Μαθηματικά στις 3 διαστάσεις

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Μ. Μαύρη
m.mavri@ba.aegean.gr

Περιεχόμενα

- Ορισμός
- Όρια Συναρτήσεων πολλών μεταβλητών
- Συνέχεια Συναρτήσεων πολλών μεταβλητών
- Παράγωγοι συναρτήσεων πολλών μεταβλητών
- Παράγωγοι συναρτήσεων πολλών μεταβλητών
- Ασκήσεις στις μερικές παραγώγους
- Ακρότατα συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

<u>Ορισμοί</u>:

Το σύνολο $\Re^n$

Έστω $\Re$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

$$\text{Θέτουμε } \Re^n = \underbrace{\Re x \Re x \ldots x \Re}_{\text{n φορές}}$$

Στο σύνολο $\Re^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ x_i\in\Re,\ i=1,2,\ldots,n\}$ για τυχαία $x,y\in \Re^n$ και $\alpha \in \Re$

Ορίζουμε τις πράξεις

$x+y=(x_1,x_2,\ldots,x_n)+ (y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$

$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,..,\alpha x_n)$

Το $\Re^n$= εφοδιασμένο με αυτές τις πράξεις λέγεται διανυσματικός χώρος

Πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Θα μελετήσουμε συναρτήσεις f με πεδίο ορισμού $D(f)\subseteq \Re^n$ και πεδίο τιμών $R(f) \subseteq \Re$

Τέτοιες συναρτήσεις που έχουν τύπο της μορφής

$$f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

λέγονται πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι μια συνάρτηση

$$f:D\subseteq \Re^2\to \Re$$

όπου $D=\{(x,y) \in \Re^2 :f(x,y) \in \Re\}$

Όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών

<u>*Πεπερασμένο Όριο*</u>

Λέμε ότι μια συνάρτηση f τείνει στον αριθμό l, όταν το ζεύγος (x,y) τείνει στο ζεύγος (α,β) και το γράφουμε

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} f(x,y) = l$$

αν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε

$$|f(x,y)-l|<\varepsilon$$

αν $|x-\alpha|<\delta$, $|y-\beta|<\delta$ και $(x,y)\neq(\alpha,\beta)$

<u>*Άπειρο*</u>

Λέμε ότι μια συνάρτηση απερίζεται θετικά (αντίστοιχα αρνητικά) όταν το ζεύγος (x,y) τείνει στο ζεύγος (α,β) και το γράφουμε

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} f(x,y) = \infty \quad \left(\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} f(x,y) = -\infty\right)$$

αν για κάθε M>0, υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε f(x,y)>M (f(x,y)<-M)

αν $|x-\alpha|<\delta$, $|y-\beta|<\delta$ και $(x,y)\neq(\alpha,\beta)$

Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Αντί του συμβολισμού $\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} f(x,y) = l$

χρησιμοποιούμε ισοδύναμα και τον συμβολισμό

$$f(x,y) \to l \text{ όταν } (x,y) \to (\alpha,\beta)$$

Το σημείο k:=(α,β) μπορεί να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού D(f) της συνάρτησης, αλλά να είναι **σημείο συσσώρευσης** του D(f) .

ΔΗΛΑΔΗ υπάρχουν δύο ακολουθίες $(x_n)n\in\aleph$ και $(y_n)n\in\aleph \in D(f) - \{(\alpha,\beta)\}$, $n\in\aleph$ και $x_n \to k$ και $y_n \to k$

Αρχή Μεταφοράς

Έστω f μια συνάρτηση $f{:}D\subseteq \Re^2 \to \Re$. Τότε οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} f(x,y) = l$

(β) Για κάθε ακολουθία xn από το D(f) για κάθε $n\in\aleph$ $x_n \to \kappa$ με κ:=(α,β) και $f(x,y) \to l$

Συνέχεια Συνάρτησης

Μια πραγματική συνάρτηση f δύο μεταβλητών λέμε ότι είναι **συνεχής** σ΄ ένα σημείο (α,β) ∈ D(f) αν

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} f(x,y) = f(\alpha,\beta)$$

Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα:</u> Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Εστω ακολουθίες $(x_n)_{n\in\aleph} = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ $(y_n)_{n\in\aleph} = \left(0,\frac{1}{n}\right) \to (0,0)$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \qquad f\left(0,\frac{1}{n}\right) = 0 \to 0$$

Αρα δεν υπάρχετο όριο

Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα:</u> Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} x\sin\frac{1}{y}$$

Εστω ακολουθίες $(x_n)_{n\in\aleph} = \left(1, \frac{1}{2\pi n}\right) \to (1,0)$ $(y_n)_{n\in\aleph} = \left(1, \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) \to (1,0)$

$$f(x,y) = x\sin\frac{1}{y}$$

$$f\left(1, \frac{1}{2\pi n}\right) = \sin 2\pi n = 0 \to 0 \qquad f\left(1, \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$$

Αρα δεν υυπάρχετο όριο

Παράγωγος συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$f: D \subseteq \Re^2 \to \Re.$$

Ορίζουμε τις μερικές παραγώγους σ' ένα σημείο (xoyo) $\in$ D(f) ως προς x & y αντίστοιχα με τους τύπους

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D\left(f_x\right) \to \Re, \frac{\partial f}{\partial y} : D\left(f_y\right) \to \Re$$

Η f_x λέγεται **μερική παράγωγος της *f* ως προς x** και

η f_y **μερική παράγωγος της *f* ως προς y**

Παραδείγματα

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν υπάρχουν μερικές παραγωγοί $\dfrac{\partial f(1,0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(1,0)}{\partial y}$

της συνάρτησης $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, y \neq 0 \\ 0, y = 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,0+h) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} = +\infty$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = +\infty$$

Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα</u>: Να εξεταστεί αν υπάρχουν μερικές παραγωγοί

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \; f(x,y) = e^{xy}\sin x\cos y \; (x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\sin x\cos y\right) = ye^{xy}\sin x\cos y + e^{xy}\cos x\sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\sin x\cos y\right) = xe^{xy}\sin x\cos y - e^{xy}\sin x\sin y$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν υπάρχουν μερικές παραγωγοί

$$\frac{\partial f(0,1,0)}{\partial x}, \frac{\partial f(0,1,0)}{\partial y}, \frac{\partial f(0,1,0)}{\partial z}$$

της συνάρτησης $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2+z^2}, (y,z) \neq (0,0) \\ 0, (y,z) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,1,0) - f(0,1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,1+h,0) - f(0,1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,1,0+h) - f(0,1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης

Θεώρημα: Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f(x,y) είναι συνεχής και οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι επίσης συνεχείς. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις x=x (u,v) και y=y(u,v) είναι τέτοιες ώστε να υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι ορίζονται όλες και είναι $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$. Τότε η f είναι συνάρτηση των u,v και ισχύει:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Αν η $f(x,y)=2x^2+xy-y^2+2x-3y+5$ και $x=2u-v$, $y=u+v$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial v}$

Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y - 3$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2 \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (4x + y + 2)2 + (x - 2y - 2)1 = 9x + 1$$

$$= 18u - 9v + 1$$

Παρομοίως

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -1 \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = (4x + y + 2)(-1) + (x - 2y - 3)1 = -3(x + y) - 5$$

$$= -9u - 5$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 2: Αν η f(x,y)=e^xcosy2x-3y+5 και x=u^2-v^2, y=2uv

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial u}$ και $\frac{\partial f}{\partial v}$

Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{excosy}, \frac{\partial f}{\partial y} = \text{e - xsiny}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2u \; \frac{\partial y}{\partial u} = -2v, \; \frac{\partial y}{\partial u} = 2v \; \frac{\partial y}{\partial u} = 2u$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = e^x \text{cosy}2u - e^x \text{siny}2v = 2eu^2 - v^2(u\cos(2uv) - v\sin(2uv))$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = e^x \text{cosy}(-2v) - e^x \text{siny}2u = -2eu^2 - v^2(v\cos(2uv) + u\sin(2uv))$$

Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$f: D \subseteq \Re^2 \to \Re.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παραγώγους $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \; f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

και για κάποιο σημείο $(x_o y_o)$ υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h}$$

Θέτουμε Α= $\boldsymbol{f_{xx}}$ (x_0,y_0) και ονομάζουμε το Α τιμή της δεύτερης παραγώγου της f ως προς το x και
Θέτουμε Β= $\boldsymbol{f_{yy}}$ (x_0,y_0) και ονομάζουμε το Β τιμή της δεύτερης παραγώγου της f ως προς το y

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \; f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Μπορούμε να ορίσουμε ακόμη και $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \; f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Θεώρημα: Αν οι *f*, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ορίζονται όλες και είναι

συνεχείς στο σημείο (x_0, y_0) τότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Θεώρημα των μεικτών παραγώγων

Ακρότατα Συνάρτησης

Έστω συνάρτηση f (x,y). Το σημείο (x_0,y_0) ονομάζεται στάσιμο αν

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$$

Αν μια συνάρτηση f(x,y) είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο $(x_0,y_0)\in\Delta(f)$ το οποίο είναι τοπικό ακρότατο τότε αυτό το σημείο είναι στάσιμο

Αν ένα σημείο $(x_0,y_0)\in\Delta(f)$ είναι στάσιμο και $D=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\end{vmatrix}$

Αν D>0 και $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0$ τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο(x_0,y_0)

Αν D>0 και $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}>0$ τότε παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο(x_0,y_0)

Αν D<0 τότε το(x_0,y_0) ονομάζεται σαγματικό(και δεν έχει ούτε τ.μέγιστο ούτε τ.ελάχιστο)

Αν D=0 μπορεί να έχει ακρότατο, μπορεί και όχι

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης: $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y$ $\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x$ Το σύστημα έχει λύση τα σημεία M(1,1) και N(0,0)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$$

Στο σημείο M(1,1) $D=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy-9=27$

D>0 και $\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2}=6>0$ τότε παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο(1,1)

Στο σημείο N(0,0) $D=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy-9=-9$

D<0 *δεν* παρουσιάζει ούτε τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο στο(0,0)

Παραδείγματα

Παράδειγμα 2: Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης: $f(x,y)=y^3-x^2+16x-12y+5$

$\frac{\partial f}{\partial x}=-2x+16$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-12$ Το σύστημα έχει λύση τα σημεία M(3,2) και N(3,-2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$$

Στο σημείο M(3,2) $D=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = -12y = -24$

D<0 $\delta\varepsilon\nu$ παρουσιάζει ούτε τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο στο(3,2)

Στο σημείο N(3,-2) $D=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = -12y = 24$

D>0 και $\frac{\partial^2 f(3,-2)}{\partial x^2} = -2 < 0$ τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο(3,-2)

Ασκήσεις Όριο- Συνέχεια

<u>Άσκηση:</u> Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια:

(1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\left(\frac{1}{n},0\right)\to(0,0),\quad \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{n},0\right)=0\to 0 \\ \\ f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\neq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow den\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

(2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\left(\frac{1}{n},0\right)\to(0,0),\left(0,\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\frac{1}{n},0)=1\xrightarrow{x\to 0}1 \\ \\ f(0,\frac{1}{n})=-1\xrightarrow{y\to 0}-1\neq 1 \end{array}\right\}\Rightarrow den\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

…Ασκήσεις Όριο- Συνέχεια

(3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy$$

$$\left|\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| \le 1 \Rightarrow \left| f(x,y)\right| \le \left|xy\right| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy = 0$$

(4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$\left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0), \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{1}{n}, 0\right) = 0 \to 0 \\ \\ f\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow den \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

…Ασκήσεις Όριο- Συνέχεια

(5)
$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

Η f είναι συνεχης στα σημεία $(x,y)\in\Re^2\setminus\{(0,0)\}$

$(x,y)\to(0,0)\Rightarrow x^2+y^2\to 0$

$$\alpha\rho\alpha \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}=\lim_{t\to 0} e^{-\frac{1}{t}}$$

$\lim_{t\to 0} e^{-\frac{1}{t}}=e^{+\infty}\neq 0= f(0,0)\Rightarrow f$ ασυνεχης στο (0,0)

(6)
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{|xy|}}, xy\neq 0 \\ 0, xy=0 \end{cases}$$

$f(0,0)=0$

$$\overrightarrow{x_n}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3}\right)\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$f\left(\overrightarrow{x_n}\right)=\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^6}}{\sqrt{\frac{1}{n^4}}}=\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\frac{n^4+1}{n^6}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^4+1}{n^4}\xrightarrow{n\to\infty}1\neq f(0,0)$$

$\Rightarrow$ 1 ασυνεχης στο (0,0)

Ασκήσεις Μερικές Παράγωγοι

Άσκηση: Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \text{ της } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Λυση

Για $(x,y) \neq (0,0)$ εχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^3\left(x^2+y^2\right) - xy^3 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2y^3 + y^5 - 2x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^5 - x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\text{αρα } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\frac{h^5}{h^4} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$$

συνέχεια...

…Ασκήσεις Μερικές Παράγωγοι

Για $(x,y)\neq(0,0)$ εχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right)=\frac{3y^2x\left(x^2+y^2\right)-xy^3 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{3x^3y^2+3xy^4-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{3x^3y^2+xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

$$\text{αρα}\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^3y^2+xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$$

…Ασκήσεις Μερικές Παράγωγοι

Άσκηση: Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι όπου υπάρχουν και να εξεταστεί η συνέχειά τους

$$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y} \text{ της } f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Λυση

Για $(x,y)\neq(0,0)$ εχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(x^2+y^2\right)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(x^2+y^2\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Παρομοιως $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

συνέχεια...

Ασκήσεις Μερικές Παράγωγοι

Για $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{|h|}=0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{|h|}=0$$

αρα $\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\left(x,y\right)\neq(0,0)\\ 0,\left(x,y\right)=(0,0)\end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=\begin{cases}2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\left(x,y\right)\neq(0,0)\\ 0,\left(x,y\right)=(0,0)\end{cases}$$

συνέχεια...

Ασκήσεις Μερικές Παράγωγοι

Εξεταζω τη συνεχεια των $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$

$$\vec{x}_n = \left(\frac{1}{2\pi n}, 0 \right), \vec{y}_n = \left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, 0 \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\vec{x}_n \right) = 4\pi n \sin 2\pi n - \cos(2\pi n) = -1 \to -1 \neq \frac{\partial f}{\partial x}\left(0, 0 \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\vec{y}_n \right) = 2\left(2\pi n + \frac{\pi}{2} \right) - \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2} \right) = 4\pi n + \pi \to +\infty$$

$\Rightarrow$ δεν υπαρχει $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x, y \right) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}$ ασυνεχης στο (0,0)

Ακομη για $\vec{x}_n{}' = \left(0, \dfrac{1}{2\pi n} \right), \vec{y}_n{}' = \left(0, \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \right)$ η $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ασυνεχης στο (0,0)