

1. Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων που n ανδρόγυνα μπορούν να καθίσουν σε ένα ευθύγραμμο τραπέζι έτσι ώστε σε k καθορισμένα ανδρόγυνα οι σύζυγοι να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο.

Λύση Θεωρούμε ότι κάθε ένα από τα k καθορισμένα ανδρόγυνα είναι ένα αδιαίρετο στοιχείο οπότε το πλήθος των στοιχείων που πρέπει να τοποθετήσουμε στον ευθύγραμμο τραπέζι είναι ίσο με $2n - k$. και επομένως θα υπάρχουν $2n - k$ τρόποι τοποθέτησης. Σε κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους τοποθέτησης υπάρχουν δύο επιλογές τοποθέτησης καθενός από τα k καθορισμένα ζευγάρια (δηλαδή ο άνδρας να προηγείται ή να έπεται της γυναίκας). Άρα ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{k \text{ φορές}} (2n - k)! = 2^k (2n - k)!$$

2. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα στρογγυλό τραπέζι με 9 όμοιες θέσεις 9 άτομα.

Λύση

Σε κάθε τρόπο τοποθέτησης των 9 ατόμων στο τραπέζι αντιστοιχούν 9 μεταθέσεις του συνόλου $[9]$ προκύπτουν με κυκλική εναλλαγή των στοιχείων τους. Έτσι για παράδειγμα για τον τρόπο τοποθέτησης του παραπάνω σχήματος προκύπτουν οι μεταθέσεις : $(1, 3, 7, 6, 2, 4, 9, 5, 8)$, $(3, 7, 6, 2, 4, 9, 5, 8, 1)$, $(7, 6, 2, 4, 9, 5, 8, 1, 3)$, $(6, 2, 4, 9, 5, 8, 1, 3, 7)$, $(2, 4, 9, 5, 8, 1, 3, 7, 6)$, $(4, 9, 5, 8, 1, 3, 7, 6, 2)$, $(9, 5, 8, 1, 3, 7, 6, 2, 4)$, $(5, 8, 1, 3, 7, 6, 2, 4, 9)$, $(8, 1, 3, 7, 6, 2, 4, 9, 1)$.

Αν \mathcal{K} είναι το σύνολο όλων των τρόπων τοποθέτησης των 9 ατόμων στο τραπέζι και \mathcal{S} το σύνολο όλων των μεταθέσεων του $[9]$ τότε ορίζουμε C_i , $i \in \mathcal{K}$, το σύνολο όλων των μεταθέσεων του \mathcal{S} που προκύπτουν από το i . Προφανώς, η οικογένεια $(C_i)_{i \in \mathcal{K}}$ είναι μια διαμέριση του \mathcal{S} και $|C_i| = 9$, για κάθε $i \in \mathcal{K}$. Οπότε προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}| &= \sum_{i \in \mathcal{K}} |C_i| \Leftrightarrow \\ 9! &= \underbrace{9 + 9 + \cdots + 9}_{\mathcal{K} \text{ φορές}} \Leftrightarrow \\ 9! &= |\mathcal{K}| \cdot 9 \Rightarrow |\mathcal{K}| = \frac{9!}{9} = 8! \end{aligned}$$

3. Να υπολογισθεί ο αριθμός των διαφόρων τρόπων που μπορούν να καθίσουν σε μια σειρά n αγόρια και k κορίτσια, $k \leq n + 1$, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δυο κορίτσια που να κάθονται το ένα δίπλα στο άλλο.

Λύση Καταρχήν τοποθετούμε τα αγόρια. Ο αριθμός τοποθέτησης των αγοριών είναι ίσος με τον αριθμό των μεταθέσεων των n αγοριών δηλαδή $n!$.

Για κάθε μετάθεση (a_1, a_2, \dots, a_n) του συνόλου των αγοριών υπάρχουν $n + 1$ επιτρεπτές θέσεις για τα κορίτσια. Έτσι ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να τοποθετηθούν τα k κορίτσια, για τη μετάθεση αυτή των αγοριών, ισούται με τον αριθμό των διατάξεων των $n + 1$ ανά k δηλαδή $P(n + 1, k)$.

Άρα, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με

$$n!P(n+1, k) = \frac{n!(n+1)!}{(n+1-k)!}$$

Ασκήσεις

1. Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
 - (i) αν πρέπει να έχουν τα ψηφία τους διαφορετικά,
 - (ii) αν τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται,
 - (iii) αν πρέπει να είναι άρτιοι αριθμοί και τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά
 - (iv) αν το άθροισμα του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου τους είναι ίσο με 4 και τα ψηφία τους μπορούν να επαναλαμβάνονται.
2. Πόσες είναι οι μεταθέσεις των γραμμάτων της λέξης
Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Υ Π Ο Λ Ι Σ
3. Κατά πόσους τρόπους ένα τριμελές συμβούλιο μπορεί να σχηματισθεί από 4 αντρόγυνα,
 - (i) αν όλοι είναι εξίσου εκλέξιμοι,
 - (ii) αν το συμβούλιο πρέπει να περιλαμβάνει δύο γυναίκες και ένα άντρα,
 - (iii) αν δεν επιτρέπεται δύο σύζυγοι να περευρίσκονται στο συμβούλιο.
4. Πόσες λέξεις μπορούν να κατασκευασθούν χρησιμοποιώντας όλα τα γράμματα της λέξης Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Η και πόσες από αυτές έχουν τα γράμματα Α και Ρ διαδοχικά.
5. Πέντε άτομα μπαίνουν σε ασανσέρ στο ισόγειο ενός κτιρίου με 4 ορόφους. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν στους ορόφους.
6. Με πόσους τρόπους μπορούν να χωρισθούν 20 φοιτητές σε 3 ομάδες των 10, 6, και 4 ατόμων αντίστοιχα.
7. Από 21 καθηγητές εκ των οποίων 8 είναι μαθηματικοί, 6 φυσικοί και 7 χημικοί θέλουμε να σχηματίσουμε μια επιτροπή από 5 καθηγητές στους οποίους τουλάχιστον ένας πρέπει να είναι φυσικός, για να πάρουν μέρος σε ένα συνέδριο. Πόσες επιτροπές μπορούν να σχηματισθούν.
8. Κατά πόσους τρόπους 4 λευκές, 5 κίτρινες και 9 μαύρες μπάλες μπορούν να διαταχθούν
 - (i) χωρίς περιορισμό
 - (ii) αν κάθε διάταξή τους αρχίζει με λευκή και τελειώνει με μαύρη μπάλα.