Κεφάλαιο 3

Βασικές αρχές

3.1 Αρχή του Περιστερεώνα

Πρόταση
Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο πεπερασμένα σύνολα και μια απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

(i) Αν f είναι $1-1$ τότε $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$.

(ii) Αν f είναι επί τότε $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}|$.

Απόδειξη. Άσκηση.

Η πρόταση (i) ονομάζεται **αρχή του περιστερεώνα** (ή **αρχή του Dirichlet**). Στη βιβλιογραφία συνήθως παρουσιάζεται στην παρακάτω μορφή:

Αν για δύο πεπερασμένα σύνολα $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ισχύει ότι $|\mathcal{A}| > |\mathcal{B}|$ τότε δεν υπάρχει μια $1-1$ απεικόνιση από το $\mathcal{A}$ στο $\mathcal{B}$.

Στην πιο απλουστευμένη μορφή της (από την οποία έλαβε το ονομά της) η αρχή του περιστερεώνα διατυπώνει την προφανή παρατήρηση ότι:

Αν υπάρχουν n φωλιές (τα στοιχεία του $\mathcal{B}$) για $n+1$ περιστέρια (τα στοιχεία του $\mathcal{A}$), δεν είναι δυνατόν κάθε περιστέρι να έχει τη δική του φωλιά (και επομένως δύο περιστέρια θα μπούν στην ίδια φωλιά).

Η αρχή του περιστερεώνα έχει πολλές εφαρμογές όπως φαίνεται και από τα παρακάτω παραδείγματα.

Παραδείγματα

1. Σε κάθε ομάδα 13 ατόμων υπάρχουν 2 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα.

Πραγματικά, αν $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο των ατόμων και $\mathcal{B}$ το σύνολο των μηνών του έτους και $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ειναι η απεικόνιση η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε άτομο τον μήνα που γεννήθηκε, τότε επειδή $|\mathcal{A}| > |\mathcal{B}|$ από την αρχή του περιστερεώνα έπεται ότι f δεν είναι $1-1$ και άρα υπάρχουν $x, y \in \mathcal{A}$ με $f(x) = f(y)$.

2. Αν διαλέξουμε $n+1$ διαφορετικούς αριθμούς απο σύνολο $[2n]$, τότε

   (i) υπάρχουν δύο αριθμοί από αυτούς που διαλέξαμε που διαφέρουν ακριβώς κατά n.

   Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο των $n+1$ αριθμών που διαλέξαμε και $\mathcal{B}$ το σύνολο των ζευγών

   $$\{\{1,n+1\},\{2,n+2\},\{3,n+3\},\ldots,\{n,2n\}\}$$

   Προφανώς τα ζεύγη του $\mathcal{B}$ αποτελούν μια διαμέριση του $[2n]$ με την ιδιότητα τα στοιχεία κάθε ζεύγους να διαφέρουν ακριβώς n. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ η οποία αντιστοιχίζει τον αριθμό x του $\mathcal{A}$ στο ζεύγος του $\mathcal{B}$ που περιέχει το x. Επειδή

   $$n+1 = |\mathcal{A}| > |\mathcal{B}| = n$$

   από την αρχή του περιστερεώνα έπεται ότι η f δεν είναι $1-1$ και άρα υπάρχουν $x, y \in \mathcal{A}$ με $f(x) = f(y)$ δηλαδή τα x, y διαφέρουν ακριβώς κατά n.

   (ii) υπάρχουν δύο αριθμοί από αυτούς που διαλέξαμε που είναι διαδοχικοί.

   Ορίζεται το ίδιο σύνολο $\mathcal{A}$ ενώ για σύνολο $\mathcal{B}$ θεωρούμε το σύνολο των ζευγών

   $$\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\ldots,\{2n-1,2n\}\}$$

   Προφανώς τα ζεύγη του $\mathcal{B}$ αποτελούν μια διαμέριση του $[2n]$ με την ιδιότητα τα στοιχεία κάθε ζεύγους να είναι διαδοχικοί αριθμοί. Θεωρούμε την απεικόνιση $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ η οποία αντιστοιχίζει τον αριθμό x του $\mathcal{A}$ στο ζεύγος του $\mathcal{B}$ που περιέχει το x. Επειδή

   $$n+1 = |\mathcal{A}| > |\mathcal{B}| = n$$

   από την αρχή του περιστερεώνα έπεται ότι η g δεν είναι $1-1$ και άρα υπάρχουν $x, y \in \mathcal{A}$ με $g(x) = g(y)$ δηλαδή τα x, y είναι διαδοχικοί αριθμοί.

(iii) υπάρχουν δύο αριθμοί από αυτούς που διαλέξαμε που έχουν άθροισμα $2n+1$.
(**Υπόδειξη** Θεωρείστε το σύνολο
$$\{\{1,2n\},\{2,2n-1\},\ldots,\{n,n+1\}\}.)$$

3. Αν υπάρχουν n άτομα σε ένα δωμάτιο, τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον άτομα που έχουν τον ίδιο αριθμό γνωστών στο δωμάτιο (θεωρούμε ότι η σχέση γνωριμίας είναι συμμετρική).

   Πραγματικά, έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο των n ατόμων και $f : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ με $f(x)$ το πλήθος των γνωστών του $x \in \mathcal{A}$. Προφανώς
$$0 \le f(x) \le n-1.$$
   Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν
$$x, y \in \mathcal{A} \text{ με } f(x) = 0 \text{ και } f(y) = n-1$$
   Άρα
$$\text{ή } f(x) \in \{0,1,\ldots,n-2\} \text{ για κάθε } x \in \mathcal{A},$$
$$\text{ή } f(x) \in \{1,2,\ldots,n-1\} \text{ για κάθε } x \in \mathcal{A}.$$
   Επειδή
$$|A| > |\{0,1,\ldots,n-2\}| = |\{1,2,\ldots,n-1\}| = n-1$$
   από την αρχή του περιστερεώνα έπεται ότι f δεν είναι $1-1$ άρα υπάρχουν $x, y \in \mathcal{A}$ με $f(x) = f(y)$.

Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι αν υπάρχουν n φωλιές για $kn+1$ περιστέρια τότε τουλάχιστον μια φωλιά θα έχει $k+1$ περιστέρια.

2. Πόσα άτομα χρειαζόμαστε για να είμαστε σίγουροι ότι 2 άτομα θα έχουν τουλάχιστον την ίδια μέρα γενέθλια; το ίδιο πρόβλημα για 3 άτομα; το ίδιο πρόβλημα για q άτομα;

3. Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} = \{1,2,\ldots,1002\}$ με $|\mathcal{A}| = 502$. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $\mathcal{A}$ που διαιρεί κάποιο άλλο στοιχείο του $\mathcal{A}$.

Εργασία Να αποδείξετε ότι

1. Μεταξύ 6 ατόμων υπάρχουν 3 που γνωρίζονται μεταξύ τους ή 3 που δεν γνωρίζονται μεταξύ τους.

3.2 Αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού

Οι παρακάτω κανόνες μεταξύ συνόλων ισχύουν για **πεπερασμένα σύνολα**

Κανόνας αθροίσματος

$$|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$$

όταν τα $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι ξένα.

Γενικότερα,

$$|\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i| = \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{A}_i|$$

όταν τα A_i είναι ανά δύο ξένα.

Κανόνας γινομένου

$$|\mathcal{A} \times \mathcal{B}| = |\mathcal{A}||\mathcal{B}|$$

Γενικότερα

$$|\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n| = |\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2| \cdots |\mathcal{A}_n|$$

Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \tag{1}$$

Γενικότερα

$$|\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n, \tag{2}$$

όπου

S_1 είναι το άθροισμα των $|\mathcal{A}_i|$, $\forall 1 \leq i \leq n$

S_2 είναι το άθροισμα των $|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j|$, όπου $1 \leq i < j \leq n$

S_3 είναι το άθροισμα των $|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k|$, όπου $1 \leq i < j < k \leq n$.

$\ldots$

S_n είναι $|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_n|$.

Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού πολλές φορές δίνεται στην επόμενη ισοδύναμη μορφή:

Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ τότε ισχύει

$$|\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}| = |\mathcal{E}| - (|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|) + |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \tag{3}$$

Γενικότερα,

$$|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \cdots \cap \overline{\mathcal{A}_n}| = |\mathcal{E}| - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n \tag{4}$$

Εφαρμογές

- Όταν ζητείται ο πληθάριθμος ενός συνόλου, του οποίου τα στοιχεία *έχουν μια τουλάχιστον ιδιότητα* από n δοσμένες ιδιότητες, τότε εφαρμόζεται ο πρώτος τύπος.

$$|\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n.$$

- Όταν ζητείται ο πληθάριθμος ενός συνόλου, του οποίου τα στοιχεία *δεν έχουν καμιά ιδιότητα* από n δοσμένες ιδιότητες, τότε εφαρμόζεται ο δεύτερος τύπος.

$$|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \cdots \cap \overline{\mathcal{A}_n}| = |\mathcal{E}| - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n.$$

όπου
S_1 είναι το άθροισμα των $|\mathcal{A}_i|$, $\forall 1 \leq i \leq n$
S_2 είναι το άθροισμα των $|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j|$, όπου
$1 \leq i < j \leq n$
S_3 είναι το άθροισμα των $|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k|$,
όπου $1 \leq i < j < k \leq n$.
$\ldots$
S_n είναι $|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_n|$.

Παραδείγματα

1. Έρευνα αγοράς για ένα προϊόν

	Ερωτηθέντα άτομα: 2000	Άτομα που γνωρίζουν το προϊόν: 1150
Παντρεμένοι	1281	632
Γυναίκες	1028	410
Παντρεμένες γυναίκες	838	218

Πόσα από τα ερωτηθέντα άτομα έχουν **τουλάχιστον μια** από τις παρακάτω ιδιότητες

γνωρίζουν το προϊόν

είναι παντρεμένοι
είναι γυναίκες.

Θεωρούμε τα σύνολα
$\mathcal{A}_1$: άτομα που γνωρίζουν το προϊόν,
$\mathcal{A}_2$: άτομα που είναι παντρεμένοι και
$\mathcal{A}_3$: άτομα που είναι γυναίκες

Προφανώς,

$|\mathcal{A}_1| = 1150$, $|\mathcal{A}_2| = 1281$, $|\mathcal{A}_3| = 1028$.

$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| = 632$, $|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| = 410$,
$|\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| = 838$, $|\mathcal{A}_1 \cap A_2 \cap A_3| = 218$.

Άρα ο τύπος (1) της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού (για $n = 3$) δίνει:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3| \\
&= |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_3| \\
&\quad - |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| - |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| - |\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| \\
&\quad + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| \\
&= 1150+1281+1028-632-410-838+218 \\
&= 1797.
\end{aligned}$$

(Επιπλέον, άμεσα προκύπτει ότι ανύπανδροι άνδρες που δεν γνωρίζουν το προϊόν είναι 2000 - 1797 = 203.)

2. Να βρεθεί το πλήθος των αριθμών του συνόλου [1000] που δεν είναι διαιρετοί ούτε με το 2, ούτε με το 3, ούτε με το 5.

   Έστω τα σύνολα

   $\mathcal{A}_1$: αριθμοί του [1000] που είναι διαιρετοί με το 2.

   $\mathcal{A}_2$: αριθμοί του [1000] που είναι διαιρετοί με το 3.

   $\mathcal{A}_3$: αριθμοί του [1000] που είναι διαιρετοί με το 5.

   Τότε,

   $|\mathcal{A}_1| = \left[\frac{1000}{2}\right] = 500$.

   $|\mathcal{A}_2| = \left[\frac{1000}{3}\right] = 333$.

   $|\mathcal{A}_3| = \left[\frac{1000}{5}\right] = 200$.

   $|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| = \left[\frac{1000}{6}\right] = 166$.

$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| = \left[\frac{1000}{10}\right] = 100.$
$|\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| = \left[\frac{1000}{15}\right] = 66.$
$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| = \left[\frac{1000}{30}\right] = 33.$
Άρα ο τύπος (2) της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού (για $n = 3$) δίνει:

$$\begin{aligned}
&|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \overline{\mathcal{A}_3}| \\
&= |\mathcal{E}| - (|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_3|) \\
&\qquad + (|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| + |\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3|) \\
&\qquad - |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| \\
&= 1000 - (500 + 333 + 200) + (1667 + 100 + 66) - 33 \\
&= 266.
\end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Σε μια έρευνα του Υπουργείου Τουρισμού ρωτήθηκαν 5000 άτομα αν έχουν επισκεφθεί την Κρήτη. Ο παρακάτω πίνακας δίνει κάποια στοιχεία της έρευνας αυτής:

	Ερωτηθέντα άτομα: 5000	Άτομα που είχαν επισκεφθεί την Κρήτη: 3620
Άνδρες	2597	2007
Άτομα άνω των 40 ετών	2957	2089
Άνδρες άνω των 40 ετών	1476	1088

Με χρήση της αρχής εγκλεισμού-αποκλει-σμού να βρεθεί πόσες γυναίκες κάτω των 40 ετών δεν έχουν επισκεφθεί την Κρήτη.

2. Σε μια αίθουσα βρίσκονται n άτομα τα οποία κάθονται σε n καρέκλες. Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να αλλάξουν θέσεις τα n άτομα έτσι ώστε κανείς να μην κάθεται στην αρχική του θέση.