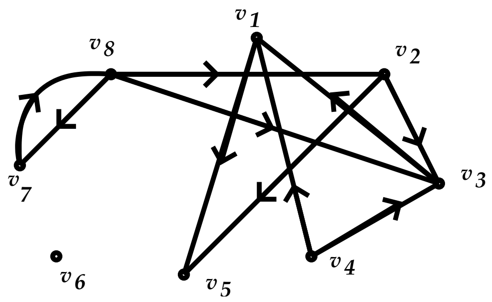
ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΤΟΞΩΝ

1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Κάθε δυάδα $G = (X(G), U(G))$, ή (X, U), όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο και U είναι ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη $(v, u) \in X^2$ ονομάζεται **γράφημα τόξων**, ή **προσανατολισμένο γράφημα**, ή **γράφημα με κατεύθυνση**, ή **διγράφημα**.

Τα στοιχεία του X καλούνται **κορυφές**, ή **σημεία**, ή **κόμβοι** όπως και στα γραφήματα δεσμών, ενώ τα στοιχεία του U καλούνται **τόξα** και συμβολίζονται γραφικά με τόξα.

Παράδειγμα : Η δυάδα $G = (X(G), U(G))$ όπου $X(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ και $U(G) = \{(v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_1), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_7, v_8), (v_8, v_2), (v_8, v_3), (v_8, v_7)\}$ είναι ένα γράφημα τόξων. Η γεωμετρική του απεικόνιση είναι η ακόλουθη:



Το τόξο (v, v), $v \in X$ ονομάζεται **βρόχος**.

Οι ορισμοί είναι αντίστοιχοι με αυτούς που δώσαμε στα γραφήματα δεσμών με τις εξής επισημάνσεις :

Τώρα ορίζεται **βαθμός εξόδου** $d_+(v)$ ενός κόμβου v (πόσοι δεσμοί ‘‘φεύγουν’’ από τον κόμβο) και **βαθμός εισόδου** $d_-(v)$ (πόσοι δεσμοί ‘‘φθάνουν’’).

Έτσι,

$$d_+(v) = |\{u \in X(G) : (v, u) \in U(G)\}|,$$

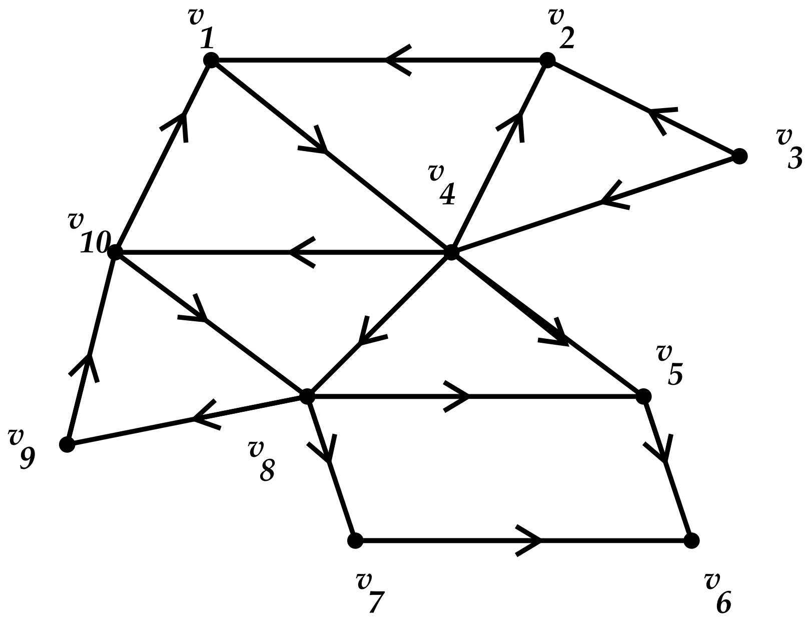
ενώ

$$d_-(v) = |\{u \in X(G) : (u, v) \in U(G)\}|$$

Προφανώς τώρα ο **βαθμός** $d(v)$ ενός κόμβου v ορίζεται από την σχέση

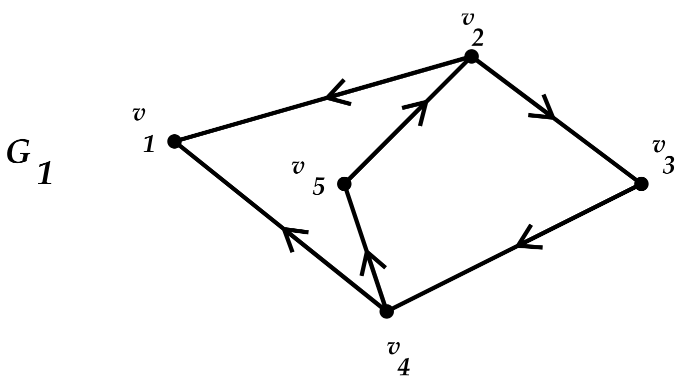
$$d(v) = d_+(v) + d_-(v).$$

Παράδειγμα : Στο επόμενο γράφημα

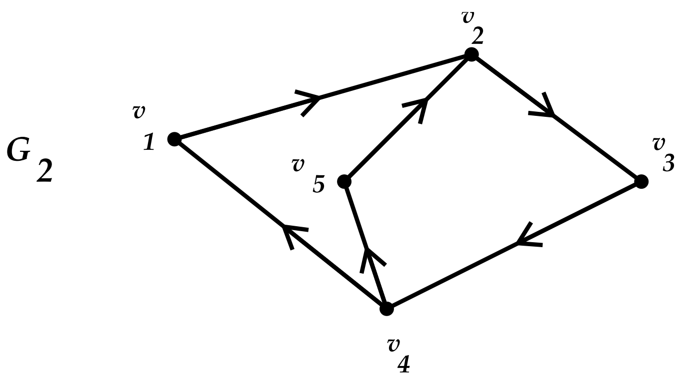


είναι $d_+(v_8) = 3$, $d_-(v_8) = 2$, $d(v_8) = 5$, $d_-(v_2) = 2$, $d_-(v_3) = 0$, κ.λπ.

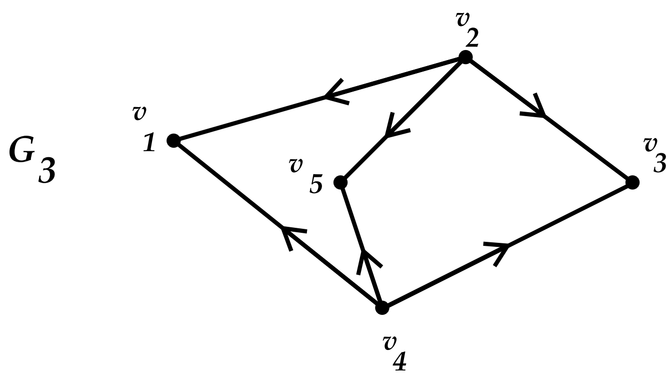
Η διαδρομή σε ένα διγράφημα πρέπει εν γένει να ''ακολουθεί'' τη διεύθυνση κάθε κόμβου.
Υπάρχουν διάφορα είδη συνεκτικότητας στα διγραφήματα :
Ένα γράφημα ονομάζεται **μονομερώς συνεκτικό** αν για οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων του υπάρχει μονοπάτι είτε από τον πρώτο προς το δεύτερο, είτε από το δεύτερο πρός τον πρώτο.
Αν για κάθε ζεύγος υπάρχει μονοπάτι και προς τις δύο κατευθύνσεις τότε το διγράφημα λέγεται **ισχυρά συνεκτικό**.
Το διγράφημα λέγεται (**ασθενώς**) **συνεκτικό** αν για κάθε ζεύγος κόμβων υπάρχει μια **ημιδιαδρομή** μεταξύ τους (δηλαδή τώρα επιτρέπεται και διάτρεξη κάποιου τόξου αντίθετα με τον προσανατολισμό του).
Παραδείγματα :



Το γράφημα G_1 είναι μονομερώς συνεκτικό (αφού για παράδειγμα, δεν υπάρχει $v_1 - v_3$ μονοπάτι).

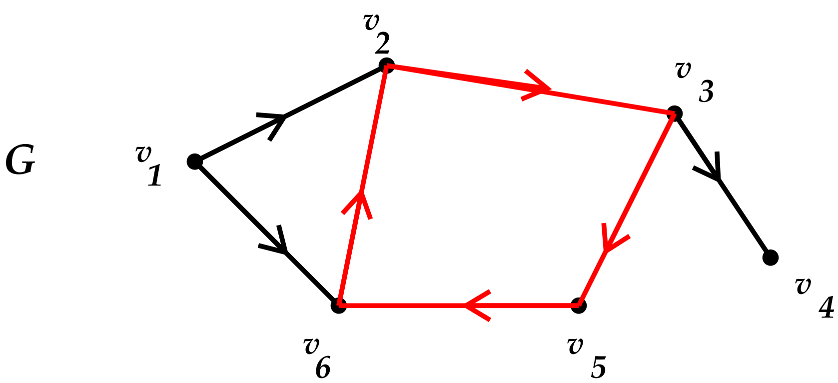


Το γράφημα G_2 είναι ισχυρά συνεκτικό.



Το γράφημα G_3 είναι ασθενώς συνεκτικό (αφού για παράδειγμα δεν υπάρχει ούτε $v_2 - v_4$, ούτε $v_4 - v_2$ μονοπάτι. Υπάρχει όμως η ημιδιαδρομή (v_2, v_3, v_4).

Συνήθως η κλειστή διαδρομή που σχηματίζεται από τόξα λέγεται **κύκλωμα**.
Παράδειγμα :

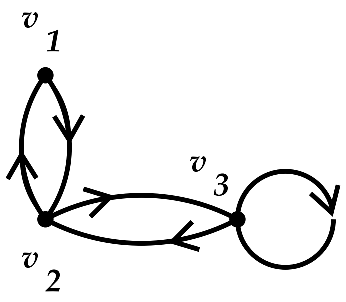


Στο γράφημα G η διαδρομή $(v_2, v_3, v_5, v_6, v_2)$ είναι κύκλωμα, ενώ η ημιδιαδρομή (v_1, v_2, v_6, v_1) δεν είναι.

Στα γραφήματα τόξων ορίζουμε και τα παρακάτω είδη γραφημάτων :
Συμμετρικό ονομάζεται ένα γράφημα τόξων $G = (X, U)$ για το οποίο ισχύει

$$(u, v) \in U \Leftrightarrow (v, u) \in U.$$

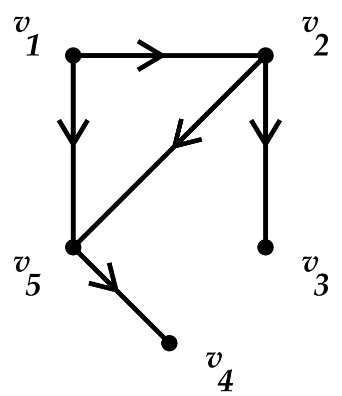
Παράδειγμα :



Αντισυμμετρικό ονομάζεται ένα γράφημα τόξων $G = (X, U)$ για το οποίο ισχύει

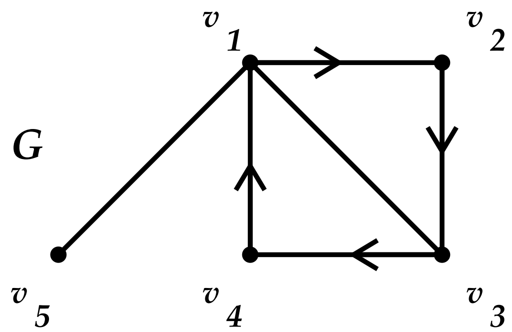
$$(u, v) \in U \Leftrightarrow (v, u) \notin U$$

Παράδειγμα :

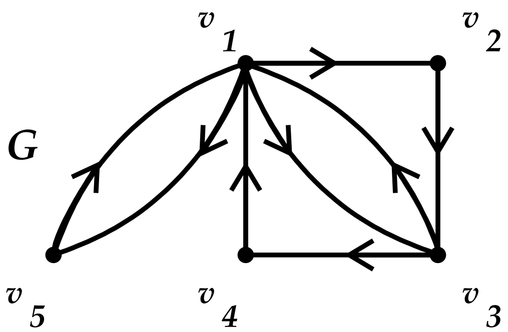


Παρατήρηση : Μερικές φορές εμφανίζονται γραφήματα που περιέχουν συγχρόνως και δεσμούς και τόξα.

Παράδειγμα :



Τα γραφήματα αυτά, τα θεωρούμε ουσιαστικά ως γραφήματα τόξων, αντικαθιστώντας κάθε δέσμο $\{v, u\}$ με δύο τόξα (v, u) και (u, v). Έτσι, το προηγούμενο παράδειγμα γράφεται :



Φυσικά, με την ίδια λογική μπορούμε γενικά οποιοδήποτε γράφημα δεσμών να το θεωρήσουμε αντίστοιχα ως γράφημα τόξων, το οποίο θα είναι προφανώς συμμετρικό. Το μειονέκτημα μιας τέτοιας προσέγγισης είναι ότι η αντίστοιχη θεωρία και οι εφαρμογές γίνονται γενικά πολύ πιο πολύπλοκες.

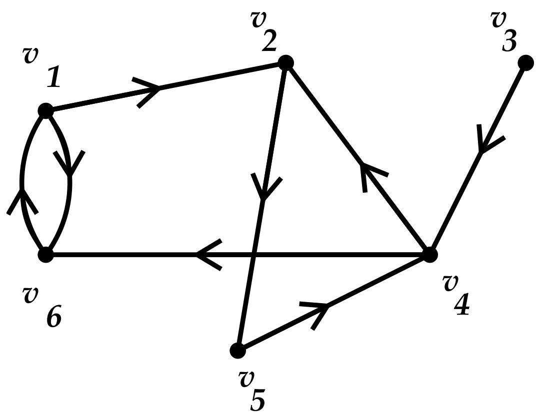
2. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΤΟΞΩΝ

Έστω $G = (X, U)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Gamma : X \to \mathcal{P}(X) \text{ με } \Gamma(v) = \{u \in X : (v, u) \in U\}.$$

Παρατήρηση : Το ζεύγος (X, Γ) ορίζει το γράφημα G ισοδύναμα με το (X, U) και γι' αυτό μπορούμε να αναφερόμαστε και στο γράφημα (X, Γ) αντί (X, U). Η Γ ονομάζεται **απεικόνιση του γραφήματος τόξων**.

Παράδειγμα : Για το γράφημα



έχουμε $\Gamma(v_1) = \{v_2, v_6\}$, $\Gamma(v_2) = \{v_5\}$, $\Gamma(v_3) = \{v_4\}$ κ.λπ.

Αντίστοιχα με τα γραφήματα δεσμών, αν $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, τότε

$$\Gamma(A) = \Gamma(v_1) \cup \Gamma(v_2) \cup \cdots \cup \Gamma(v_k)$$

και (αναδρομικά), για $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma^n(v) = \Gamma(\Gamma^{n-1}(v)).$$

Παραδείγματα : Για το τελευταίο γράφημα έχουμε :
$\Gamma^2(v_1) = \Gamma(\Gamma(v_1)) = \Gamma(\{v_2, v_6\}) = \{v_1, v_5\}$ και
$\Gamma^3(v_1) = \Gamma(\Gamma^2(v_1)) = \Gamma(\{v_1, v_5\}) = \{v_2, v_4, v_6\}$.

Ανάλογα ορίζουμε

$$\Gamma^{-1} : X \to \mathcal{P}(X) \text{ με } \Gamma^{-1}(v) = \{u \in X : (u, v) \in U\},$$

$$\Gamma^{-1}(A) = \Gamma^{-1}(v_1) \cup \Gamma^{-1}(v_2) \cup \cdots \cup \Gamma^{-1}(v_k), \text{ όπου } A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

και (αναδρομικά) για $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma^{-n}(v) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-n+1}(v)).$$

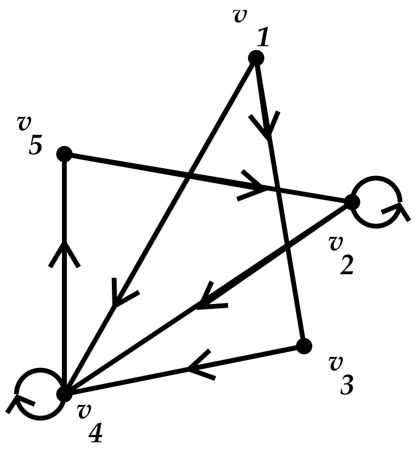
Παράδειγμα : Για το τελευταίο γράφημα έχουμε :
$\Gamma^{-1}(v_1) = \{v_6\}$, $\Gamma^{-1}(v_2) = \{v_1, v_4\}$, $\Gamma^{-1}(v_3) = \emptyset$ κ.λπ. και
$\Gamma^{-2}(v_6) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(v_6)) = \{v_3, v_5, v_6\}$.

3. ΜΗΤΡΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΤΟΞΩΝ

Έστω $G = (X, U)$ ένα γράφημα τόξων. Ορίζουμε την $|X| \times |X|$ μήτρα M_G ή M του G ως εξής :

$$M = [m_{ij}] \text{ με } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } (x_i, x_j) \in U \\ 0, & \text{αν } (x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$$

Η μήτρα αυτή ονομάζεται **μήτρα (γειτονικότητας) του γραφήματος τόξων**.
Παράδειγμα : Στο γράφημα G



αντιστοιχεί η μήτρα

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

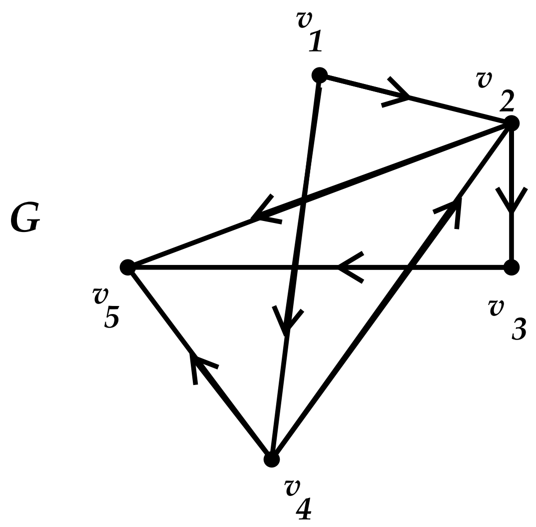
Ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Προταση 1. *Ο αριθμός των διαδρομών μήκους ν, από τον v_i στον v_j ισούται με το στοιχείο μ_{ij} της μήτρας $M^\nu = [\mu_{ij}]$.*

Παράδειγμα : Για το γράφημα
έχουμε

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^5 = O_5.$$



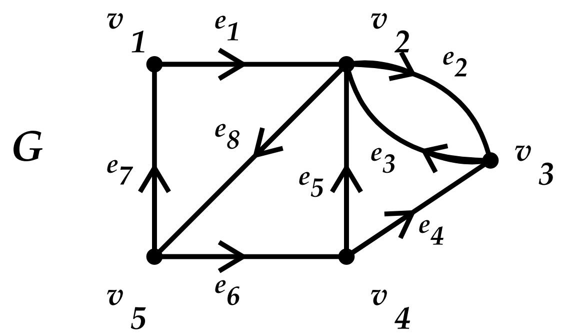
Στην M^3 έχουμε $q_{15} = 2$, άρα υπάρχουν δύο διαδρομές μήκους 3 από το v_1 ως το v_5. (Πράγματι, είναι οι (v_1, v_2, v_3, v_5), (v_1, v_4, v_2, v_5)), ενώ $q_{14} = 0$, άρα δεν υπάρχει διαδρομή μήκους 3 από το v_1 στο v_4. Στην M^4 έχουμε $q_{15} = 1$, άρα υπάρχει μια διαδρομή μήκους 4 από το v_1 ως το v_5 : $(v_1, v_4, v_2, v_3, v_5)$.

Στα γραφήματα τόξων εμφανίζεται μερικές φορές και η **μήτρα τόξων** N του γραφήματος, η οποία ορίζεται ως εξής :

Αν $G = (X, U)$, με $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $U = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, τότε η μήτρα $N = [r_{ij}]$ έχει n γραμμές, m στήλες και

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο κόμβος } v_i \text{ είναι αρχή του τόξου } e_j, \\ -1, & \text{αν ο κόμβος } v_i \text{ είναι τέλος του τόξου } e_j, \\ 0, & \text{αν ο κόμβος } v_i \text{ δεν είναι άκρο του τόξου } e_j. \end{cases}$$

Παράδειγμα : Για το γράφημα τόξων G



η μήτρα τόξων είναι η

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ - ΣΤΑΘΜΕΣ

Αν έχουμε μια δραστηριότητα που αποτελείται από διάφορες τεχνολογικές διαδικασίες, οι οποίες υπόκεινται σε κάποιες σχέσεις προτεραιότητας, μπορούμε να σχηματίσουμε το σχετικό γράφημα τόξων και να κατατάξουμε τις κορυφές σε στάθμες (που καθορίζουν τη ‘‘σειρά’’ με την οποία πραγματοποιούνται οι διαδικασίες) χρησιμοποιώντας την παρακάτω μέθοδο (Μέθοδος Demoucron). (Η μέθοδος εφαρμόζεται με την προϋπόθεση ότι το αντίστοιχο γράφημα δεν έχει κυκλώματα) :

Σχηματίζουμε ένα πίνακα (με p γραμμές) ως εξής :

Στις πρώτες p στήλες $v_1, v_2, \ldots, v_p$ τοποθετούμε 0 και 1, όπως ακριβώς στη μήτρα γειτονικότητας του γραφήματος, (συνήθως παραλείπουμε τα 0).

Τις επόμενες στήλες $S_0, S_1, \ldots$, τις συμπληρώνουμε διαδοχικά, χρησιμοποιώντας την εξής αναδρομική διαδικασία :

Στη στήλη S_0 γράφουμε στις αντίστοιχες γραμμές το άθροισμα των 1 κάθε γραμμής (δηλαδή, τους βαθμούς εξόδου των κόμβων $v_1, v_2, \ldots, v_p$). Γράφουμε κάτω από τον πίνακα τους κόμβους με βαθμό εξόδου 0. Οι κόμβοι αυτοί θα τοποθετηθούν στην τελευταία στάθμη. (Δεν θα ασχοληθούμε άλλο με τις γραμμές που αντιστοιχούν στους κόμβους αυτούς. Γράφουμε $\times$ σε κάθε στήλη, δεξιά από κάθε 0).

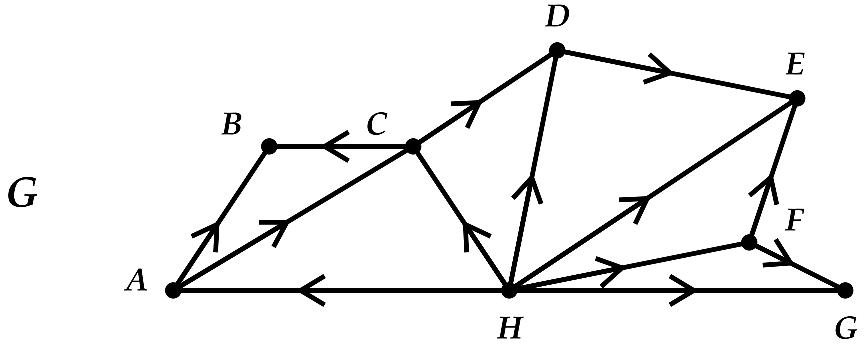
Έστω τώρα, ότι έχουμε συμπληρώσει μέχρι και τη στήλη S_n, $(n \geq 0)$ και έχουμε γράψει κάτω από τον πίνακα και τους κόμβους $v_i, \ldots, v_j$ που αντιστοιχούν στα 0 της στήλης S_n, (οι οποίοι θα είναι οι κόμβοι στην n-στή πριν από το τέλος στάθμη).

Στη στήλη S_{n+1} γράφουμε τα στοιχεία της στήλης S_n, καθένα μειωμένο κατά τόσες μονάδες, όσα είναι τα 1 που περιέχονται στις στήλες $v_i, \ldots, v_j$ της αντίστοιχης γραμμής. Οι κόμβοι που αντιστοιχούν στα 0 της στήλης αυτής, είναι τα στοιχεία της $(n+1)$-στής πριν από το τέλος στάθμης.

Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν σχηματισθεί μια στήλη S_l που αποτελείται μόνο από 0 και $\times$.

Παράδειγμα : Έστω A, B, C, D, E, F, G, H οι τεχνολογικές διαδικασίες, που υπόκεινται σε μια σχέση ‘‘τεχνολογικής προτεραιότηταςʃ ’’ ως εξής : $A > B$, $A > C$, $C > B$, $C > D$, $D > E$, $F > E$, $F > G$, $H > A$, $H > C$, $H > D$, $H > E$, $H > F$, $H > G$, (γράφουμε $x > y$, όταν η δραστηριότητα x προηγείται της y).

Σχηματίζουμε το αντίστοιχο γράφημα τόξων G :

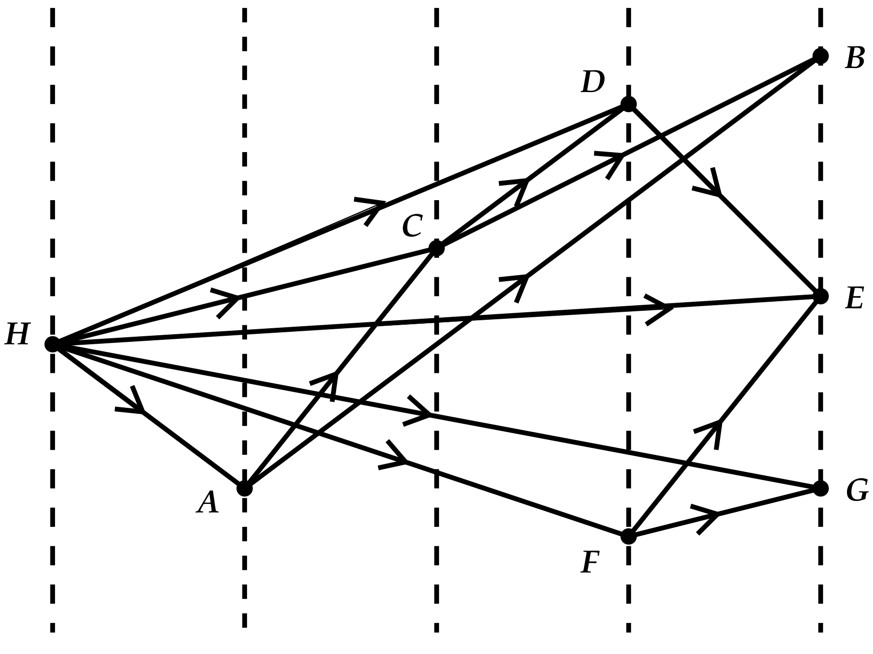


Η παραπάνω διαδικασία δίνει :

	A	B	C	D	E	F	G	H	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
A		1	1						2	1	1	0	×
B									0	×	×	×	×
C		1		1					2	1	0	×	×
D					1				1	0	×	×	×
E									0	×	×	×	×
F					1		1		2	0	×	×	×
G									0	×	×	×	×
H	1		1	1	1	1	1		6	4	2	1	0

Τα B, E, G βρίσκονται στην τελευταία στάθμη.
Τα D, F βρίσκονται στην προτελευταία στάθμη.
Το C βρίσκεται στην τρίτη από το τέλος στάθμη.
Το A βρίσκεται στην τετάρτη από το τέλος στάθμη.
Το H βρίσκεται στην πρώτη στάθμη,

οπότε



5. ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΤΟΞΩΝ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

Υποθέτουμε ότι για τις εργασίες ενός έργου ισχύει ο παρακάτω πίνακας, όπου το i (αντίστοιχα το j) συμβολίζει την έναρξη (αντίστοιχα τη λήξη) μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας σε ένα έργο, ενώ ο χρόνος t_{ij} είναι ο αναμενόμενος χρόνος για την πραγματοποίηση της δραστηριότητας (i, j) του έργου.

Δραστηριότητες		Χρόνος
i	j	t_{ij}
1	2	5
1	3	6
1	4	6
2	3	3
2	5	4
2	6	3
3	4	5
3	6	6
3	8	4
3	9	7
4	7	7
5	9	2
5	11	4
6	7	4
6	9	5
7	8	7
7	11	2
8	9	3
8	10	2
9	10	3
10	12	8
11	12	9

Θεωρούμε ότι η έναρξη της δραστηριότητας (j, k) λαμβάνει χώρα μόνο όταν έχουν πραγματοποιηθεί όλες οι δραστηριότητες (i, j), (για $j \neq 1$).

Από τα παραπάνω προκύπτει ένα γράφημα τόξων με κόμβους τις ενάρξεις και τις λήξεις των δραστηριοτήτων, τόξα τις αντίστοιχες δραστηριότητες και αριθμούς στα τόξα οι οποίοι δίνουν τους αναμενόμενους χρόνους για κάθε τέτοια δραστηριότητα. Ο κόμβος 1 δίνει την έναρξη και ο κόμβος 12 τη λήξη του έργου.

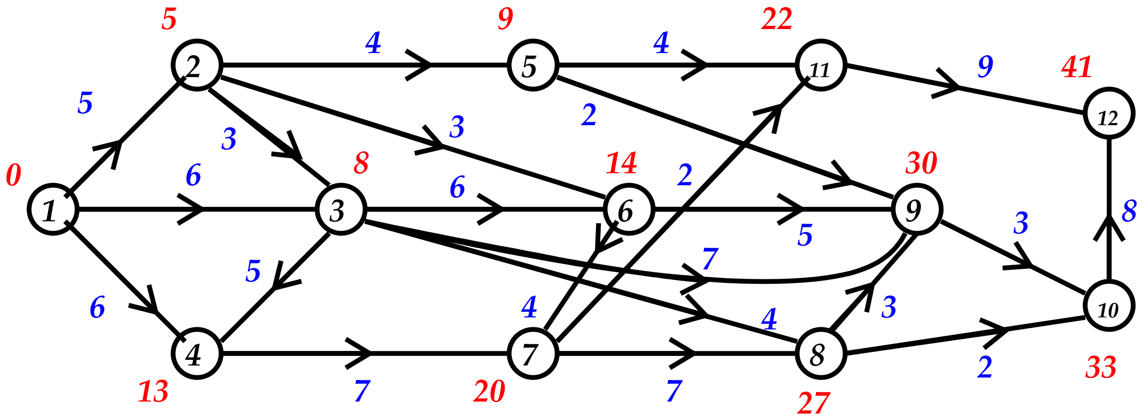
Το γράφημα δεν πρέπει να περιέχει κυκλώματα.

Ζητάμε τον ενωρίτερο χρόνο κατά τον οποίο μπορεί να ολοκληρωθεί το έργο. Αρκεί λοιπόν να βρούμε διαδοχικά τον ενωρίτερο χρόνο ολοκλήρωσης για να φτάσουμε σε κάθε κόμβο, υποθέτοντας ότι ο ενωρίτερος χρόνος για το 1 (έναρξη) είναι 0.

Ο ζητούμενος ενωρίτερος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου, είναι λοιπόν προφανώς ο ενωρίτερος χρόνος για τον κόμβο 12 (λήξη του έργου).

Οι διαδοχικοί χρόνοι είναι σημειωμένοι δίπλα στην κάθε κορυφή του γραφήματος.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο ενωρίτερος χρόνος για την ολοκλήρωση του έργου με τα δεδομένα του προηγούμενου πίνακα είναι 41.



Ο δρόμος (1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 12) που αντιστοιχεί στον ανωτέρω χρόνο ονομάζεται **κρίσιμος δρόμος** του έργου και οι αντίστοιχες δραστηριότητες **κρίσιμες δραστηριότητες**.