πράξεων. Αυτό θα μας επιτρέψει να γράψουμε τις κινηματικές μας εξισώσεις με τρόπο συμπαγή και αποτελεσματικά, και είναι επίσης βολικό κατά τη χρήση του MATLAB. Ξεκινάμε με μια σύντομη ανασκόπηση ορισμένων ιδιοτήτων διανυσμάτων και πινάκων και καταλήγουμε με μετασχηματισμούς συντεταγμένων.

Ένα διάνυσμα είναι απλώς μια γραμμή ή στήλη αριθμών, όπως φαίνεται

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \tag{1}$$

ή

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{array} \right\} \tag{2}$$

Ένας πίνακας, από την άλλη πλευρά, είναι ένα σύνολο αριθμών διατεταγμένων σε ένα ορθογώνιο πλέγμα

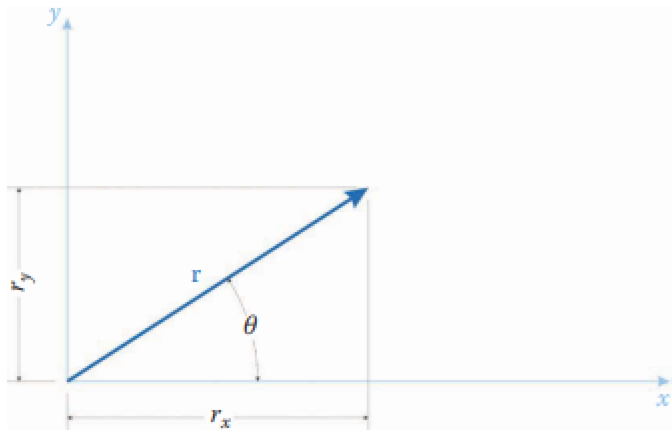
$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} \right] \tag{3}$$

Τόσο τα διανύσματα όσο και οι πίνακες θα επισημαίνονται με έντονους χαρακτήρες. Τα πεζά γράμματα θα χρησιμοποιούνται για διανύσματα και τα κεφαλαία για τους πίνακες. Καθορίζουμε τη διάσταση ενός διανύσματος ή πίνακα δίνοντας πρώτα τον αριθμό των γραμμών, ακολουθούμενο από τον αριθμό των στηλών. Για παράδειγμα, το διάνυσμα στην εξίσωση (1) έχει διάσταση (n × 1), το διάνυσμα στην εξίσωση (2) είναι (1 × n) και ο πίνακας στην εξίσωση (3) είναι (2 × 3). Το διάνυσμα στην Εξίσωση (1) ονομάζεται συχνά διάνυσμα στήλης επειδή καταλαμβάνει μία στήλη, ενώ το διάνυσμα στην Εξίσωση (2) ονομάζεται διάνυσμα γραμμής επειδή καταλαμβάνει μία μόνο γραμμή.

Συχνά, χρησιμοποιούμε διανύσματα για να αναπαραστήσουμε τμήματα κατευθυνόμενης γραμμής στο χώρο. Σε δύο διαστάσεις (δηλαδή στο επίπεδο) τα διανύσματα παίρνουν τη μορφή:

$$\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{c} r_x \\ r_y \end{array} \right\} \tag{4}$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Το μήκος ή το μέγεθος ενός διανύσματος, που συμβολίζεται με κάθετες γραμμές εκατέρωθεν ενός διανύσματος, βρίσκεται χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα.



Εικόνα 2 Ένα δισδιάστατο διάνυσμα έχει μια συνιστώσα x και y

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \tag{5}$$

και η γωνία θ που κάνει ένα διάνυσμα με την οριζόντια είναι

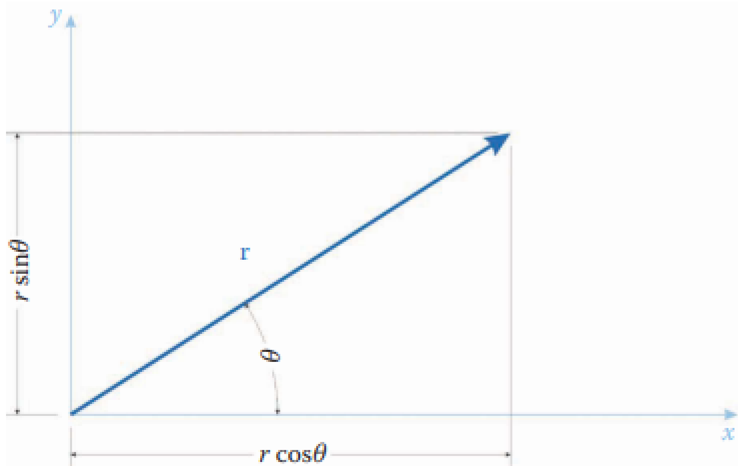
$$\tan\theta = \frac{r_y}{r_x} \tag{6}$$

Συμβαίνει συχνά η περίπτωση να γνωρίζουμε το μήκος ενός διανύσματος και τη γωνία του, παρά τις x και y συνισταμένες του. Αυτό θα συμβεί, για παράδειγμα, όταν εκτελούμε ανάλυση θέσης σε ένα μηχανισμό, αφού γνωρίζουμε εκ των προτέρων τα μήκη κάθε συνδέσμου. Τα στοιχεία x και y μπορούν να υπολογιστούν ως

$$\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{Bmatrix} \tag{7}$$

όπου r = |r| είναι το μήκος του διανύσματος (βλ. Σχήμα 3). Συχνά, τοποθετούμε το μέτρο μπροστά για να διακρίνουμε ευκολότερα το μέτρο και την κατεύθυνση

$$\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} = r\begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} \tag{8}$$



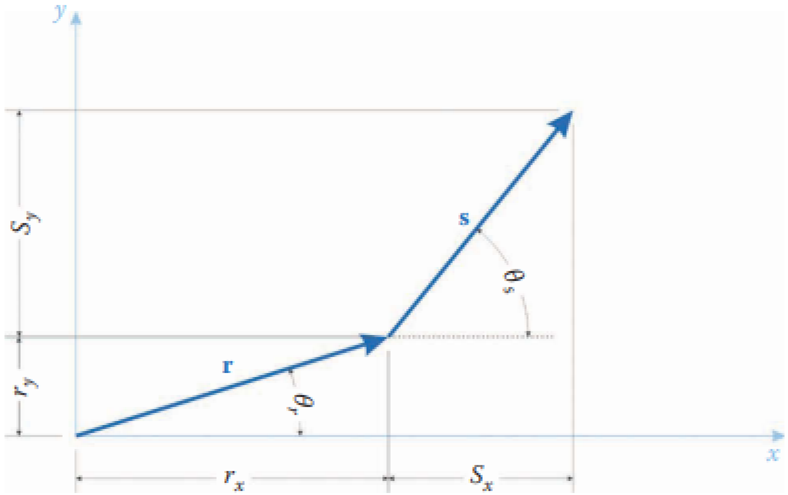
Εικόνα 3 Οριζόντιες και κάθετες συνιστώσες ενός διανύσματος όπως βρέθηκαν με την τριγωνομετρία

Σε αυτόν τον συμβολισμό, το μέτρο r πολλαπλασιάζεται και με τους όρους συνημίτονου και ημιτόνου. Η ποσότητα στα δεξιά σε αγκύλες είναι τώρα ένα μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο θα συζητήσουμε λεπτομερέστερα παρακάτω.

2.1 Προσθήκη διανύσματος

Η προσθήκη δύο διανυσμάτων ισοδυναμεί με το άθροισμα των επιμέρους συστατικών του καθενός όπως φαίνεται στην εικόνα 4.

$$\mathbf{r}+\mathbf{s}=\left\{\begin{array}{c} r_x+s_x \\ r_y+s_y \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} r\cos\theta_r+s\cos\theta_s \\ r\sin\theta_r+s\sin\theta_s \end{array}\right\} \tag{9}$$

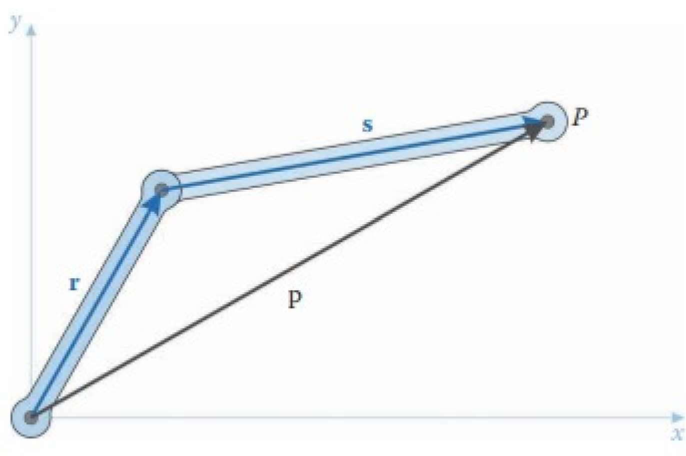


Εικόνα 4 Γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης δύο διανυσμάτων.

Το αποτέλεσμα ενός διανυσματικού αθροίσματος είναι ένα άλλο διάνυσμα. Είναι συχνά η περίπτωση που θέλουμε να βρούμε τις συντεταγμένες ενός σημείου P, το οποίο είναι προσαρτημένο σε έναν συγκεκριμένο σύνδεσμο. Αν γνωρίζουμε τα διανύσματα r και s που σχετίζονται με συνδέσμους που σχηματίζουν μια «αλυσίδα» στο P, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} + \mathbf{s} \tag{10}$$

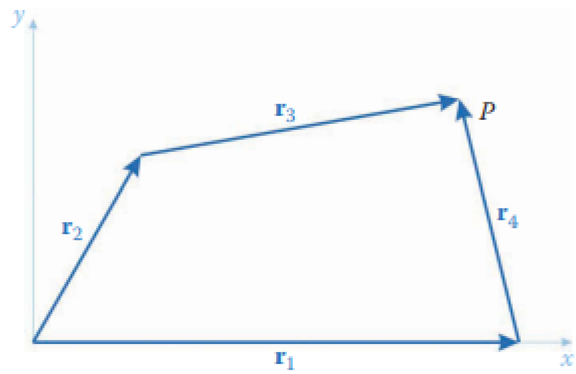
Εάν χρειάζονται οι συντεταγμένες του σημείου P σε σχέση με την αρχή, τότε το r πρέπει να ξεκινά από την αρχή (Εικόνα 5).



Εικόνα 5 Εύρεση των συντεταγμένων του σημείου P προσθέτοντας δύο διανύσματα.

2.2 Ο διανυσματικός βρόχος

Τώρα εξετάστε την αλυσίδα των διανυσμάτων που φαίνεται στο Σχήμα 6. Ξεκινάμε με το r_2 και προχωράμε δεξιόστροφα γύρω από τον βρόχο. Εφόσον οι συντεταγμένες της αρχής του βρόχου και του τέλους του βρόχου είναι ίδιες, το άθροισμα του βρόχου του διανύσματος είναι μηδέν.



Εικόνα 6 Αν μια σειρά διανυσμάτων τελειώνει εκεί που ξεκίνησε, το άθροισμά της είναι μηδέν.

$$\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1 = 0 \tag{11}$$

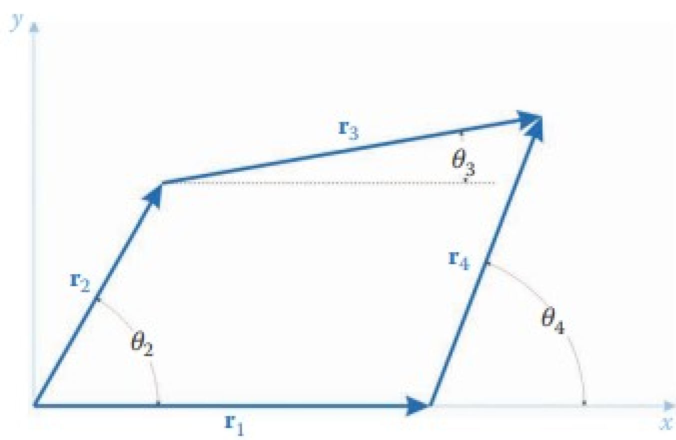
Σημειώστε ιδιαίτερα τα αρνητικά πρόσημα που σχετίζονται με τα r_4 και r_1. Όταν κινούμαστε δεξιόστροφα γύρω από τον βρόχο κινούμαστε με την αντίθετη έννοια αυτών των δύο διανυσμάτων (δηλαδή, από το κεφάλι προς την ουρά), επομένως πρέπει να τα αφαιρέσουμε αντί να τα προσθέσουμε. Αν είχαμε επιλέξει να κινηθούμε αριστερόστροφα γύρω από τον βρόχο ξεκινώντας με r_1 θα το είχαμε

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = 0 \tag{12}$$

που είναι ίδια με την Εξίσωση (11), εκτός του πολλαπλασιασμού επί −1. Είναι σημαντικό να θυμάστε ότι οι εξισώσεις (11) και (12) έχουν δύο συνιστώσες η καθεμία (ένα x και y συστατικό). Ενώ η εξίσωση (11) είναι γραμμένη ως μία εξίσωση σε διανυσματικό συμβολισμό, περιέχει δύο ξεχωριστές εξισώσεις, οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται και οι δύο. Με άλλα λόγια

$$\begin{aligned} r_{2x} + r_{3x} - r_{4x} - r_{1x} &= 0 \\ r_{2y} + r_{3y} - r_{4y} - r_{1y} &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

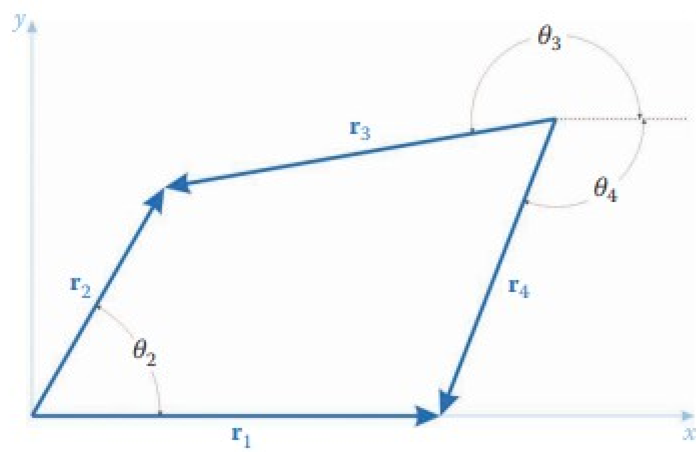
Ίσως αναρωτιέστε πώς επιλέχθηκε η κατεύθυνση για κάθε διάνυσμα κατά τη σχεδίαση του διανυσματικού βρόχου. Σε αυτό το κείμενο, θα διατηρήσουμε αυστηρά τη σύμβαση της μέτρησης όλων των γωνιών από τον θετικό άξονα x. Αυτό θα κάνει τους διανυσματικούς μας υπολογισμούς πολύ πιο απλούς και λιγότερο επιρρεπείς σε σφάλματα. Μια άλλη σύμβαση που θα υιοθετήσουμε είναι αυτή της τοποθέτησης της ουράς ενός διανύσματος σε μια ακίδα γείωσης, όποτε είναι δυνατόν. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7, αυτή η σύμβαση μας δίνει τη δυνατότητα να μετρήσουμε τις γωνίες των r_2 και r_4 απευθείας από τον σταθερό άξονα x. Δυστυχώς, η αρχή του r_3 δεν είναι σταθερή στο χώρο, οπότε πρέπει να αρκεστούμε στη μέτρηση της γωνίας του από την οριζόντια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι η επιλογή της κατεύθυνσης για το διάνυσμα είναι αυθαίρετη, αλλά μόλις επιλεγεί μια κατεύθυνση, ο σχεδιαστής πρέπει να παραμείνει συνεπής κατά την ανάπτυξη των εξισώσεων διανυσματικού βρόχου



Εικόνα 7 Η κατεύθυνση κάθε διανύσματος είναι κάπως αυθαίρετη, αλλά πρέπει να παραμείνουμε συνεπείς όταν χρησιμοποιούμε το διανυσματικό διάγραμμα για να γράψουμε την εξίσωση του διανυσματικού βρόχου

Με άλλα λόγια, θα ήταν απολύτως έγκυρο να επιλέξετε τις κατευθύνσεις για τα r_3 και r_4 που φαίνονται στο Σχήμα 8, αλλά η προκύπτουσα εξίσωση βρόχου διανύσματος θα αλλάξει σε

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1 = 0$$



Εικόνα 8 Η κατεύθυνση των διανυσμάτων r_3 και r_4 έχει αντιστραφεί σε αυτό το διάγραμμα.

και οι γωνίες για κάθε διάνυσμα θα πρέπει να μετρηθούν όπως φαίνεται στο σχήμα. Έχουμε μεγάλη ευελιξία στην ανάλυση των μηχανισμών, αλλά η συνέπεια είναι κρίσιμη.

2.3 Το εσωτερικό γινόμενο

Το εσωτερικό γινόμενο (ή βαθμωτό γινόμενο) δύο διανυσμάτων ορίζεται ως

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = r_x s_x + r_y s_y = |\mathbf{r}||\mathbf{s}|\cos\theta \tag{14}$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων. Σημειώστε ότι αν θ = 90° (δηλαδή εάν τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους) τότε cosθ = 0 και r · s = 0. Αυτό είναι ένα καλό τεστ για το αν δύο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Συχνά θα βρούμε χρήσιμο να υπολογίσουμε ένα διάνυσμα κάθετο στο r. Υπάρχουν δύο δυνατότητες, που δίνονται από

$$\mathbf{r}^{\perp} = \begin{Bmatrix} -r_y \\ r_x \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{r}^{\perp} = \begin{Bmatrix} r_y \\ -r_x \end{Bmatrix} \tag{15}$$

Και τα δύο είναι κάθετα στο r, αλλά δείχνουν σε αντίθετες κατευθύνσεις. Για να αποδείξουμε ότι αυτές είναι κάθετες στο r, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εσωτερικό γινόμενο Α

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{\perp} = r_x\left(-r_y\right) + r_y r_x = 0 \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{\perp} = r_x r_y + r_y\left(-r_x\right) = 0 \tag{16}$$

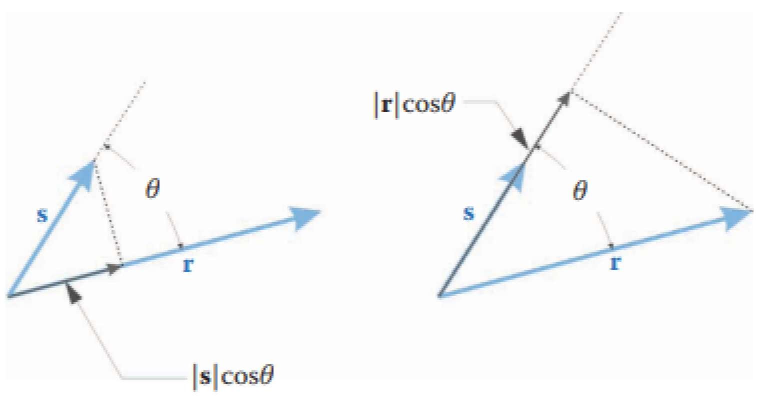
Το κάθετο διάνυσμα στα αριστερά στην Εξίσωση (15) αντιπροσωπεύει μια περιστροφή του διανύσματος r αριστερόστροφα κατά 90°, ενώ το διάνυσμα στα δεξιά αντιπροσωπεύει μια περιστροφή κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού 90°.

Θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση στα αριστερά πιο συχνά, καθώς μια αριστερόστροφη περιστροφή θεωρείται θετική σε ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να ερμηνευθεί γεωμετρικά ότι δίνει την προβολή ενός διανύσματος σε ένα άλλο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9. Αν συμβολίσουμε την προβολή του s στο r ως

$$s_r = |\mathbf{s}|\cos\theta$$

τότε μπορεί να γραφεί το εσωτερικό γινόμενο r · s

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} = |\mathbf{r}|s_r$$



Εικόνα 9 Το εσωτερικό γινόμενο δίνει την προβολή ενός διανύσματος σε ένα άλλο

και μια παρόμοια έκφραση μπορεί να γραφτεί για το r_s. Εάν η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων είναι 90°, τότε η προβολή του ενός πάνω στο άλλο είναι μηδέν, όπως και το εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 1: Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο a · b για τις ακόλουθες περιπτώσεις

1. $\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=5+12=17$

2. $\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2$

3. $\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{Bmatrix} -4 \\ 2 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-8+8=0$

4. $\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=4+10+18=32$

5. $\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0-6+6=0$

6. $\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-2+2+0=0$

7. $\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1-1+1-1=0$

8. $\mathbf{a}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 1 \\ -1.5 \\ 1 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1-1.5+1-1.5+1=0$

Όπως μπορείτε να δείτε στα παραδείγματα 5-8, κάθετα διανύσματα μπορούν να βρεθούν σε 3, 4 ή ακόμα και 5 διαστάσεις. Σημειώστε ότι το αποτέλεσμα ενός εσωτερικού γινόμενου είναι πάντα βαθμωτό και όχι ένα διάνυσμα. Μια κοινή ποσότητα που υπολογίζεται με ένα εσωτερικό γινόμενο κουκίδων είναι το έργο, που ορίζεται ως

$$dW=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{17}$$

όπου F είναι μια δύναμη και dr είναι η απόσταση στην οποία η δύναμη προκάλεσε την κίνηση ενός αντικειμένου.

2.4 Το εξωτερικό γινόμενο

Ένα άλλο χρήσιμο διανυσματικό εργαλείο είναι το εξωτερικό γινόμενο, το οποίο συνήθως συμβολίζεται με το σύμβολο «×». Υπάρχουν πιθανώς τόσες διαφορετικές μέθοδοι για τον υπολογισμό του, βασικά όσες και οι καθηγητές μαθηματικών, αλλά ένας κλασσικός τύπος είναι

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \left(r_y s_z - r_z s_y\right)\hat{I} - \left(r_x s_z - r_z s_x\right)\hat{J} + \left(r_x s_y - r_y s_x\right)\hat{k} \tag{18}$$

Όπου

$\hat{I}, \hat{J}, \hat{k}$

είναι τα μοναδιαία διανύσματα (διανύσματα μήκους 1) στις κατευθύνσεις x, y και z, αντίστοιχα. Εάν τόσο το r όσο και το s είναι δισδιάστατα διανύσματα (δηλαδή με μηδέν z συνιστώσες) τότε ο τύπος είναι αρκετά απλός:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \left(r_x s_y - r_y s_x\right)\hat{k} \tag{19}$$

Το εξωτερικό γινόμενο παράγει πάντα ένα διάνυσμα που είναι κάθετο και στα δύο διανύσματα του γινόμενου - γι' αυτό λαμβάνουμε ένα διάνυσμα που δείχνει προς την κατεύθυνση z όταν υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων που περιορίζονται στο επίπεδο xy. Εάν το εξωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων είναι μηδέν, σημαίνει ότι τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα ή αντιπαράλληλα. Μια κοινή ποσότητα που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας ένα εξωτερικό γινόμενο είναι η ροπή, όπου

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{20}$$

όπου F είναι η ασκούμενη δύναμη και r το διάνυσμα από το κέντρο περιστροφής μέχρι το σημείο εφαρμογής της δύναμης. Σημειώστε ότι εάν η δύναμη κατευθύνεται προς τα μέσα στο κέντρο περιστροφής (δηλαδή είναι παράλληλη με το r), τότε η ροπή που προκύπτει είναι μηδέν

Παράδειγμα 2: Υπολογισμός εξωτερικών γινομένων

1. $\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 4 - 6 = -2\hat{k}$

2. $\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 6 - 4 = 2\hat{k} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

3. $\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 4 - 4 = 0\hat{k} \quad (\mathbf{a} \text{ and } \mathbf{b} \text{ are parallel})$

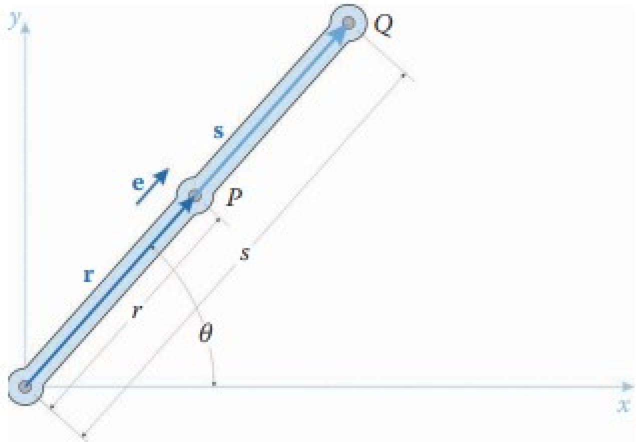
4. $\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -5\hat{j} \quad (\mathbf{a} \text{ and } \mathbf{b} \text{ are both perpendicular to } \hat{j})$

5. $\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 5\hat{j} \quad (\mathbf{a} \text{ and } \mathbf{b} \text{ are both perpendicular to } \hat{j})$

2.5 Μοναδιαία Διανύσματα

Σε επόμενα για την ανάλυση της ταχύτητας, της επιτάχυνσης, θα βρούμε βολικό να εργαστούμε με μοναδιαία διανύσματα. Όπως κάθε διάνυσμα, ένα μοναδιαίο διάνυσμα έχει κατεύθυνση και μέτρο, αλλά το μέτρο ενός μοναδιαίου διανύσματος είναι πάντα ένα. Το σχήμα 10 δείχνει μια κατάσταση όπου δύο σημεία, το P και το Q, βρίσκονται στον ίδιο σύνδεσμο. Το διάνυσμα από την αρχή στο σημείο P είναι r και το διάνυσμα από την αρχή στο σημείο Q είναι s, όπου

$$\mathbf{r} = r \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} \quad \mathbf{s} = s \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} \tag{21}$$



Εικόνα 10 Το μοναδιαίο διάνυσμα e δείχνει προς την ίδια κατεύθυνση με τα r και s.

Επειδή και τα δύο αυτά διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση, αλλά διαφορετικό μέτρο, είναι βολικό να ορίσουμε το μοναδιαίο διάνυσμα e ως

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} \tag{22}$$

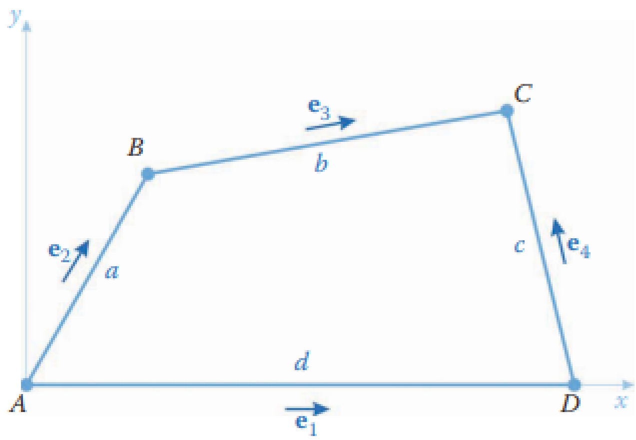
Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι το μέγεθος αυτού του διανύσματος είναι στην πραγματικότητα μονάδα, αφού

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{23}$$

Τώρα το r και το s μπορούν να γραφτούν

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e} \quad \mathbf{s} = s\mathbf{e} \tag{24}$$

Αυτή είναι μια εντελώς πιο συμπαγής σημειογραφία και θα μας εξοικονομήσει από την ανάγκη να γράψουμε μια φαινομενικά ατελείωτη ροή τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Δεδομένου ότι το MATLAB σχεδιάστηκε για να χειρίζεται εύκολα διανύσματα και πίνακες, θα το βρούμε πολύ απλό να χρησιμοποιήσουμε μοναδιαία διανύσματα για τη διεξαγωγή των αναλύσεων θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης. Οποιοδήποτε διάνυσμα μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο του μήκους του διανύσματος και ως μοναδιαίο διάνυσμα που δίνει κατεύθυνση. Ως παράδειγμα, εξετάστε την αλυσίδα συνδέσμων που φαίνεται στην Εικόνα 11. Το διάνυσμα από το σημείο A στο σημείο B μπορεί να γραφτεί



Εικόνα 11 Ένας διανυσματικός βρόχος που χρησιμοποιεί μοναδιαία διανύσματα για να δώσει κατεύθυνση.

$$\mathbf{r}_{AB} = a\mathbf{e}_2 \tag{25}$$

και η εξίσωση του διανυσματικού βρόχου ως προς τα μοναδιαία διανύσματα είναι

$$a\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3 - c\mathbf{e}_4 - d\mathbf{e}_1 = 0 \tag{26}$$

Τώρα θυμηθείτε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου που δόθηκε προηγουμένως

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{r}||\mathbf{s}|\cos\theta \tag{27}$$

Αν γράψουμε ένα εσωτερικό γινόμενο χρησιμοποιώντας μόνο μοναδιαία διανύσματα, ας πούμε e_2 και e_3 το αποτέλεσμα είναι

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \cos\theta \qquad (27)$$

αφού το μέγεθος και των δύο διανυσμάτων στο γινόμενο είναι ένα. Έτσι, είναι αρκετά απλό να βρεθεί η γωνία μεταξύ δύο μοναδιαίων διανυσμάτων χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο.

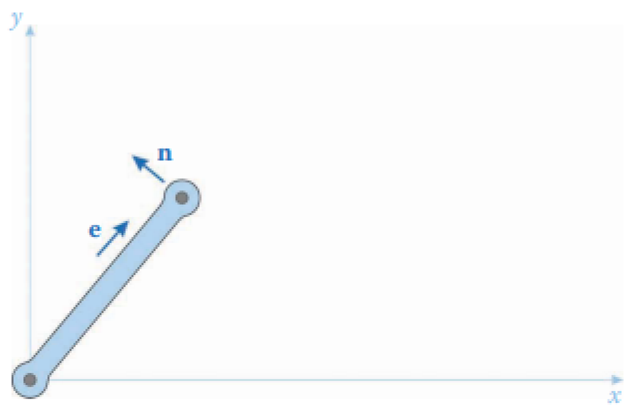
Τώρα ας ορίσουμε το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα, είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο e.

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix} \tag{28}$$

Επιλέξαμε το διάνυσμα που περιστρέφεται 90° αριστερόστροφα από το e στον ορισμό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12, για λόγους που θα γίνουν εμφανείς στην επόμενη ενότητα. Ο αναγνώστης μπορεί επίσης να θέλει να επαληθεύσει ότι

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{29}$$

Το κάθετο μοναδιαίο είναι επίσης ένα μοναδιαίο διάνυσμα, αλλά ορίζεται ως κάθετο στο e. Θα είναι χρήσιμο κατά τη διεξαγωγή ανάλυσης ταχύτητας και επιτάχυνσης σε συνδέσμους.



Εικόνα 12 Το κάθετο μοναδιαίο είναι κάθετο στο μοναδιαίο διάνυσμα, και περιστραμένο 90° αριστερόστροφα.

Χρονικές Παράγωγοι Μοναδιαίων Διανυσμάτων

Για τη διεξαγωγή ανάλυσης ταχύτητας και επιτάχυνσης των μηχανισμών, θα χρειαστεί να πάρουμε χρονικές παραγώγους μοναδιαίων διανυσμάτων. Θεωρήστε το μοναδιαίο διάνυσμα e.

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} \tag{31}$$

Αν το διαφοροποιήσουμε αυτό σε σχέση με το χρόνο, έχουμε

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} \tag{32}$$

Η λήψη της χρονικής παραγώγου ενός διανύσματος απαιτεί τη λήψη της παραγώγου καθενός από τα συστατικά του, με τη σειρά του. Θεωρήστε πρώτα το x συστατικό:

$$\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta) \tag{33}$$

Εφόσον το e συνδέεται με έναν κινούμενο σύνδεσμο, η γωνία θ είναι συνάρτηση του χρόνου και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας της διαφοροποίησης για να πάρουμε την παράγωγο. Αν το u(x) είναι συνάρτηση του x και το v(u) είναι συνάρτηση του u, τότε ο κανόνας της αλυσίδας δηλώνει ότι

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \times \frac{du}{dx} \tag{34}$$

Στο παράδειγμά μας έχουμε

$$u \to \theta \quad x \to t \quad v \to \cos\theta \tag{35}$$

έτσι ώστε

$$\frac{du}{dx} \to \frac{d\theta}{dt} \quad \frac{dv}{du} \to \frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta \tag{36}$$

Έτσι, η παράγωγος του x όρου του μοναδιαίου διανύσματος είναι

$$\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta) = -\frac{d\theta}{dt}\sin\theta \tag{37}$$

Ο όρος dθ/dt είναι η χρονική μεταβολή της γωνίας θ, που θα ορίσουμε ως γωνιακή ταχύτητα, ω (ελληνικό γράμμα ωμέγα).

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} \tag{38}$$

Έτσι, η χρονική παράγωγος του μοναδιαίου διανύσματος είναι

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \omega \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix} \tag{39}$$

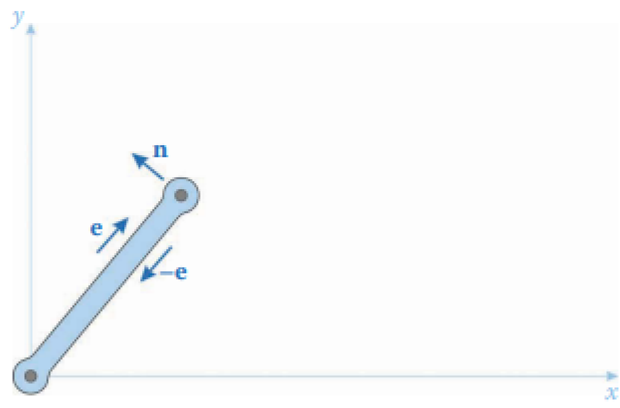
Ο αναγνώστης μπορεί να αναγνωρίσει την ποσότητα σε αγκύλες ως το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα και συνεπώς η παράγωγος του μοναδιαίου διανύσματος μπορεί να γραφτεί

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \omega\mathbf{n} \tag{40}$$

Έτσι, η χρονική παράγωγος του μοναδιαίου διανύσματος είναι η γωνιακή ταχύτητα πολλαπλασιαζόμενη με το κάθετο μοναδιαίο. Τι συμβαίνει αν διαφοροποιήσουμε το κάθετο μοναδιαίο ως προς το χρόνο;

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix} = \omega \begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{Bmatrix} = -\omega\mathbf{e} \tag{41}$$

Έχουμε και πάλι μοναδιαίο διάνυσμα, πολλαπλασιασμένο (όπως και πριν) με τη γωνιακή ταχύτητα. Σημειώστε ότι το σύμβολο μείον μπροστά από το αποτέλεσμα υποδεικνύει ότι η κατεύθυνση είναι αντίθετη από την αρχική διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος, όπως φαίνεται στην Εικόνα 13. Επομένως, η λήψη της χρονικής παραγώγου της κανονικής μονάδας έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή της κατεύθυνσης κατά 90° αριστερόστροφα και την αύξηση του μεγέθους κατά έναν παράγοντα ω.



Εικόνα 13 Η παραγώγιση του κάθετου μοναδιαίου δίνει ξανά το μοναδιαίο διάνυσμα, αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να το επιβεβαιώσει

$$\frac{d}{dt}(-\mathbf{e}) = -\omega\mathbf{n} \tag{42}$$

και ότι παίρνοντας τη χρονική παράγωγο του −n θα μας έφερνε πίσω από εκεί που ξεκινήσαμε, δείχνοντας προς την κατεύθυνση του e. Έτσι, η χρονική διαφοροποίηση του μοναδιαίου διανύσματος ή του κάθετου μοναδιαίου έχει ως αποτέλεσμα μια περιστροφή 90° αριστερόστροφα συνοδευόμενη από πολλαπλασιασμό με ω.

2.6 Μια πολύ σύντομη εισαγωγή στην άλγεβρα πινάκων

Οι πίνακες χρησιμοποιούνται όταν θέλουμε να λύσουμε σύνολα γραμμικών εξισώσεων. Στην πραγματικότητα, το MATLAB (το οποίο είναι συντομογραφία του "MATrix LABoratory") αναπτύχθηκε αρχικά για αυτόν ακριβώς τον σκοπό. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις ακόλουθες δύο γραμμικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 6 \end{aligned} \tag{43}$$

Για αυτό το απλό παράδειγμα, θα μπορούσαμε να λύσουμε τη δεύτερη εξίσωση για το x_2 και να αντικαταστήσουμε το αποτέλεσμα στην πρώτη εξίσωση για να λύσουμε το x_1. Αυτή η διαδικασία λειτουργεί καλά για δύο ή τρεις εξισώσεις, αλλά γρήγορα γίνεται κουραστική (και επιρρεπής σε σφάλματα) για μεγαλύτερα συστήματα. Αντίθετα, μπορούμε να τακτοποιήσουμε τις εξισώσεις σε μορφή πίνακα και να χρησιμοποιήσουμε λογισμικό (όπως το MATLAB) για να κάνει τη σκληρή δουλειά για εμάς. Για να γίνει αυτό, παίρνουμε τους συντελεστές των μεταβλητών και τους τακτοποιούμε σε ένα πίνακα, όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix} \tag{44}$$

Ας αποσυνθέσουμε αυτή την εξίσωση στα συστατικά της μέρη

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{x}$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix} = \mathbf{b}$$

ώστε να μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (44) ως

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Σημειώστε ότι τα πάντα στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης είναι γνωστά. Δηλαδή, δεν εμφανίζονται μεταβλητές σε αυτήν την πλευρά της εξίσωσης. Η σειρά με την οποία τακτοποιούμε τους αριθμούς στον πίνακα (το τετράγωνο πλέγμα) είναι πολύ σημαντική. Κάθε γραμμή στον πίνακα αντιστοιχεί σε μία από τις εξισώσεις και κάθε στήλη αντιστοιχεί σε μια μεταβλητή που λύνουμε. Αν αναδιατάξουμε τη σειρά του διανύσματος των αγνώστων, πρέπει επίσης να αναδιατάξουμε τις στήλες του πίνακα, έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix} \tag{45}$$

Σημειώστε ότι οι σειρές δεν έχουν επηρεαστεί από την αλλαγή της σειράς του διανύσματος των αγνώστων.

Παράδειγμα 3: Τακτοποιήστε τις παρακάτω εξισώσεις σε μορφή πίνακα

$$\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 &= 13 \\ 8x_1 + 20x_2 &= 25 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13 \\ 25 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 - 13 &= 0 \\ 20x_1 + 8x_2 - 25 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13 \\ 25 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 6a + 8b &= 10 \\ 8b + 20a &= 30 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 20 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 30 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 3 &= 4 \\ 4x + 3y + 2 &= 1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x\cos\theta_2 + y\sin\theta_2 &= x' \\ -x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2 &= y' \\ (x \text{ and } y \text{ are unknowns}) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a \\ x_2 &= b \\ (x_1 \text{ and } x_2 \text{ are unknowns}) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 + d &= 0 \\ g &= ex_1 + fx_2 \\ hx_2 + kx_3 &= m \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & 0 \\ 0 & h & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -d \\ g \\ m \end{Bmatrix}$$

Μερικοί άλλοι ορισμοί πινάκων είναι απαραίτητοι. Εξετάστε το πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \tag{46}$$

Ανταλλάσσοντας στήλες και γραμμές, λαμβάνουμε τον ανάστροφο του

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Ο αντίστροφος ενός πίνακα ορίζεται έτσι ώστε

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{U} \tag{48}$$

όπου U είναι ο μοναδιαιος πίνακας.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{49}$$

Μόλις έχουμε γραμμένες τις εξισώσεις του πίνακα, είναι σχετικά εύκολο να χρησιμοποιήσουμε το MATLAB για την επίλυσή τους. Για να εισαγάγουμε έναν πίνακα στο MATLAB, χρησιμοποιούμε την αγκύλη, με ένα ερωτηματικό που χωρίζει γραμμές. Το MATLAB θα δέχεται κόμματα ή κενά μεταξύ των στηλών, όπως φαίνεται.

```
>> A = [1 2;3 4]

A =

1 2

3 4
```

Για να αποκτήσουμε πρόσβαση σε μια συγκεκριμένη καταχώρηση στον πίνακα, χρησιμοποιούμε κανονικές παρενθέσεις σε μορφή (γραμμή, στήλη). Για παράδειγμα

```
>> A(1,2)

ans =

2
```

μας δίνει την πρώτη σειρά και τη δεύτερη στήλη του πίνακα A. Για να εισάγετε ένα διάνυσμα στο MATLAB (π.χ. το διάνυσμα των γνωστών), χρησιμοποιήστε την ίδια τεχνική. Ένα διάνυσμα στήλης (κάθετο) έχει μία στήλη και πολλές σειρές, επομένως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα ερωτηματικό μεταξύ κάθε καταχώρισης

```
>> b = [5; 6]

b =

5

6
```

Υπάρχουν δύο μέθοδοι για την επίλυση της εξίσωσης του πίνακα Ax = b, η μέθοδος του αντιστρόφου και η μέθοδος με τη προς τα εμπρός κάθετο. Από αυτές, το MATLAB θα προτιμούσε να χρησιμοποιήσετε τη δεύτερη μέθοδο, εκτός εάν χρειάζεστε πραγματικά τον αντίστροφο του πίνακα A για κάποιο λόγο. Για να κατανοήσετε το σκεπτικό πίσω από τις δύο μεθόδους, σκεφτείτε για λίγο πώς θα λύνατε την εξίσωση Ax = b αν δεν ήταν εξίσωση πίνακα:

$$Ax = b \tag{50}$$

Η απλούστερη τεχνική θα ήταν να διαιρέσουμε και τις δύο πλευρές με το A, όπως φαίνεται

$$x = \frac{b}{A} \tag{51}$$

Αυτό είναι μαθηματικά ισοδύναμο με τον πολλαπλασιασμό και των δύο πλευρών με τον αντίστροφο του A.

$$x = A^{-1}b \tag{52}$$

Στο MATLAB, η τεχνική προς τα εμπρός κάθετο είναι το ισοδύναμο της Εξίσωσης (51), ενώ η τεχνική αντιστρόφου είναι η ισοδύναμη Εξίσωση (52). Η πρώτη τεχνική είναι υπολογιστικά πολύ πιο γρήγορη, δεδομένου ότι ο υπολογισμός του αντίστροφου ενός πίνακα μπορεί μερικές φορές να εμπλέκεται.

```
>> x = A\b

x =

-4.0000

 4.5000
```

Ή

```
>> x = inv(A)*b

 x =

-4.0000

 4.5000
```

Όταν εκτελείτε και τις δύο αυτές εντολές, η δεύτερη διαρκεί αισθητά περισσότερο. Ας ελέγξουμε αν το MATLAB βρήκε τη σωστή λύση:

$$\begin{aligned} 1(-4)+2(4.5) &= -4+9=5 \\ 3(-4)+4(4.5) &= -12+18=6 \end{aligned} \tag{53}$$

Δούλεψε! Τώρα έχουμε ένα βολικό και ισχυρό εργαλείο για την επίλυση συνόλων γραμμικών εξισώσεων. Θα το χρησιμοποιήσουμε συχνά για τη διεξαγωγή ανάλυσης ταχύτητας, επιτάχυνσης στα επόμενα.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσετε ότι ενώ η γραφή

$$x = A^{-1}b = bA^{-1}$$

είναι απολύτως έγκυρη για βαθμωτές πράξεις, δεν θα λειτουργήσει για χειρισμούς πινάκων. Στην πραγματικότητα, η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει για πράξεις πινάκων και

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \neq \mathbf{b}\mathbf{A}^{-1}$$

Για να δείτε γιατί ισχύει αυτό, εξετάστε τις διαστάσεις κάθε όρου στην παραπάνω εξίσωση. Ο αντίστροφος του πίνακα A έχει την ίδια διάσταση με τον ίδιο τον πίνακα A, έτσι ώστε το A^{-1} να έχει διάσταση (2 × 2) και το b να έχει διάσταση (2 × 1). Για να οριστεί ένας πολλαπλασιασμός πίνακα πρέπει οι εσωτερικές διαστάσεις να είναι ίσες και το μέγεθος του αποτελέσματος να έχει τις εξωτερικές διαστάσεις. Δηλαδή για την πράξη

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \rightarrow (2\times2)\times(2\times1)$$

Η εσωτερική διάσταση είναι 2 και οι εξωτερικές διαστάσεις είναι 2 και 1, επομένως το αποτέλεσμα αυτής της λειτουργίας είναι ένα διάνυσμα 2 × 1. Αν προσπαθήσουμε

$$\mathbf{b}\mathbf{A}^{-1} \rightarrow (2\times1)\times(2\times2)$$

Οι εσωτερικές διαστάσεις είναι 1 και 2, οι οποίες είναι άνισες. Δεδομένου ότι είναι άνισα, ο πολλαπλασιασμός είναι απροσδιόριστος. Για να το επιβεβαιώσετε, δοκιμάστε να πληκτρολογήσετε

```
>> b*inv(A)
```

Το αποτέλεσμα είναι ένα σφάλμα, όπως αναμενόταν.

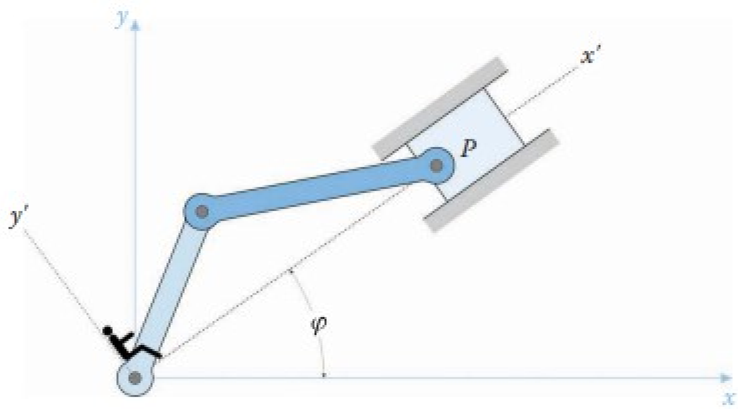
```
Error using *

Inner matrix dimensions must agree.
```

Αυτός είναι ο τρόπος του MATLAB να μας πει ότι η πράξη πολλαπλασιασμού είναι απροσδιόριστη καθώς οι εσωτερικές διαστάσεις είναι άνισες. Η γνώση της σημασίας αυτού του μάλλον κρυπτικού μηνύματος σφάλματος θα είναι πολύ χρήσιμη για τον εντοπισμό σφαλμάτων των προγραμμάτων MATLAB που θα γράψουμε σε επόμενες ενότητες

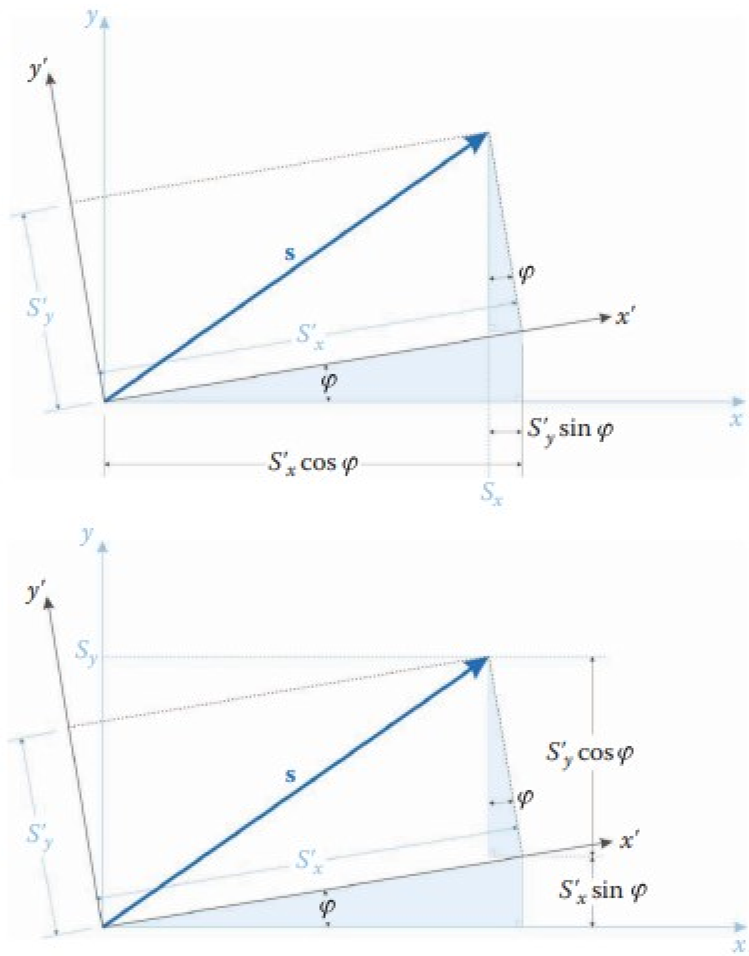
2.7 Μετασχηματισμός Συντεταγμένων

Σε ορισμένες περιπτώσεις, θα είναι πιο απλό να χρησιμοποιήσουμε ένα «βοηθητικό» ή «τοπικό» σύστημα συντεταγμένων κατά τη μοντελοποίηση ενός μηχανισμού. Εξετάστε το μηχανισμό διωστήρα εμβόλου που φαίνεται στην Εικόνα 14.



Εικόνα 14 Στη φιγούρα που κάθεται στην αρχή και κοιτάζει προς την κατεύθυνση x, το έμβολο φαίνεται να είναι ακριβώς μπροστά.

Το έμβολο είναι ευθυγραμμισμένο με τον άξονα x′ και θα το βρούμε σχετικά απλό να εκτελέσουμε την ανάλυσή μας στο τοπικό σύστημα (x′, y′), αρχικά. Απαιτούμε μια μέθοδο για τη μετατροπή των αποτελεσμάτων στο σύστημα (x′, y′) στο "ολικό ή κύριο" σύστημα (x, y). Εξετάστε πρώτα την απλούστερη περίπτωση, στην οποία το κινούμενο (τοπικό) σύστημα συντεταγμένων μοιράζεται την αρχή με το σταθερό (σφαιρικό) σύστημα συντεταγμένων αλλά περιστρέφεται κατά μια γωνία φ, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15. Σπάζοντας το διάνυσμα s στα συστατικά του στο σύστημα κινούμενων συντεταγμένων, μπορούμε να εξαγάγουμε τις παρακάτω σχέσεις:



Εικόνα 15 Το κινούμενο (τοπικό) σύστημα συντεταγμένων περιστρέφεται κατά γωνία φ από το σταθερό (σφαιρικό) σύστημα συντεταγμένων. Το διάνυσμα s θεωρείται γνωστό στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων.

Είναι σύνηθες να γράφονται αυτές οι σχέσεις σε μορφή πίνακα ως

$$\begin{aligned} s_x &= s_x' \cos\varphi - s_y' \sin\varphi \\ s_y &= s_x' \sin\varphi + s_y' \cos\varphi \end{aligned} \tag{54}$$

Συχνά οι εξισώσεις γράφονται σε μορφή πινάκων

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_x' \\ s_y' \end{Bmatrix} \tag{55}$$

ή, πιο συμπαγή

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{s}' \tag{56}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{57}$$

Που είναι γνωστός ως πίνακας περιστροφής. Ένα ενδιαφέρον πράγμα συμβαίνει αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα μετασχηματισμού με τον ανάστροφο του

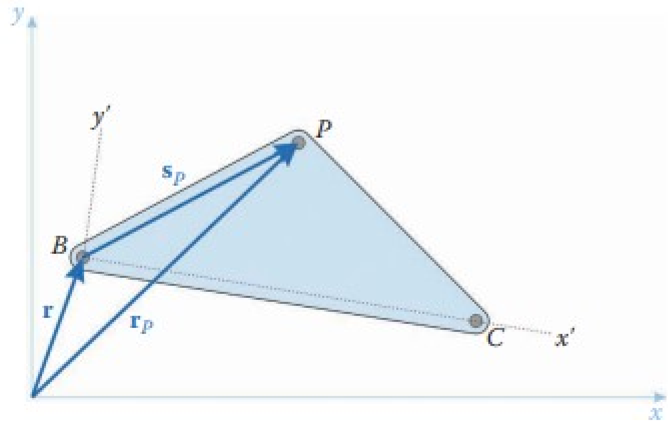
$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{58}$$

Με άλλα λόγια, $AA^T = U$ ή ο ανάστροφος του A είναι και ο αντίστροφός του. Ένας πίνακας που έχει αυτή την ιδιότητα ονομάζεται "ορθογώνιος". Η ιδιότητα της ορθογωνικότητας σημαίνει ότι αν θέλουμε ποτέ να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό, δηλαδή να πάμε από το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, απλώς πολλαπλασιάζουμε τις τοπικές συντεταγμένες με A^T.

$$\begin{aligned} &\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{s}' \\ &\mathbf{A}^T\mathbf{s} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{s}' \\ &\mathbf{A}^T\mathbf{s} = \mathbf{s}' \end{aligned} \tag{59}$$

Για να λάβουμε υπόψη οποιαδήποτε πιθανή κίνηση του συνδέσμου, πρέπει επίσης να προσαρμόσουμε τη μεταφορά, όπως φαίνεται στην Εικόνα 16.



Εικόνα 16 Ένας σύνδεσμος μπορεί να μεταφέρεται αλλά και να περιστρέφεται.

Η συνολική θέση ενός σημείου σε έναν κινούμενο σύνδεσμο μπορεί να γραφτεί

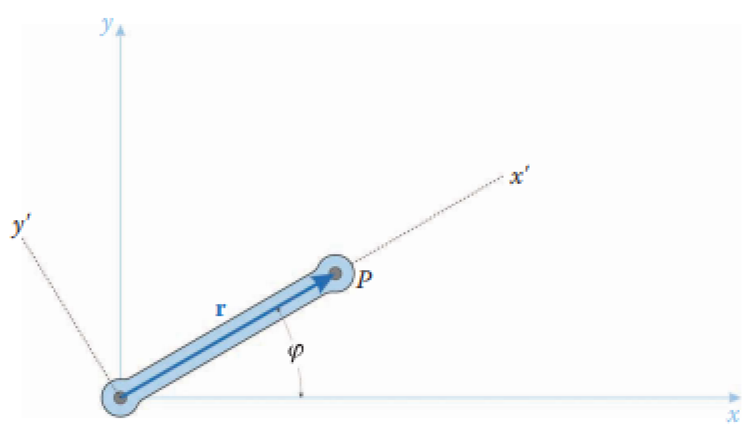
$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r} + \mathbf{s}_P$$

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r} + \mathbf{A}\mathbf{s}'_P \tag{60}$$

Όπου η γωνία φ εξακολουθεί να μετριέται μεταξύ x και x′ μετά την πραγματοποίηση της μεταφοράς.

Παράδειγμα 4: Ένας απλός σύνδεσμος

Στο Σχήμα 17, ο σύνδεσμος έχει μήκος r. Το διάνυσμα r δίνει τη θέση του σημείου P στο τέλος του συνδέσμου.



Εικόνα 17 Ένα κινούμενο σύστημα συντεταγμένων είναι προσαρτημένο στον σύνδεσμο.

Στο τοπικό σύστημα, μπορούμε να γράψουμε r′ ως

$$\mathbf{r}' = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{61}$$

Ο σύνδεσμος περιστρέφεται μακριά από τον παγκόσμιο άξονα x κατά γωνία φ. Για να μετατρέψουμε τις συντεταγμένες του σημείου P στο παγκόσμιο σύστημα, πολλαπλασιάζουμε με τον πίνακα περιστροφής A

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{Bmatrix}$$

Ο αναγνώστης θα σημειώσει ότι αυτή είναι η ίδια έκφραση με την Εξίσωση (7) με το φ να αντικαθιστά το θ.