Μερική απόδειξη της σχέσης του Planck για την ένταση της ακτινοβολίας μέλανος σώματος

(Η παρακάτω απόδειξη προϋποθέτει την πυκνότητα ενεργειακών καταστάσεων που δίνεται εδώ ως δεδομένη, αλλά θα συζητηθεί στην συνέχεια του μαθήματος – h *και* k_B είναι οι σταθερές Planck και Boltzmann αντίστοιχα.)

Η πυκνότητα ενεργειακών καταστάσεων *g(ε)dε*, δηλ., ο αριθμός των ενεργειακών καταστάσεων (εδώ, των φωτονίων) με ενέργεια μεταξύ *ε* και *ε* + *dε* σε ένα κύβο με ακμή *L* δίνεται από την σχέση:

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{8\pi L^3}{h^3 c^3}\varepsilon^2 d\varepsilon \quad ,$$

όπου *c* είναι η ταχύτητα του φωτός. Για να υπολογίσουμε την ενέργεια *U* στο κουτί θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την μέση ενέργεια σε κάθε ενεργειακή στάθμη *ε* (σε παρένθεση στο ολοκλήρωμα) επί την πιθανότητα να έχουν τα φωτόνια αυτήν την ενέργεια *g(ε)dε*:

$$U = \int_0^\infty \left(\frac{\varepsilon}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}\right) g(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{8\pi L^3}{h^3 c^3}\frac{h^3 \nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} h\, d\nu = L^3 \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu \quad .$$

Το όρισμα του ολοκληρώματος είναι ακριβώς η έκφραση για την φασματική πυκνότητα ενέργειας, $u_\nu(T)$ σε μονάδες ενέργειας ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα συχνότητας, *ν*. Το ολοκλήρωμα δίνει

$$\frac{U}{L^3} = \frac{8\pi^5 (k_B T)^4}{15(hc^3)} \quad .$$

Αυτή είναι η σχέση Stefan Boltzmann που δείχνει ότι ένταση της ακτινοβολίας είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης της θερμοκρασίας.

Η ακτινοβολία που διαφεύγει από μια μικρή τρύπα στο κουτί προκύπτει αν ολοκληρώσουμε την πυκνότητα ενέργειας πάνω σε όλες τις τιμές της στερεάς γωνίας 4π[1] και πολλαπλασιάσουμε με την ταχύτητα (του φωτός). Το αποτέλεσμα είναι σε μονάδες ενέργειας ανά μονάδα εμβαδού ανά μονάδα χρόνου και αποτελεί την φασματική ακτινοβολία του μέλανος σώματος:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad .$$

1 Το ολοκλήρωμα στερεάς γωνίας είναι ολοκλήρωμα του dφ dθ sinθ με θ από 0 έως π και φ από 0 έως 2π.