ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

***ΔΙΑΛΕΞΗ**: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ*

Διδάσκουσα: Ε. Γάκη, Επίκ. Καθηγήτρια

Περιεχόμενα Μαθήματος

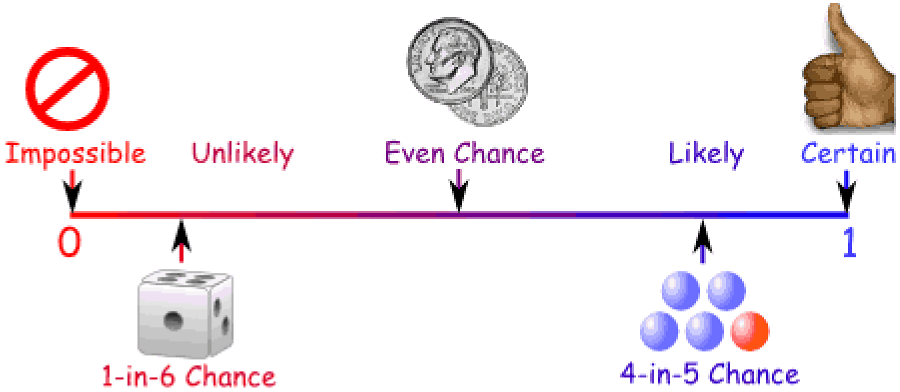
- Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων
  - Βασικές Έννοιες
  - Δειγματικός Χώρος-Ενδεχόμενα, Πράξεις με ενδεχόμενα
  - Αξιωματική Θεμελίωση Πιθανοτήτων
  - Αρχές Απαρίθμησης
  - Δεσμευμένη Πιθανότητα
  - Θεώρημα Bayes
  - Πολλαπλασιαστική Αρχή
  - Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα
- Κατανομές Πιθανότητας
  - Τυχαία Μεταβλητή
  - Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές
  - Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές
  - Μέτρα Κεντρικής Τάσης
  - Παραδείγματα

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Τι είναι η Πιθανότητα ....

*How **likely** something is to happen.*

Η πιθανότητα μας λέει πόσο πιθανό είναι να συμβεί ένα γεγονός



Τι είναι η Πιθανότητα ….

“The 50-50-90 rule: anytime you have a 50-50 chance of getting something right, there's a 90% probability you'll get it wrong.”

Andy Rooney

Κάποιοι ορισμοί …

- **Τυχαίο φαινόμενο** είναι ένα φαινόμενο η κατάληξη του οποίου δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων.

- **Τυχαίο πείραμα** είναι μια διαδικασία της οποίας το αποτέλεσμα δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων (π.χ. ρίξιμο ζαριού, στρίψιμο νομίσματος, γέννηση παιδιού κ.λ.π.).

- **Απλά (ή Στοιχειώδη) Ενδεχόμενα** (Simple Events) ονομάζονται τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος.

- **Δειγματικός χώρος** (Sample Space) είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος. Ο δειγματικός χώρος συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα S.

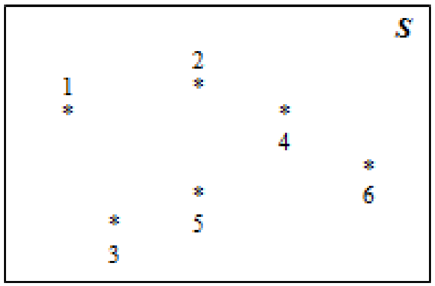
Τυχαίο και Στοχαστικό Πείραμα

1. Τυχαιότητα : διακριτικό στοιχείο των φαινομένων με τα οποία ασχολείται η θεωρία πιθανοτήτων.
2. Η επιστημονική έρευνα ενός οποιουδήποτε φαινομένου (φυσικού, οικονομικού έχει σκοπό τη διατύπωση νόμων οι οποίοι καθορίζουν την πραγματοποίηση ή όχι συγκεκριμένων γεγονότων
3. Όταν οι συνθήκες που εμφανίζεται ένα πείραμα καθορίζουν σύμφωνα με τις αρχές της αιτιότητας το αποτέλεσμα τότε το φαινόμενο λέγεται **αιτιοκρατικό**
4. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου το αποτέλεσμα δεν προβλέπεται εκ των πρότερων και αποδίδεται στην τύχη. Ένα τέτοιο φαινόμενο καλείται **τυχαίο** ή **στοχαστικό**.

Δειγματικός Χώρος & Ενδεχόμενα

Δειγματικός χώρος *Ω* ενός τυχαίου πειράματος καλείται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του. Ένα στοιχείο ω του δ.χ καλείται δειγματικό σημείο.

Αν $\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_\kappa\}$



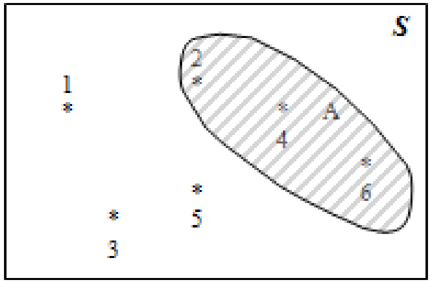
Παραδείγματα ο.χ.

- Η ρίψη ενός ζαριού $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$
- Η ρίψη ενός νομίσματος $\Omega=\{K, \Gamma\}$
- Ο βαθμός στο μάθημα των πιθανοτήτων $\Omega=\{1,2,\ldots,10\}$
- Ο αριθμός των μελών ενός τυχαία επιλεγμένου νοικοκυριού $\Omega=\{1,2,3,\ldots\}$

Δειγματικός Χώρος & Ενδεχόμενα

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης.

Ένα ενδεχόμενο που έχει ένα μόνο στοιχείο του Ω ονομάζεται **απλό**, ενώ αν έχει περισσότερα ονομάζεται **σύνθετο**



<u>Χαρακτηριστικά:</u>

1. Ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δ.χ.
2. Κάθε στοιχείο του Ω αντιπροσωπεύει ένα απλό ενδεχόμενο.

π.χ. Στη ρίψη του ζαριού το A={1} είναι απλό, ενώ το B={2,4,6} είναι σύνθετο

Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου τότε το ενδεχόμενο **πραγματοποιείται ή συμβαίνει**. Γι’ αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και ευνοϊκές περιπτώσεις για την πραγματοποίηση του.

Δειγματικός Χώρος & Ενδεχόμενα

π.χ το Β έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6

- Ο ίδιος ο δ.χ. Ω θεωρείται **βέβαιο** ενδεχόμενο
- Ενδεχόμενο θεωρείται και το κενό σύνολο το οποίο δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Το κενό σύνολο είναι το **αδύνατο** ενδεχόμενο.
- Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου συμβολίζεται με Ν(Α)

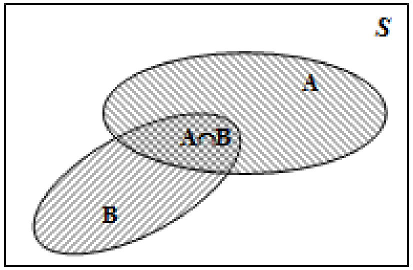
Πράξεις με Ενδεχόμενα

Τομή

Έχουμε 4 πράξεις: **Τομή /Ένωση /Συμπληρωματικό /Διαφορά**

Τ ο μ ή "∩" (Τομή A∩B A τομή B ή A και B**)**
Αποτελείται από τα απλά ενδεχόμενα που περιλαμβάνονται και στο A και στο B
Σημασία: Κατά την *εκτέλεση* του πειράματος πραγματοποιείται το A και το B, δηλαδή, κατά την εκτέλεση του πειράματος το αποτέλεσμα είναι κάποιο στοιχείο που ανήκει ***και στο A και στο B*** δηλαδή , ΑΝΗΚΕΙ και στα ΔΥΟ.

π.χ: Ω={1,2,3,4,5,6}, A={1,2,5}, B={2,6}
Για να πραγματοποιηθεί το A και B δηλ. το A∩B δηλ. το ***A τομή B***, πρέπει να έρθει το «2».



MBAχίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Πράξεις με Ενδεχόμενα

Έ ν ω σ η «∪» (A∪B «A ένωση B», ή «A ή B»**)**

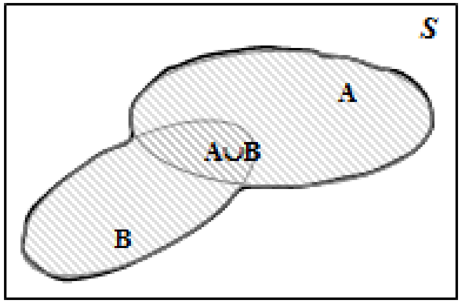
Αποτελείται από τα απλά ενδεχόμενα που βρίσκονται είτε στο A, είτε στο B είτε και στα δύο

Σημασία: Κατά την εκτέλεση του πειράματος πραγματοποιείται κάποιο στοιχείο που **ανήκει τουλάχιστον** σε ένα από τα A, B

π.χ.: Ω={1,2,3,4,5,6} A={1,2,5} B={2,6}

Για να πραγματοποιηθεί το A ή το B δηλ. **τουλάχιστον ένα από τα A ή B** πρέπει να έρθει το 1 ή το 2 ή το 5 ή το 6,

Δηλ. A∪B={1,2,5,6}, N(A∪B)=4



Πράξεις με Ενδεχόμενα

Συμπληρωματικό

Σ υ μ π λ η ρ ω μ α τ ι κ ό «-»
Διαβάζεται A, B,…. Συμπληρωματικό A΄, B΄…

<u>Σημασία:</u> Κατά την εκτέλεση του πειράματος δεν πραγματοποιείται το A, αλλά **πραγματοποιείται το αντίθετο του A**.

<u>Παράδειγμα</u>

Ω={1,2,3,4,5,6}	A={1,2,5}	A΄={3,4,6} N(A΄)=3	
	B={2,3}	B΄={1,4,5,6}	N(B΄)=4

Σχηματικά: A΄={3,4,6} A΄= το γραμμοσκιασμένο μέρος

$$A \cap \bar{A} = \varnothing \text{ και } A \cup \bar{A} = \Omega$$

Πράξεις με Ενδεχόμενα

Διαφορά

Δ ι α φ ο ρ ά « - »

Διαφορά A-B *Διαβάζεται* Διαφορά του B από το A .
<u>Σημασία </u>: Κατά την εκτέλεση του πειράματος **πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B**.
Δηλ. το αποτέλεσμα του πειράματος είναι κάποιο στοιχείο που **ανήκει στο A αλλά όχι στο B.**
Παράδειγμα. Ω ={1,2,3,4,5,6} , A = {1,2,5} , B= {2,6}
Για να πραγματοποιηθεί **το A αλλά όχι το B** πρέπει το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι το 1 ή το 5. Δηλ. A – B ={1,5} , N (A-B)=2

<u>Σχηματικά</u>
A-B={1,5} A-B = το γραμμοσκιασμένο μέρος

<u>Ισχύει</u> $A\text{-}B = A \cap B'$ επίσης $B\text{-}A=B \cap A'$

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Ορισμοί Πιθανότητας (1)

Κλασσική προσέγγιση

Η προσέγγιση αυτή οφείλεται στον Laplace ο οποίος όρισε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως τον λόγο του αριθμού των ευνοϊκών για το ενδεχόμενο περιπτώσεων δια του συνολικού αριθμού των περιπτώσεων:

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(S)} \quad \frac{\textbf{πληθος ευνοικων περιπτωσεων}}{\textbf{πληθος δυνατων περιπτωσεων}}$$

Απαραίτητη προϋπόθεση στην κλασσική προσέγγιση είναι ότι όλα τα δυνατά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα και ασυμβίβαστα

Με άλλα λόγια:

Έστω ότι ο δειγματικός χώρος S αποτελείται από ν ισοπίθανα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ *και*

$$P(A_i)=P \text{ όπου } i=1,2,\ldots,\nu$$

$$1=P(S)= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu)$$
$$= P(A_1)+ P(A_2)+ \ldots +P(A_\nu)$$
$$= \nu P \text{ άρα } \mathbf{P=1/\nu}$$

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Ορισμοί Πιθανότητας (2)

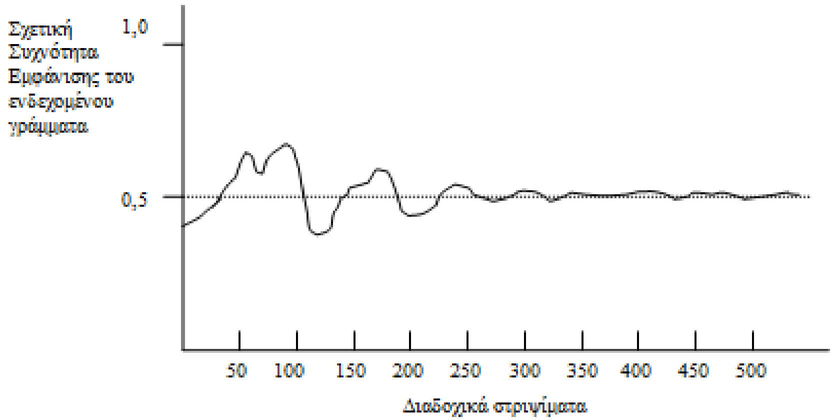
Προσέγγιση της πιθανότητας ως οριακής Σχετικής Συχνότητας

Στην προσέγγιση αυτή που οφείλεται στον Von Mises οι πιθανότητες αντιστοιχούν σε σχετικές συχνότητες κάποιας ακολουθίας πειραμάτων. Παρόλο που στη πράξη οι παρατηρούμενες ακολουθίες είναι πεπερασμένες δίνουν, καθώς ο αριθμός των επαναλαμβανόμενων πειραμάτων μεγαλώνει, μια ένδειξη της τυχαιότητας στην εμφάνιση των αποτελεσμάτων και της σύγκλισης των σχετικών συχνοτήτων.

Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Ε ισούται με το όριο της σχετικής συχνότητας του, δηλαδή

$$P(E) = \lim_{n \to 0} \frac{n(E)}{n}$$

όπου $n(E)$ ο αριθμός των εμφανίσεων του ενδεχομένου Ε και
n ο αριθμός των επαναλήψεων του πειράματος



MBAχίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Αξιωματική Θεμελίωση Πιθανότητας

Σύμφωνα με τον Kolmogorov η πιθανότητα είναι μια συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

Έστω S ένας δειγματικός χώρος και έστω $A \subset S$ ένα ενδεχόμενο. Ορίζουμε ως **συνάρτηση πιθανότητας** (probability function) μια συνάρτηση P:

$$\mathbf{P: A \to R}$$

η οποία σε κάθε ενδεχόμενο A αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό P(A) έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(S) = 1$
3. Αν A_1 και A_2 είναι ενδεχόμενα ασυμβίβαστα ($A_1 \cap A_2 = \varnothing$) τότε $P(A_1 \cup A_2) =$ $= P(A_1) + P(A_2)$.

Ο αριθμός P(A) ονομάζεται πιθανότητα του ενδεχομένου A.

Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει:

$$P(A) \leq 1$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$P(\varnothing) = 0$$

MBAχίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Λόγος Συμπληρωματικών Πιθανοτήτων (σημαντικό)

Η έννοια του Λόγου Συμπληρωματικών Πιθανοτήτων (Odds Ratio) εκφράζει με ένα διαφορετικό τρόπο την πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου.

Συγκεκριμένα, ο Λόγος Συμπληρωματικών Πιθανοτήτων υπέρ της εμφάνισης ενός ενδεχομένου Α είναι ο λόγος ευνοϊκών (a) προς τις μη ευνοϊκές (b) για το ενδεχόμενο Α περιπτώσεις

$$\frac{a}{b} = a : b \qquad \text{(a προς b)}$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου Α στην περίπτωση αυτή είναι:

$$P(A) = \frac{a}{a+b}$$

Από τα παραπάνω φαίνεται η σχέση η οποία συνδέει την πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου Α με τον αντίστοιχο Λόγο Συμπληρωματικών Πιθανοτήτων:

$$\frac{a}{b} = \frac{P(A)}{1-P(A)}$$

Αν για παράδειγμα ο Λόγος Συμπληρωματικών Πιθανοτήτων υπέρ της εκλογής ενός υποψηφίου βουλευτή κατά τις Επόμενες βουλευτικές εκλογές είναι a : b = 2 : 1 τότε η πιθανότητα εκλογής του είναι:

$$P(A) = \frac{a}{a+b} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} = 0,75$$

Αντίστοιχα αν η πιθανότητα εκλογής ενός άλλου υποψηφίου βουλευτή εκτιμάται ότι είναι P(A) = 0,6 τότε ο Λόγος Συμπληρωματικών Πιθανοτήτων υπέρ της εκλογής του είναι:

$$\frac{a}{b} = \frac{P(A)}{1-P(A)} = \frac{0,6}{1-0,6} = \frac{0,6}{0,4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Προσθετικός Νόμος Πιθανοτήτων

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Σύμφωνα με το τρίτο αξίωμα του Kolmogorov αν δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα δηλαδή $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ τότε $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1)+P(A_2)$

Ειδικός Νόμος Πρόσθεσης Πιθανοτήτων

Ο νόμος αυτός εύκολα γενικεύεται και για περισσότερα ενδεχόμενα. Για τρία ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 ανά δύο ασυμβίβαστα μεταξύ τους, ισχύει:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)$$

Για n ενδεχόμενα A_i, i = 1, 2, …., n ανά δύο ασυμβίβαστα μεταξύ τους ($A_i \cap A_j = \varnothing$, i= j) ισχύει:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Προσθετικός Νόμος Πιθανοτήτων

Μη Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Στην περίπτωση που τα ενδεχόμενα A_1 , A_2 δεν είναι ασυμβίβαστα ($A_i \cap A_I \neq \varnothing$) ισχύει

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Γενικός Νόμος Πρόσθεσης Πιθανοτήτων

Για τρία ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 που δεν είναι ανά δύο ασυμβίβαστα μεταξύ τους η σχέση

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Για n ενδεχόμενα A_i , i = 1, 2, …., n ισχύει:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum{}_1 - \sum{}_2 + \sum{}_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \sum{}_n$$

όπου

$$\sum{}_k = \sum P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right)$$

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Ιδιότητες των Πιθανοτήτων

(I) Για 2 συμπληρωματικά ενδεχόμενα ισχύει $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(II) Γενικός Προσθετικός Νόμος των Πιθανοτήτων

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(III) Αν Α ,Β ασυμβίβαστα δηλ. $A \cap B = \varnothing$, τότε $P(A \cup B)=P(A)+P(A)$

(IV) Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δ.χ. Ω ισχύει $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

(V) Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

Ανισοτικές Σχέσεις Πιθανοτήτων

Αν A, B ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω τότε :

$$P(A \cap B) \leq \frac{P(A)+P(B)}{2}$$

$$P(A \cup B) \geq \frac{P(A)+P(B)}{2}$$

$$P(A)+P(B)-1 \leq P(A \cup B) \leq P(A)+P(B)$$

$$P(A)+P(B)-1 \leq P(A \cap B) \leq P(A)+P(B)$$

$$A' \subseteq B \quad \text{τότε} \quad P(A)+P(B) \geq 1$$

$$P(A \cap B) \leq P(B) \leq P(A \cup B) \leq P(A)+P(B)$$

MBAχίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Παράδειγμα 1

Έστω δύο μαθήματα επιλογής Α και Β. Έχει διαπιστωθεί ότι το 30% των φοιτητών επιλέγει το Α και το 60% δεν επιλέγει το Β, ενώ το 50% επιλέγει τουλάχιστον ένα από τα δύο

1. Ποιο ποσοστό των φοιτητών δεν επιλέγει κανένα από τα δύο αυτά μαθήματα και ποιο ποσοστό επιλέγει και τα δύο.
2. Από τους φοιτητές που επιλέγουν ένα μόνο μάθημα, ποιοι είναι πιο πολλοί, αυτοί που επιλέγουν το Α ή αυτοί που επιλέγουν το Β;

Λύση

Θεωρούμε τα δύο ενδεχόμενα

Α={Οι φοιτητές που επιλέγουν το μάθημα Α} με $P(A)=0.3$

Β={Οι φοιτητές που επιλέγουν το μάθημα Β} με $P(B)=1-P(B')=1-0.6=0.4$

$A\cup B$={Οι φοιτητές που επιλέγουν ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα} με $P(A\cup B)=0.5$

Παράδειγμα 1-συνέχεια

$(A \cup B)'$={Οι φοιτητές που δεν επιλέγουν κανένα από τα δύο μαθήματα}
με $P((A \cup B)')=1-0.5=0.5$

$(A \cap B)$= {Οι φοιτητές που επιλέγουν και τα δύο μαθήματα}
$P(A \cap B)= P(A)+P(B)- P(A \cup B)=0.3+0.4-0.5 =0.2$

$(A-B)$={Οι φοιτητές που επιλέγουν μόνο το A}
$(B-A)$={Οι φοιτητές που επιλέγουν μόνο το B}

Έχουμε $P(A-B)=P(A)- P(A \cap B)= 0.3-0.2=0.1$

$P(B-A)=P(B)- P(A \cap B)= =0.4-0.2=0.2$

Άρα είναι περισσότεροι αυτοί που επιλέγουν μόνο το B

Παράδειγμα 2

Σ’ ένα κουτί υπάρχουν μια άσπρη, μια μαύρη και μια πράσινη μπάλα. Επιλέγουμε τυχαία μια μπάλα.

1. Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου να μην είναι πράσινή;
2. Επιλέγουμε δύο μπάλες μαζί. Ποια η πιθανότητα καμιά από τις δύο μπάλες να μην είναι πράσινη;
3. Επιλέγουμε μια μπάλα, σημειώνουμε το χρώμα της, την τοποθετούμε στο κουτί και μετά επιλέγουμε πάλι μια μπάλα. Ποια είναι η πιθανότητα καμιά από τις δύο να μην είναι πράσινη;

Λύση

1. Αφού επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη, ο δ.χ. του πειράματος είναι $\Omega=\{α, μ, π\}$, οπότε $N(\Omega)=3$
   Το ενδεχόμενο η μπάλα να μην είναι πράσινη είναι:
   $A=\{α, μ\}$ με $N(A)=2$ Άρα $P(A)=N(A)/N(\Omega)=2/3$

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Παράδειγμα 2-συνέχεια

2. Αφού επιλέγουμε δύο μπάλες μαζί, ο δ.χ. του πειράματος είναι
   Ω={αμ, μπ, απ}, οπότε N(Ω)=3
   Το ενδεχόμενο καμιά από τις δύο μπάλες να μην είναι πράσινη είναι:
   Β={αμ} με Ν(Β)=1 Άρα P(B)=N(B)/N(Ω)=1/3

3. Αφού γίνεται επανατοποθέτηση ο δ.χ. είναι
   Ω={αα, αμ, απ, μα, μμ, μπ, πα, πμ, ππ} οπότε Ν(Ω)=9

   Το ενδεχόμενο να μην είναι καμία μπάλα πράσινη είναι
   Γ={αα, αμ, μα, μμ} και Ν(Γ)=4. Άρα P(Γ)=N(Γ)/N(Ω)=4/9

Παράδειγμα 3

Στο πρώτο έτος του τμήματός σας φοιτούν 240 αγόρια και 220 κορίτσια. Το 40% των αγοριών και το 45% των κοριτσιών έχουν κοπεί στο μάθημα Μαθηματικά. Επιλέγουμε τυχαία έναν φοιτητή.

Ποιές οι πιθανότητες των ενδεχομένων

A={Δεν έχει κοπεί στα Μαθηματικά}

B={Είναι κορίτσι και έχει κοπεί στα Μαθηματικά}

Γ={Είναι αγόρι ή δεν έχει κοπεί στα Μαθηματικά}

Λύση

	Έχουν κοπεί στα Μαθηματικά	Δεν έχουν κοπεί στα Μαθηματικά	**Σύνολο**
Αγόρια	96	144	240
Κορίτσια	99	121	220
Σύνολο	195	265	460

N(Ω)=460

N(A)=265 οπότε P(A)=N(A)/N(Ω)=265/460=0.576

N(B)=99 οπότε P(B)=N(B)/N(Ω)=99/460=0.215

N(Γ)=361 οπότε P(Γ)=N(Γ)/N(Ω)=361/460=0.785

Γ={ όλα τα αγόρια (240) και τα κορίτσια που δεν έχουν κοπεί στα Μαθηματικά (121)}

Αρχές Απαρίθμησης

Σύμφωνα με τον κλασσικό ορισμό η πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου Α εκφράζεται ως ο λόγος του αριθμού των ευνοϊκών για το ενδεχόμενο αποτελεσμάτων προς τον αριθμό του συνόλου των δυνατών αποτελεσμάτων του:

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}$$

Σε πιο σύνθετα όμως προβλήματα η απαρίθμηση των ευνοϊκών και των δυνατών αποτελεσμάτων είναι εξαιρετικά δύσκολη αν όχι αδύνατη

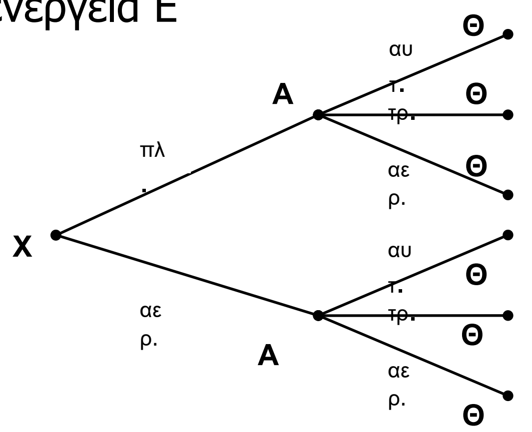
Υπάρχουν συγκεκριμένες τεχνικές που μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε το συνολικό αριθμό των αποτελεσμάτων ενός ενδεχομένου χωρίς να απαιτείται η εξαντλητική απαρίθμηση τους

α. Πολλαπλασιαστική Αρχή
β. Μεταθέσεις
γ. Διατάξεις
δ. Συνδυασμοί

Πολλαπλασιαστική Αρχή

Έστω ότι η σύνθετη ενέργεια Ε συνίστανται στην εκτέλεση των επί μέρους ενεργειών E_1, E_2,...,E_k . Έστω επιπλέον ότι καθεμιά από τις ενέργειες αυτές έχει αντίστοιχα n_1, n_2, ... n_k δυνατά αποτελέσματα. Τότε η ενέργεια Ε έχει n_1, n_2, ... n_k δυνατά αποτελέσματα.

Η πολλαπλασιαστική αρχή μπορεί να παρουσιασθεί γραφικά με τη χρήση ενός **δενδρικού διαγράμματος** (Tree Diagram). Ένα τέτοιο διάγραμμα παρουσιάζει το δειγματικό χώρο μιας ενέργειας με τη μορφή ενός δένδρου που τα κλαδιά του χωρίζονται σε τμήματα. Το πρώτο τμήμα ενός κλαδιού απεικονίζει ένα δυνατό αποτέλεσμα της πρώτης ενέργειας (E_1). Το δεύτερο ένα δυνατό αποτέλεσμα της δεύτερης ενέργειας (E_2) κ.λ.π. Προφανώς ο συνολικός αριθμός των διακεκριμένων κλαδιών μας δίνει το συνολικό αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορεί να ολοκληρωθεί η σύνθετη ενέργεια Ε



Χ: Χίος
Α: Αθήνα
Θ: Θεσσαλονίκη
αυτ. : αυτοκίνητο
αερ. : αεροπλάνο
τρ. : τρένο
πλ. : πλοίο

Μεταθέσεις

Μεταθέσεις ενός συνόλου Α
Είναι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε σε μια σειρά
Τα ν στοιχεία ενός συνόλου
Το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων συμβολίζεται με M_n και είναι

$$P_n = 1\ 2\ 3 \ldots n = n!$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στις μεταθέσεις βάζουμε όλα τα στοιχεία του συνόλου σε μια σειρά

Αν μεταξύ των n στοιχείων που θέλουμε να τοποθετήσουμε υπάρχουν και ορισμένα όμοια μεταξύ τους τότε το σύνολο των n στοιχείων μπορεί να χωρισθεί σε k υποσύνολα έτσι ώστε το πρώτο να περιέχει n_1 όμοια στοιχεία, το δεύτερο n_2 όμοια κ.λ.π. .

Στην περίπτωση αυτή οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης των n στοιχείων ονομάζονται **επαναληπτικές μεταθέσεις** και δίνονται από τον τύπο:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

Παράδειγμα 4

a) Με πόσους τρόπους μπορούν να γραφούν το ένα κάτω από το άλλο τα ονόματα 8 ηθοποιών μιας παράστασης;

Τα 8 ονόματα μπορούν να μπουν στη σειρά με

P_8=8!=1*2*3*4*5*6*7*8=40320 τρόπους

b) Η λέξη **Α Ι Γ Α Ι Ο** για παράδειγμα, περιέχει 6 γράμματα (n=6) μεταξύ των οποίων υπάρχουν δύο **Α** (n_1=2), δύο **Ι** (n_2=2) και ένα **Γ** και **Ο** (n_3=1, n_4=1).

Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο τα γράμματα της λέξης **Α Ι Γ Α Ι Ο** μπορούν να τοποθετηθούν με διαφορετικούς τρόπους.

$$\frac{6!}{2!\,2!.1!\,1!} = 180$$

Διατάξεις

Σε ορισμένες περιπτώσεις δεν ενδιαφερόμαστε για όλα τα στοιχεία ενός συνόλου αλλά για ένα μόνο μέρος τους. Οι **Διατάξεις** (*Permutations) των* n στοιχείων ενός συνόλου ανά x εκφράζουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να επιλέξει κάποιος x από τα n στοιχεία ενός συνόλου *όταν η σειρά επιλογής τους ενδιαφέρει*.

Οι διαφορετικοί αυτοί τρόποι δίνονται από

$$P_{n\,x} = P(n, x) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στην περίπτωση των διατάξεων η σειρά εμφάνισης των στοιχείων σε κάθε επιλογή μας ενδιαφέρει.

$P_{n\,1} = n$ $\qquad$ $P_{n\,0} = 1$

Με άλλα λόγια δύο επιλογές είναι διαφορετικές όχι μόνο όταν περιέχουν διαφορετικά στοιχεία αλλά και όταν περιέχουν τα ίδια στοιχεία αλλά με διαφορετική σειρά εμφάνισης

Παράδειγμα 5

a) Ας υποθέσουμε ότι οι θέσεις του Προέδρου, Αντιπροέδρου, Γραμματέα και Ταμία μιας επιτροπής θα κληρωθούν με τυχαία επιλογή ισάριθμων ατόμων μεταξύ 20 υποψηφίων. Ας υποθέσουμε ότι η σειρά επιλογής των ατόμων θα καθορίζει και τη θέση που θα καταλάβουν. Με άλλα λόγια ο πρώτος που θα επιλεγεί θα καταλάβει τη θέση του Προέδρου, ο δεύτερος της θέση του Αντιπροέδρου, ο τρίτος τη θέση του Γραμματέα και ο τέταρτος τη θέση του Ταμία.

Σύμφωνα με το παραπάνω τύπο οι διαφορετικοί τρόποι επιλογής των τεσσάρων ατόμων από τους 20 υποψηφίους είναι:

$$P_{20\ 4} = P(20, 4) = \frac{20!}{(20-4)!} = \frac{20!}{16!} = 116.280$$

b) Σε μια ιπποδρομία παίρνουν μέρος 12 άλογα. Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η τριάδα των νικητών

Από τα 12 στοιχείς επιλέγουμε 3 διαφορετικά μεταξύ τους και τα βάζουμε σε σειρά.

Το πλήθος των διατεταγμένων τριάδων που μπορούν να σχηματιστούν είναι

$$P_{12\ 3} = \frac{12!}{(12\text{-}3)!} = \frac{12!}{9!} = \frac{1.2.3..12}{1.2.3...9} = 10.11.12 = 1320$$

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Συνδυασμοί

Οι **συνδυασμοί** (Combinations) των n στοιχείων ενός συνόλου ανά x εκφράζουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να επιλέξει κάποιος x από τα n στοιχεία ενός συνόλου *όταν η σειρά επιλογής δεν τον ενδιαφέρει*.
Οι διαφορετικοί τρόποι δίνονται από τον τύπο:

$$C_{n\,x} = C(n,x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στην περίπτωση των Συνδυασμών δύο επιλογές είναι διαφορετικές μόνο όταν περιέχουν διαφορετικά στοιχεία

Υπενθύμιση $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{0} = 1$

Παράδειγμα 5

a) Ας υποθέσουμε ότι μια τετραμελής επιτροπή θα σχηματισθεί με τυχαία επιλογή ισάριθμων ατόμων μεταξύ 20 υποψηφίων. Στην περίπτωση αυτή η σειρά επιλογής δεν ενδιαφέρει.

Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο οι διαφορετικοί τρόποι σχηματισμού της επιτροπής στην περίπτωση αυτή είναι:

$$C_{20\ 4} = C(20, 4) = \frac{20!}{4!(20-4)!} = \frac{20!}{4!\,16!} = 4.845$$

b) Δίνονται 8 διαφορετικά σημεία, τα οποία ανά τρία δεν είναι συνευθειακά. Πόσες ευθείες και πόσα τρίγωνα ορίζονται;

$$C_{8\ 2} = C(8,2) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8\text{-}2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{1.2...8}{1.2.1.2.3....6} = \frac{7*8}{2} = 28 \text{ ευθειες}$$

$$C_{8\ 3} = C(8,3) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8\text{-}3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{1.2...8}{1.2.3.1.2...5} = \frac{6*7*8}{1*2*3} = 56 \text{ τριγωνα}$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Σε πολλές περιπτώσεις όταν ζητάμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου έχουμε ήδη κάποιες πληροφορίες γι' αυτό. Οι πληροφορίες αυτές στην ουσία περιορίζουν τον αρχικό δειγματικό χώρο σε ένα υποσύνολο του.

Ένα τέτοιο υποσύνολο ονομάζεται **περιορισμένος δειγματικός χώρος** (Reduced Sample Space). Οι πιθανότητες που αναφέρονται σε περιορισμένους δειγματικούς χώρους ονομάζονται **δεσμευμένες πιθανότητες** (Conditional Probabilities).

Η δεσμευμένη πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου Α δοθέντος ότι έχει ήδη συμβεί ένα ενδεχόμενο Β, το οποίο και έχει περιορίσει τον αρχικό δειγματικό χώρο του Α συμβολίζεται με P(A/B) και ορίζεται ως εξής:

$$P(A|B) = \frac{N(A\cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}}{\frac{N(B)}{N(\Omega)}} \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

Η πιθανότητα αυτή λέγεται δεσμευμένη πιθανότητα του Α με δεδομένο το Β

Αντίστοιχα η δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου Β δοθέντος ότι έχει ήδη συμβεί το Α συμβολίζεται με P(B/A) και ορίζεται ως εξής:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}, P(A) > 0$$

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Παράδειγμα 6

Για το διοικητικό συμβούλιο μιας επιχείρησης θα εκλεγεί ένας αντιπρόσωπος. Υποψήφιοι είναι 7 άνδρες και 8 γυναίκες. Από τους υποψηφίους 3 άνδρες και 6 γυναίκες είναι διοικητικοί υπάλληλοι, ενώ 4 άνδρες και 2 γυναίκες είναι τεχνικοί υπάλληλοι. Τα δεδομένα φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα

	Διοικητικός	Τεχνικός	**Σύνολο**
Άνδρας	3	4	7
Γυναίκα	6	2	8
Σύνολο	9	6	15

Ζητάμε την πιθανότητα
α)να εκλεγεί διοικητικός
β)να εκλεγεί γυναίκα
γ)να εκλεγεί διοικητικός δεδομένου ότι έχει ήδη εκλεγεί γυναίκα

Τα 15 στοιχεία του δειγματικού χώρου είναι ισοπίθανα, άρα

$$P(A)=9/15 \quad \text{και} \quad P(B)=8/15$$

Δεδομένου ότι ο εκλεγμένος αντιπρόσωπος είναι γυναίκα (σύνολο 8 γυναίκες) η πιθανότητα να είναι και διοικητικός είναι 6/8.
Η πιθανότητα P(να είναι διοικητικός / έχει εκλεγεί γυναίκα)=6/8
Η πιθανότητα P(να είναι γυναίκα / έχει εκλεγεί διοικητικός)=6/9

Νόμος πολλαπλασιασμού πιθανοτήτων, από κοινού πιθανότητες & περιθώριες πιθανότητες

.

Ξεκινώντας από τη δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου Α δοθέντος του Β [P(A/B)] μπορούμε να προσδιορίζουμε από κοινού πιθανότητα των Α και Β.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0 \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) > 0 \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι γνωστές ως Γενικός Νόμος Πολλαπλασιασμού Πιθανοτήτων (*General Multiplicative Rule*) και η $P(A \cap B)$ ονομάζεται από κοινού πιθανότητα (*joint probability*) των Α και Β.

Ο νόμος του πολλαπλασιασμού μπορεί να επεκταθεί σε n ενδεχόμενα ως εξής:
Έστω τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, ..., A_n$ με την ιδιότητα $P\left[\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right] > 0$

$$P[A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n] = P[A_1]P[A_2/A_1]P[A_3/A_1 \cap A_2]...P\left[A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right]$$

ΜΒΑ χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Πίνακας από κοινού πιθανοτήτων (Joint Probability Table)

(σημαντικό)

Ο πίνακας αυτός έχει την ίδια μορφή με τον πίνακα συνάφειας. Η **διαφορά** του είναι ότι ενώ στον πίνακα συνάφειας οι είσοδοι εκφράζουν πλήθος στοιχείων που συγκεντρώνουν δύο χαρακτηριστικά, στον πίνακα των από κοινού πιθανοτήτων οι είσοδοι εκφράζουν από κοινού πιθανότητες, δηλαδή *πιθανότητες εμφάνισης ενδεχομένων που συγκεντρώνουν δύο κοινά χαρακτηριστικά*

	Διοικητικός	*Τεχνικός*	**Σύνολο**
Άνδρας	0.2	0.26	0.46
Γυναίκα	0.4	0.14	0.54
Σύνολο	0.6	0.4	1

Στον πίνακα των από κοινού πιθανοτήτων το άθροισμα των από κοινού πιθανοτήτων μιας σειράς ή στήλης ονομάζεται περιθώρια πιθανότητα (Marginal Probability) του ενδεχομένου το οποίο αντιστοιχεί στη σειρά /στήλη αυτή.
Για παράδειγμα, η περιθώρια πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι,

$$P(A) = P(A \cap \Delta) + P(A \cap T) = 0.46$$

$$P(\Delta) = P(A \cap \Delta) + P(M \cap \Delta) = 0{,}08 + 0{,}02 = 0{,}10$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Διαμέριση (*partition*) ενός συνόλου S ορίζουμε μια πεπερασμένη συλλογή υποσυνόλου του S τα οποία ικανοποιούν τις παρακάτω δύο συνθήκες:

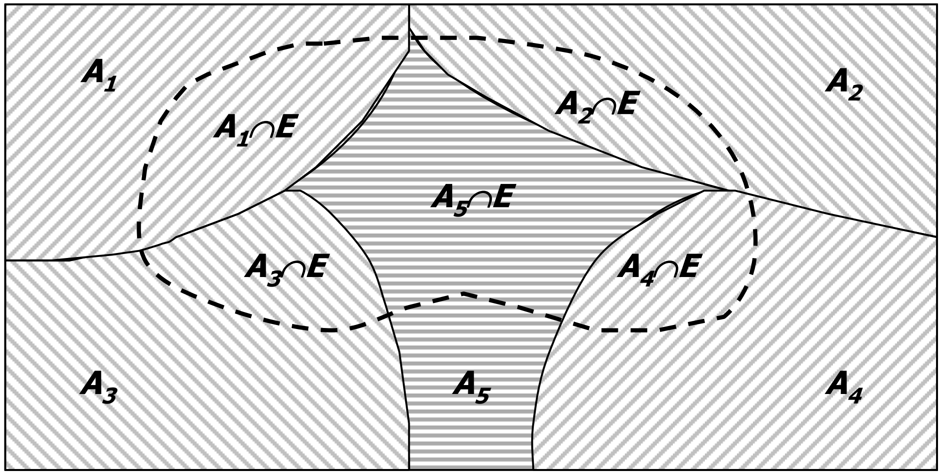
i. $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

i. $A_i \cap A_j = \varnothing$, i, j =1, 2, …, n, i≠j.

Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας

Έστω ότι είναι μία διαμέριση του δειγματικού χώρου S τέτοια ώστε $P(A_i) \neq 0$, i = 1, 2, …, n. Τότε για κάθε ενδεχόμενο E έχουμε ότι,

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(E/A_i)$$



Το θεώρημα της ολικής πιθανότητας υπολογίζει την πιθανότητα ενός ενδεχομένου (E) ως συνάρτηση των δεσμευμένων πιθανοτήτων του σε σχέση με τα στοιχεία κάποιας διαμέρισης του και των πιθανοτήτων των στοιχείων αυτών

Παράδειγμα 7

Τρία κουτιά περιέχουν άσπρες (Α) και μαύρες (Μ) μπάλες σε αναλογία που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κουτί \ Μπάλες	Κ	Μ
K_1	6	4
K_2	12	4
K_3	14	6

Επιλέγουμε στην τύχη ένα κουτί και στη συνέχεια μια μπάλα από αυτό. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να επιλέξουμε μαύρη μπάλα.

Κ1 το ενδεχόμενο η μπάλα να προέρχεται από το κουτί i , i = 1, 2, 3.

Μ το ενδεχόμενο η μπάλα να είναι μαύρη.

Σύμφωνα με το θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας έχουμε ότι:

$$P(M) = P(K_1)P(M/K_1) + P(K_2)P(M/K_2) + P(K_3)P(M/K_3)$$

$$= \frac{1}{3} * \frac{4}{10} + \frac{1}{3} * \frac{4}{16} + \frac{1}{3} * \frac{6}{20} = \frac{57}{180}$$

Θεώρημα Bayes

Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου S τέτοια ώστε $P(A_i) \neq 0$,
i = 1, 2, …, n. Τότε για κάθε ενδεχόμενο E με $P(E) > 0$ έχουμε ότι,

$$P(A_k/E) = \frac{P(A_k)P(E/A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E/A_i)} = \frac{P(A_k)P(E/A_k)}{P(E)}$$

Στις περιπτώσεις που είδαμε μέχρι τώρα οι πιθανότητες $P(A_i)$ των στοιχείων μιας διαμέρισης ήταν γνωστές και θέλαμε να υπολογίσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες ενός ενδεχομένου σε σχέση με τα στοιχεία της διαμέρισης $\left[P(E/A_k)\right]$.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που οι πιθανότητες των στοιχείων της διαμέρισης δεν είναι γνωστές. Τις περισσότερες φορές πριν αρχίσουμε τα πειράματα έχουμε ήδη μια υποκειμενική αντίληψη /ένδειξη για αυτές. Τις ενδείξεις αυτές ονομάζουμε εκ των **προτέρων πιθανότητες** (prior probabilities) των στοιχείων της διαμέρισης. Μετά την εκτέλεση όμως των πειραμάτων ίσως αποφασίσουμε να αναθεωρήσουμε τις αρχικές εκτιμήσεις μας. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes για να υπολογίσουμε τις **εκ των υστέρων πιθανότητες**

Παράδειγμα 8

Σε μία βιομηχανία που παράγει πλαστικά κύπελλα για αυτόματους πωλητές αναψυκτικών η παραγωγή των κυπέλλων γίνεται με τρεις μηχανές καθεμία από τις οποίες καλύπτει το 1/3 της παραγωγής. Η συνολική παραγωγή και των τριών μηχανών σε μία ώρα είναι 9000 κύπελλα. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα κύπελλο από αυτά και το βρούμε ελαττωματικό να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι έχει κατασκευαστεί από την 1η , 2η ή 3η μηχανή.

ΛΥΣΗ

Ε: το ενδεχόμενο ότι το προϊόν που επιλέγουμε είναι ελαττωματικό.

Α1: το ενδεχόμενο ότι το προϊόν που επιλέγουμε κατασκευάστηκε από την 1η μηχανή.

Α2: το ενδεχόμενο ότι το προϊόν που επιλέγουμε κατασκευάστηκε από την 2η μηχανή.

Α3: το ενδεχόμενο ότι το προϊόν που επιλέγουμε κατασκευάστηκε από την 3η μηχανή.

Παράδειγμα (συν.)

Θεωρούμε ότι η πιθανότητα που έχει το ελαττωματικό προϊόν που επιλέγουμε να προέρχεται από την 1η, 2η, 3η μηχανή είναι ίση με την αντίστοιχή πιθανότητα παραγωγής του από τις μηχανές αυτές

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$$

(Οι πιθανότητες αυτές ονομάζονται εκ των προτέρων πιθανότητες.

Ο Διευθυντής Παραγωγής του εργοστασίου έχει κάποια υπόνοια ότι τα ποσοστά των ελαττωματικών διαφέρουν από μηχανή σε μηχανή. Για το λόγο αυτό παίρνει δείγμα 1000 κυπέλλων από την παραγωγή κάθε μηχανής, μετρά τον αριθμό των ελαττωματικών σε κάθε δείγμα και βρίσκει ότι :

- Το δείγμα προερχόμενο από την 1η μηχανή περιέχει 10 ελαττωματικά.
- Το δείγμα προερχόμενο από την 2η μηχανή περιέχει 12 ελαττωματικά.
- Το δείγμα προερχόμενο από την 3η μηχανή περιέχει 20 ελαττωματικά.

- P (E / A1) = 0.010
- P (E / A2) = 0.012
- P (E / A3) = 0.020

Παράδειγμα (συν.)

Ο Διευθυντής Παραγωγής θέλει να αναθεωρήσει τις εκ των προτέρων πιθανότητες. Θα χρησιμοποιήσει λοιπόν το Θεώρημα Bayes για να υπολογίσει τις εκ των υστέρων πιθανότητες P (A1 / E), P (A2 / E) και P (A3 / E).

$$P(A_1/E) = \frac{P(A_1)P(E/A_1)}{P(A_1)P(E/A_1)+P(A_2)P(E/A_2)+P(A_3)P(E/A_3)} = \frac{(1/3)(0,010)}{(1/3)(0,010)+(1/3)(0,012)+(1/3)(0,020)}$$

$$P(A_2/E) = \frac{P(A_2)P(E/A_2)}{P(A_1)P(E/A_1)+P(A_2)P(E/A_2)+P(A_3)P(E/A_3)} = \frac{(1/3)(0,012)}{(1/3)(0,010)+(1/3)(0,012)+(1/3)(0,020)}$$

$$P(A_3/E) = \frac{P(A_3)P(E/A_3)}{P(A_1)P(E/A_1)+P(A_2)P(E/A_2)+P(A_3)P(E/A_3)} = \frac{(1/3)(0,020)}{(1/3)(0,010)+(1/3)(0,012)+(1/3)(0,020)}$$

Ενδεχόμενα	**Εκ των προτέρων πιθανότητες**	**Εκ των υστέρων πιθανότητες**
A_1	0,33	0,24
A_2	0,33	0,28
A_3	033	0,48
Σύνολα	1,00	1,00

Κατά συνέπεια η πιθανότητα κατασκευής από τη 3η μηχανή του ελαττωματικού κυπέλλου που έχει επιλεγεί αυξάνεται σε βάρος των πιθανοτήτων των άλλων δύο ενδεχομένων

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

1. Αν $P(A/B) \neq P(A)$ συμπεραίνουμε ότι η πληροφορία ότι το B έχει συμβεί έχει ως αποτέλεσμα να μεταβληθεί η πιθανότητα να συμβεί το A.

2. Αντίθετα, αν $P(A/B)=P(A)$ η πληροφορία ότι το B έχει συμβεί δεν έχει καμία επίδραση στην πιθανότητα να συμβεί το A. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι το A είναι ανεξάρτητο του B.

3. Αντίστοιχα, αν $P(A/B)=P(B)$ τότε λέμε ότι το B είναι ανεξάρτητο του A.

Αποδεικνύεται ότι αν το A είναι ανεξάρτητο του B τότε και το B είναι ανεξάρτητο του A και αντίστροφα με την προϋπόθεση ότι $P(A)>0$, $P(B)>0$.

Ένας γενικότερος ορισμός της ανεξαρτησίας δύο ενδεχομένων είναι ο ακόλουθος :
Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ανεξάρτητα** (independent) ή **στατιστικά ανεξάρτητα** αν

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Παρατηρήσεις

1. Οι συνθήκες $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ δεν είναι απαραίτητες.
2. Κάθε ενδεχόμενο είναι ανεξάρτητο από το βέβαιο ενδεχόμενο (S) και από το αδύνατο ενδεχόμενο ($\varnothing$).

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

Τα ενδεχόμενα A_1, A_2, …, A_n, $n \geq 1$ είναι ανεξάρτητα αν για κάθε συνδυασμό δύο ή περισσοτέρων από αυτά ισχύει :

$$P\left[A_{i_1} A_{i_1} \ldots A_{i_k}\right] = P\left[A_{i_1}\right] P\left[A_{i_2}\right] \ldots P\left[A_{i_k}\right] \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n.$$

Τέλος σημειώνεται ότι τα ενδεχόμενα A_1, A_2, …, Αn λέγονται **ανεξάρτητα κατά ζεύγη** αν

$$P\left(A_i A_j\right) = P\left(A_i\right) P\left(A_j\right) \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Προφανώς η ενδεχόμενα μπορεί να είναι ανεξάρτητα κατά ζεύγη χωρίς να είναι ανεξάρτητα

MBAχίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Ανεξάρτητα ή Ασυμβίβαστα??

1. Αν δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα, δηλαδή $A \cap B = \varnothing$ με $P(A)>0$ και $P(B)>0$, τότε αυτά δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητα. Με άλλα λόγια οι έννοιες ανεξαρτησία και ασυμβίβαστα είναι εκ διαμέτρου αντίθετες.

2. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα τότε τα ζεύγη (A, B') (A', B'), (A', B) είναι ζεύγη ανεξάρτητων ενδεχομένων, όπου A' και B' είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των Α και Β αντίστοιχα

Μερικά Παραδείγματα ακόμη

Παράδειγμα 9

Από μια κάλπη που περιέχει 8 κόκκινες, 7 άσπρες και 5 πράσινες, εξάγεται τυχαία μια. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

α) να εξαχθεί κόκκινη σφαίρα
β) να εξαχθεί λευκή σφαίρα
γ) να μην εξαχθεί κόκκινη
δ) να εξαχθεί άσπρη ή πράσινη σφαίρα

Λύση

Κ: το ενδεχόμενο να εξαχθεί κόκκινη σφαίρα
Α: το ενδεχόμενο να εξαχθεί άσπρη σφαίρα
Π: το ενδεχόμενο να εξαχθεί πράσινη σφαίρα
$P(K)=8/20=0,4=40\%$
$P(A)=7/20=0,35=35\%$
$P(\text{όχι κόκκινη})=P(K')=1-P(K)=1-0,4=0,6$
$P(\text{άσπρη ή πράσινη})=P(A \cup \Pi)$ και επειδή Α και Π ασυμβίβαστα έχουμε
$P(A \cup \Pi)=P(A)+P(\Pi)=7/20+5/20=12/20=0,6=60\%$ ή $P(K')$

Παράδειγμα 10

Από την κάλπη εξάγονται διαδοχικά τρεις σφαίρες (α) με επανατοποθέτηση, (β) χωρίς επανατοποθέτηση. Να βρεθεί η πιθανότητα οι τρεις σφαίρες στη σειρά να είναι κόκκινη, άσπρη και πράσινη.

Λύση

K: το ενδεχόμενο να εξαχθεί κόκκινη σφαίρα στην πρώτη εξαγωγή

A: το ενδεχόμενο να εξαχθεί άσπρη σφαίρα στην δεύτερη

Π: το ενδεχόμενο να εξαχθεί πράσινη σφαίρα στην τρίτη

Ζητάμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $P(K\cap A)\cap \Pi)$

(α) με επανατοποθέτηση

Επειδή κάθε σφαίρα που εξάγεται επανατοποθετείται στην κάλπη τα τρία ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, οπότε

$P(K\cap A)\cap \Pi)=P(K)\ P(A)\ P(\Pi)=8/20)(7/20)(5/20)=0.035=3.5\%$

(β) χωρίς επανατοποθέτηση

Σ' αυτήν την περίπτωση τα ενδεχόμενα δεν είναι ανεξάρτητα οπότε

$P(\ K\cap A)\cap \Pi)=P(K)\ P(A\ |K)\ P(\Pi \mid K\cap A)=(8/20)(7/19)(5/18)=0,0409$

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Τι σημαίνει επανατοποθέτηση??

Παράδειγμα 11

Ένας θερμοστάτης τοποθετείται σ' ένα καυστήρα ώστε να διακόπτει τη λειτουργία του όταν ο καυστήρας ξεπεράσει κάποιο ανώτατο όριο θερμοκρασίας. Η πιθανότητα να λειτουργήσει ο θερμοστάτης είναι 0.9. Για μεγαλύτερη ασφάλεια τοποθετείται και δεύτερος θερμοστάτης του οποίου η πιθανότητα λειτουργίας είναι 0.8. Εάν η λειτουργία των 2 θερμοστατών είναι ανεξάρτητη να υπολογιστεί:

α) Η πιθανότητα να λειτουργήσει τουλάχιστον ένας από τους θερμοστάτες

β) Η πιθανότητα να λειτουργήσει μόνο ένας από τους θερμοστάτες

Λύση

A={να λειτουργήσει ο πρώτος θερμοστάτης}

B={να λειτουργήσει ο δεύτερος θερμοστάτης}

P(να λειτουργήσει τουλάχιστον ένας από τους θερμοστάτες)

=P((να λειτουργήσει και ο πρώτος και ο δεύτερος) ή

(να λειτουργήσει ο πρώτος και να μην λειτουργήσει ο δεύτερος) ή

(να μην λειτουργήσει ο πρώτος και να λειτουργήσει ο δεύτερος))

$=P((A \text{ και } B) \text{ ή } (A \text{ και } B') \text{ ή } (A' \text{ και } B)) = P((A\cap B) \cup (A\cap B') \cup (A' \cap B))$

$=P(A\cap B) + P(A\cap B') + P(A' \cap B))$ ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

$=P(A)P(B) + P(A)P(B') + P(A')P(B)$ ανεξάρτητα ενδεχόμενα

$=0.9*0,8+0.9*0,2+0,1*0,8=0.98 =98\%$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Παράδειγμα 11

P(να λειτουργήσει μόνο ένας από τους θερμοστάτες)
=P((να λειτουργήσει και ο πρώτος και να μην λειτουργήσει ο δεύτερος) ή (να μην λειτουργήσει ο πρώτος και να λειτουργήσει ο δεύτερος))=
=P((A και B′) ή (A′ και B))= $P((A \cap B') \cup (A' \cap B))$=
=$P(A \cap B') + P(A' \cap B)$)
=P(A)P(B′) +P(A′) P(B)= 0.9*0,2+0,1*0,8=0.26 =26%

Παράδειγμα 12

Ένα καινούργιο τεστ διάγνωσης του καρκίνου έχει πιθανότητα θετικού σφάλματος (θετικό τεστ ενώ το άτομο είναι υγιές) 1% και πιθανότητα αρνητικού σφάλματος (αρνητικό τεστ ενώ το άτομο πάσχει από καρκίνο) 5%. Ο καρκίνος σ' ένα πληθυσμό εμφανίζεται με συχνότητα 0,01%. Αν από τον πληθυσμό αυτό εκλεγεί ένα άτομο στην τύχη και κάνει το τεστ, να βρεθεί η πιθανότητα το τεστ να είναι θετικό.

Λύση

Έστω A = {το τεστ να είναι θετικό}
B={ο ασθενής είναι υγιείς} και
Γ={ο ασθενής νοσεί από καρκίνο}

Το τεστ είναι θετικό όταν $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

$P(A) = P(A \cap B) \cup P(A \cap \Gamma) = P(A/B)P(B) + P(A/\Gamma)P(\Gamma)$

$P(A \cap B) = 0{,}01\%$ $\qquad$ $P(B) = 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999$

$P(A \cap \Gamma) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ $\qquad$ $P(\Gamma) = 0{,}01\% = 0{,}0001$

$P(A) = P(A \cap B) \cup P(A \cap \Gamma) = P(A/B)P(B) + P(A/\Gamma)P(\Gamma)$

$= 0{,}01 * 0{,}9999 + 0{,}95 * 0{,}0001 = 1\%$

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Παράδειγμα 13

Έστω 2 κλουβιά K1 και K2. Το πρώτο περιέχει 2 άσπρα και 8 μαύρα ποντίκια. Το δεύτερο περιέχει 6 άσπρα και 4 μαύρα ποντίκια. Εκτελούμε το εξής πείραμα:
Διαλέγουμε στην τύχη ένα κλουβί και μετά ένα ποντίκι από το κλουβί που εκλέχθηκε. Έστω ότι το ποντίκι είναι άσπρο. Ποια η πιθανότητα να έχει βγει από το πρώτο κλουβί;

Η πιθανότητα να εκλέξουμε το κλουβί K1 ή K2 είναι εκ των προτέρων ίση P(K1)=P(K2)=1/2

P(να έχει επιλεγεί το κλουβί K1/ ποντίκι άσπρο)=P(K1/A)=

$$= \frac{P(A/K1)P(K1)}{P(A/K1)P(K1) + P(A/K2)P(K2)} = \frac{0,2 * 0,5}{0,2 * 0,5 + 0,6 * 0,5} = \frac{1}{4}$$

$$P(K2/A) \quad = \frac{P(A/K2)P(K2)}{P(A/K2)P(K2) + P(A/K1)P(K1)} = \frac{0,6 * 0,5}{0,2 * 0,5 + 0,6 * 0,5} = \frac{3}{4}$$

Παράδειγμα 14

Μια ασθένεια A1 προσβάλλει άτομα με πιθανότητα 3% και μια άλλη A2 με πιθανότητα 6% και τα δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.
Να βρεθεί η πιθανότητα ένα άτομο
(α) να προσβληθεί από την A1 ή την A2
(β) να πάσχει από την A1 όταν γνωρίζουμε ότι πάσχει από την A2

$$
\begin{aligned}
P(A1 \text{ και } A2) &= P(A1 \cap A2) \\
&= P(A1)P(A2) \\
&= 0{,}03 * 0{,}06 = 0{,}0018
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(A1 \text{ ή } A2) &= P(A1)+P(A2) - P(A1 \cap A2) \\
&= 0{,}03+0{,}06-0{,}0018 \\
&= 0{,}0882
\end{aligned}
$$

$$P(A1/A2) = \frac{P(A1 \cap A2)}{P(A2)} = \frac{P(A1)P(A2)}{P(A2)} = P(A1) = 0{,}03$$

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Κατανομές Πιθανότητας

MBA Χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Τυχαία Μεταβλητή

- Ο τρόπος με τον οποίο εκφράζονται τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου μιας ενέργειας εξαρτάται από τη φύση των ενδεχομένων αυτών. Έτσι οι δειγματικοί χώροι κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες:

  α. Ποσοτικοί ή αριθμητικοί

  β. Ποιοτικοί ή Περιγραφικοί

- Είναι αναγκαίο να ορισθεί ένας κανόνας (ή μία συνάρτηση) που να αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό σε κάθε στοιχείο ενός δειγματικού χώρου S. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή** (*random variable*) και ορίζεται ως εξής:

Έστω ο δειγματικός χώρος S. Ορίζουμε ως τυχαία μεταβλητή μια μονοσήμαντη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το S και τιμές στην ευθεία των πραγματικών αριθμών R:

$$\mathbf{X: S \rightarrow R}$$

Τυχαία Μεταβλητή

Παρατηρήσεις

- Για κάθε τιμή x της X πρέπει να καθορίζεται η πιθανότητα P(X = x) η οποία θα πρέπει να ικανοποιεί τα βασικά αξιώματα του Kolmogorov. (ορισμός πιθανότητας)

- Σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο, s, του δειγματικού χώρου S ($s \in S$) αντιστοιχεί ακριβώς μία τιμή της τυχαίας μεταβλητής η x = X (s). Η ίδια τιμή x της X μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφορετικά στοιχειώδη ενδεχόμενα του S. (ορισμός συνάρτησης)

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Έστω η τυχαία μεταβλητή X : S→ R. Αν το πεδίο τιμών X (S) της είναι πεπερασμένο ή απείρως αριθμήσιμο τότε η μεταβλητή αυτή καλείται διακριτή ή απαριθμητή τυχαία μεταβλητή (discrete random variable).

Δηλαδή σε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X μπορούμε να αριθμήσουμε τις δυνατές τιμές της.

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και X(S) το πεδίο τιμών της. Μία συνάρτηση: **P(x)** = $p_x = P_x(x) = P(X = x)$ με πεδίο ορισμού τις τιμές της X και πεδίο τιμών τις πιθανότητες των τιμών αυτών η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:

(1) $P_x(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in X(S) \subseteq R$

(2) και $\sum_{x \in X(S)} P_x(x) = 1$

καλείται συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

Το σύνολο των ζευγών $\{(x, P_x(x))\, x \in X(S)\}$ καλείται κατανομή πιθανότητας της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X.

MBA Χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Παράδειγμα 1

Έστω μία οικογένεια με 3 παιδιά. Αν συμβολίσουμε με X τον αριθμό των αγοριών να καθοριστεί η κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X και να παρασταθεί γραφικά.

Ο αριθμός των αγοριών στην οικογένεια εξαρτάται από το αποτέλεσμα του καθενός από τους τρεις τοκετούς.
Είναι λοιπόν δυνατό να εμφανιστούν κανένα, ένα, δύο ή τρία αγόρια. Κατά συνέπεια η μεταβλητή X η οποία εκφράζει τον αριθμό των αγοριών είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει τις τιμές :

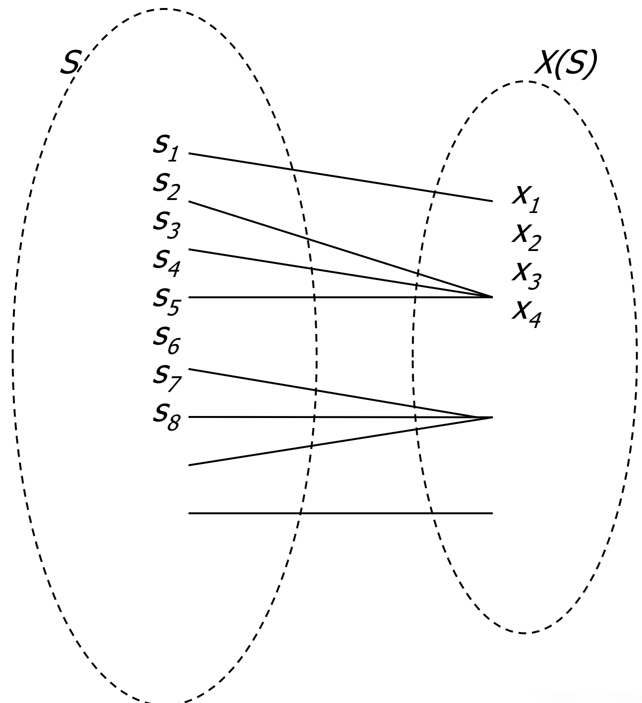
$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 2,\ \ x_4 = 3.$$

Στοιχειώδη Ενδεχόμενα Δειγμ. Χώρου S	**Αριθμός Αγοριών X**	**Πιθανότητα**
s_1: ΚΚΚ	x_1	1/8
s_2: ΑΚΚ	x_2	1/8
s_3: ΚΑΚ	x_3	1/8
s_4: ΚΚΑ	x_4	1/8
s_5: ΑΑΚ	x_5	1/8
s_6: ΑΚΑ	x_6	1/8
s_7: ΚΑΑ	x_7	1/8
s_8: ΑΑΑ	x_8	1/8

Παράδειγμα 1

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο s_i του δειγματικού χώρου αντιστοιχεί ακριβώς μια τιμή της τυχαίας μεταβλητής X και επιπλέον η ίδια τιμή μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφορετικά στοιχειώδη ενδεχόμενα του S.

Η αντιστοιχία μεταξύ των στοιχειωδών ενδεχομένων και των τιμών της τυχαίας μεταβλητής X απεικονίζεται γραφικά



Παράδειγμα 1

- Αφού προσδιορίσουμε τις δυνατές τιμές της τυχαίας μεταβλητής X μπορούμε τώρα να ορίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της:

$$P(x_i) = P(X = x_i).$$

- Με τη συνάρτηση αυτή σε κάθε στοιχείο x του πεδίου τιμών X(S) της μεταβλητής X αντιστοιχούμε έναν πραγματικό αριθμό P(x) που είναι ακριβώς η πιθανότητα εμφάνισης της τιμής αυτής.

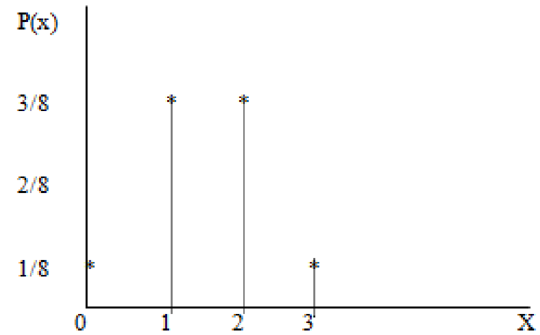
Δυνατές τιμές της τυχαίας μεταβλητής X x_i	**Πιθανότητες εμφάνισης τους $P(X=x_i)$**
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

$$P(0) = P(X=0) = \frac{1}{8}$$

$$P(1) = P(X=1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(2) = P(X=2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(3) = P(X=3) = \frac{1}{8}$$



$$\sum_{i=1}^{3} P(x_i) = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)P(x_4) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

MBA Χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Έστω X τυχαία μεταβλητή. Αν το πεδίο τιμών X(S) της X είναι μη αριθμήσιμο σύνολο τότε η X ονομάζεται συνεχής τυχαία μεταβλητή

Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή και X(S) το πεδίο τιμών της. Μία συνάρτηση **f(x)** με πεδίο ορισμού το σύνολο X(S) και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες :

(1) $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in X(S)$ όπου $-\infty < x < +\infty$

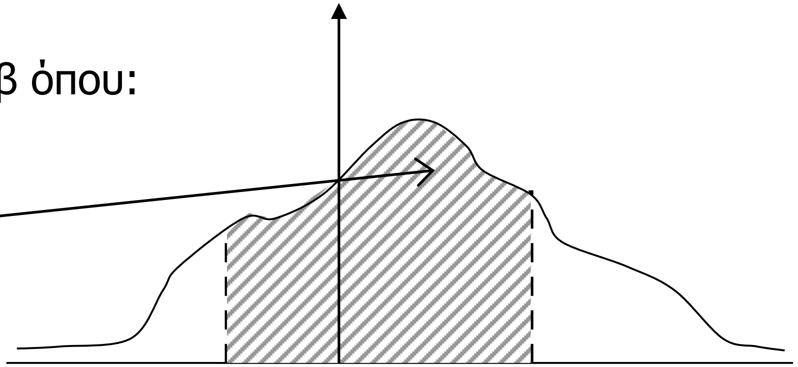
(2) και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλά πυκνότητα πιθανότητας

Για οποιοδήποτε ζεύγος πραγματικών αριθμών α και β όπου:

$-\infty < \alpha \leq x \leq \beta < +\infty$, ισχύει:

$$P(\alpha \leq x \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$



MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Παράδειγμα 2

Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$\begin{Bmatrix} 4x^2 \forall x \in [0,1] \\ 0 \quad \forall x \notin [0,1] \end{Bmatrix}$$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα να λάβει η X τιμή

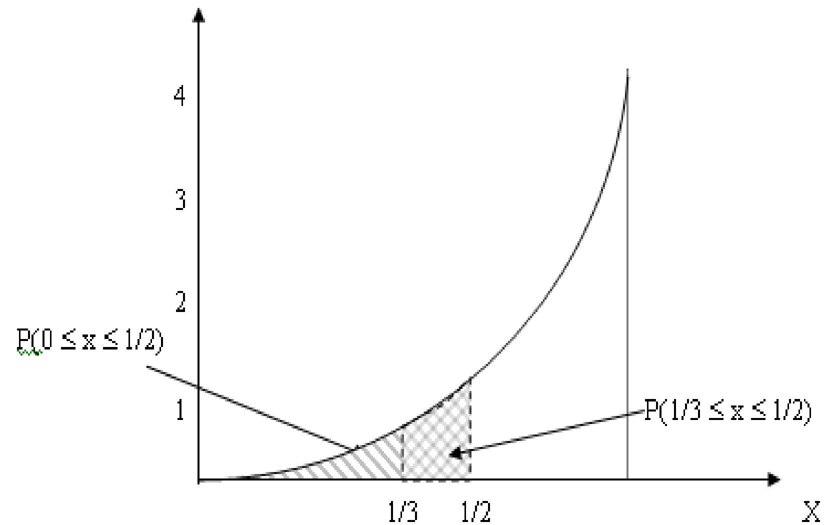
α. Μικρότερη από ή ίση με x = 1/2

β. Μεταξύ των x =1/3 και x = 1/2.

ΛΥΣΗ

$$\alpha.\ P(0 \le x \le 1/2) = \int_0^{1/2} 4x^3 dx = \left[x^4 + c\right]_0^{1/2}$$

$$= \left[(1/2)^4 + c\right] - [0 + c] = 1/16$$



$$\beta.\ P(1/3 \le x \le 1/2) = \int_{1/3}^{1/2} 4x^3 dx = \left[x^4 + c\right]_{1/3}^{1/2}$$

$$= \left[(1/2)^4 + c\right] - \left[(1/3)^4 + c\right] = 65/1296$$

Οι πιθανότητες που υπολογίστηκαν είναι ίσες με τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων περιοχών κάτω από την καμπύλη.

Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας Τυχαίας μεταβλητή;

- Έστω X τυχαία μεταβλητή (διακριτή ή συνεχής).
  Η συνάρτηση

  $$F(x) = P(X \leq x)$$

  η οποία εκφράζει την πιθανότητα να λάβει η τυχαία μεταβλητή X οποιαδήποτε τιμή μικρότερη από ή ίση με x καλείται αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας ή απλά συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

- Ιδιότητες της F(x)
  - $0 \leq F(x) \leq 1$
  - Αν $\alpha \leq \beta \Rightarrow F(\alpha) \leq F(\beta)$
  - $\cdot \lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 0$

- Η πιθανότητα να λάβει η τυχαία μεταβλητή X τιμή μεταξύ α και β δίνεται από τη σχέση:

  $$P(\alpha \leq x \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Διακριτή τυχαία μεταβλητή

- Στην περίπτωση διακριτής τυχαίας μεταβλητής X

$$P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(x_i)$$

- δηλαδή η πιθανότητα να λάβει η X τιμές μικρότερες ή ίσες του x ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων P(xi) των τιμών xi τις οποίες μπορεί να πάρει η X και για τις οποίες ισχύει xi ≤ x
- Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο:

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} P(x_i), \quad -\infty \langle x \langle +\infty$$

- Από τον τύπο αυτόν προκύπτει ότι αν x_k είναι μία τιμή της x τότε,

$$P(x_k) = P(X = x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

Διακριτή τυχαία μεταβλητή

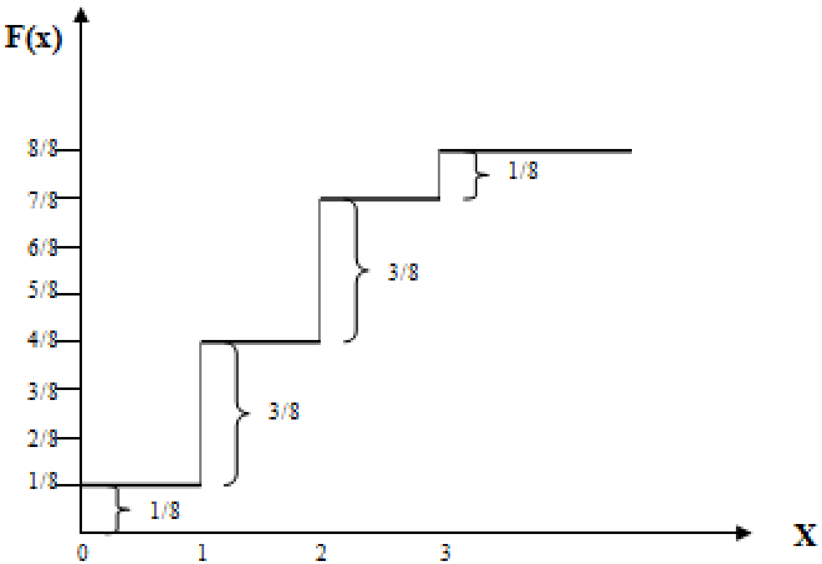
Θέλουμε να υπολογίσουμε την αθροιστική της συνάρτηση κατανομής.

$$F(0)=\sum_{x_i \le 0} P(x_i)=P(0)=\frac{1}{8}$$

$$F(1)=\sum_{x_i \le 1} P(x_i)=P(0)+P(1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$$

$$F(2)=\sum_{x_i \le 2} P(x_i)=P(0)+P(1)+P(2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$

$$F(3)=\sum_{x_i \le 3} P(x_i)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$$



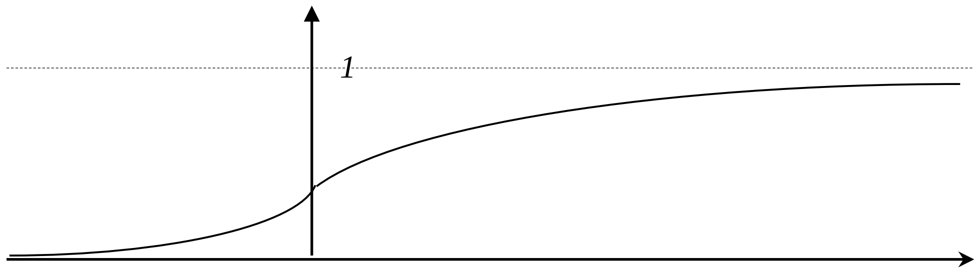
MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Συνεχής τυχαία μεταβλητή

- Στην περίπτωση συνεχούς τυχαίας μεταβλητής Χ έχουμε ότι:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dx \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dx$$

- Προφανώς η μορφή της καμπύλης της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής F(x) εξαρτάται από τη μορφή της καμπύλης της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας f(x).



Αν παραγωγίσουμε την F(x) ως προς x έχουμε ότι:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x)$$

Συνεχής τυχαία μεταβλητή (παρ.)

Στο προηγούμενο παράδειγμα ζητάμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες

$P(1/3 \leq X \leq 1/2)$ $P(0 \leq X \leq 1/2)$

Γνωρίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 4t^2 dt = \left[t^4 + c\right]_0^x = x^4.$$

οπότε

$$P(0 \leq X \leq 1/2) = F(1/2) - F(0)$$
$$= (1/2)^4 - 0 = 1/16$$

$$P(1/3 \leq X \leq 1/2) = F(1/2) - F(1/3)$$
$$= (1/2)^4 - (1/3)^4 = 65/1296$$

Μέτρα κεντρικής τάσης

Μέση τιμή

Διακριτή τ.μ.

Χ διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας P(x)

Η μέση τιμή της δίνεται από

$$E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i)$$

με την προϋπόθεση φυσικά ότι το άθροισμα αυτό συγκλίνει.

Αν η Χ παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$$

Συνεχής τ.μ.

Χ συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) . Η μέση τιμή της δίνεται

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

με την προϋπόθεση φυσικά ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Αν η Χ παίρνει τιμές στο διάστημα [a, b] τότε έχουμε

$$E(x) = \int_{a}^{b} x f(x) dx$$

Μέτρα κεντρικής τάσης

Ιδιότητες Μέσης τιμής

Για τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής, συνεχούς ή διακριτής, αποδεικνύεται ότι

- E(α) = α, όπου α είναι σταθερή ποσότητα.
- E(αX) = α E(X), όπου α είναι σταθερή ποσότητα.
- E(αX +β) = α E(X) + β, όπου α, β είναι σταθερές ποσότητες
- E[X – E(X)] = 0
- E(αX +βY) αE(X) + βE(Y) ή γενικά

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i),$$

Μέτρα Κεντρική Τάσης
Διάμεσος

Διάμεσος μιας τ.μ. Χ είναι εκείνη η τιμή που χωρίζει την κατανομή σε δύο ίσα μέρη.

Διακριτή τ.μ.

Χ διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας P(x).

Η διάμεσος Μ είναι εκείνη η τιμή για την οποία έχουμε:

$P(X \leq M) \geq 1/2$ *και*

$P(X \geq M) \geq ½$

Συνεχής τ.μ.

Χ συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x).

Η διάμεσος Μ είναι εκείνη η τιμή η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης:

$$\int_{-\infty}^{M} f(x)dx = 1/2$$

Ο καλύτερος τρόπος υπολογισμού της διαμέσου είναι με τη χρήση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής F(x).

Η διάμεσος είναι η μικρότερη τιμή που δίνει $F(x) \geq 1/2$

Η διάμεσος είναι η τιμή εκείνη που δίνει $F(x) = ½$.

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Μέτρα Κεντρική Τάσης
p-ποσοστιαίο σημείο

p - ποσοστιαίο σημείο μιας τυχαίας μεταβλητής είναι εκείνη η τιμή (Xp)για την οποία ισχύει:

Διακριτή τ.μ.

$P(X \leq Xp) \geq p$ και

$P(X \geq Xp) \geq 1 - p$

Συνεχής τ.μ.

$F(X_p) = p$

- *αν p = 0,5 το Xp είναι διάμεσος (M)*
- *αν p = 0,25 το Xp είναι το 1ο τεταρτημόριο (Q1)*
- *αν p = 0,75 το Xp είναι το 3ο τεταρτημόριο (Q3).*

Μέτρα Κεντρικής Τάσης
Επικρατούσα Τιμή

Επικρατούσα Τιμή μιας τ.μ.Χ είναι εκείνη η τιμή που έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης από κάθε άλλη τιμή.

Διακριτή τ.μ.

Χ διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας P(x).

Η επικρατούσα τιμή είναι εκείνη η τιμή T_0 για την οποία ισχύει:

$$P(X = T_0) \geq P(X = x), \ \forall x$$

Συνεχής τ.μ.

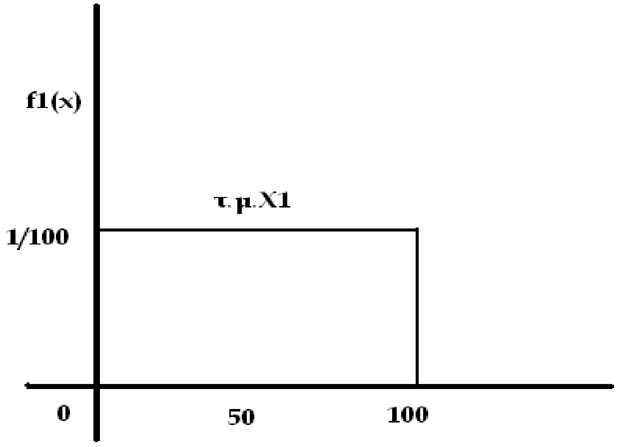
Χ συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x).

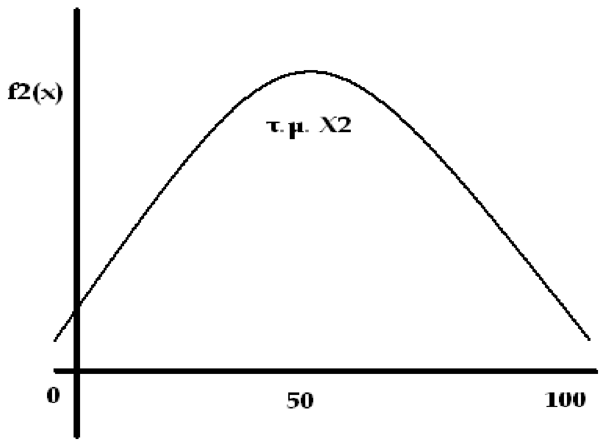
Η επικρατούσα τιμή είναι εκείνη η τιμή T0 για την οποία ισχύει:

$$f(T_0) \geq f(x), \ \forall x$$

Μέτρα Κεντρικής Τάσης
Χρειαζόμαστε κάτι ακόμα????

Έστω οι μεταβλητές Χ1 & Χ2 έχουν κατανομές f1(x) και f2(x) οι οποίες έχουν το ίδιο πεδίο τιμών, τις ίδιες μέσες τιμές αλλά είναι τελείως διαφορετικής μορφής





- *Για την μεταβλητή Χ1 όλες οι τιμές μεταξύ 0 και 100 είναι ισοπίθανες, ενώ για την μεταβλητή Χ2 οι τιμές κοντά στο 0 και στο 100 είναι αρκετά απίθανο να πραγματοποιηθούν.*
- *Η διαφορά μεταξύ μιας τιμής της Χ1 και της μέσης τιμής μ=50 είναι πιθανό να είναι μεγάλη, ενώ η ίδια διαφορά για το Χ2 είναι απίθανο να είναι μεγάλη*

Κατά πόσο ενδέχεται μια τ.μ. να αποκλίνει από την μέση τιμή της??

Μέτρα Διασποράς
Διακύμανση

Χρειαζόμαστε λοιπόν ένα μέτρο μεταβλητότητας ή διασποράς της τ.μ.

Έστω Χ τ.μ. (διακριτή ή συνεχής) με μέση τιμή μ = Ε(Χ). Η διακύμανση της Χ συμβολίζεται με V (X) ή σ^2 και δίνεται από τον τύπο:

$$V(X) = \sigma^2 = E\left[X - E(X)\right]^2 = E(X-\mu)^2$$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(x_i) - \mu^2$$

Ιδιότητες

- V(α) = 0 , όπου α σταθερή ποσότητα.
- V(x +α) = V(x), όπου α σταθερή ποσότητα.
- V(αx) = α^2 V(x) , όπου α σταθερή ποσότητα.
- V(αx +β) = α^2 V(x) , όπου α, β σταθερές ποσότητες.

Μέτρα Διασποράς
Ενδοτεταρτομοριακό Εύρος

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος ορίζεται ως $Q_3 - Q_1$ και η τεταρτημοριακή απόκλιση ως

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}.$$

Το Q1 (1ο τεταρτημόριο ή 25ο εκατοστιαίο σημείο) και το Q3 (3ο τεταρτημόριο ή 75ο εκατοστιαίο σημείο) υπολογίζονται με βάση τη γενική μεθοδολογία που δόθηκε σε προηγούμενη ενότητα για το p – ποσοστιαίο σημείο.

Παράδειγμα 2 (συνεχής τυχαία μεταβλητή_συνέχεια)

Στο παράδειγμα 2 η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X, βρέθηκε

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 4t^2 dt = \left[t^4 + c\right]_0^x = x^{4.}$$

ζητάμε να υπολογίσουμε

τη μέση τιμή

τη διάμεσο

την διασπορά

τη τυπική απόκλιση

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Παράδειγμα 2 (συνεχής τυχαία μεταβλητή_συνέχεια)

Η μέση τιμή είναι

$$E(X) = \int_a^b x f(t) dt = \int_0^1 x 4x^3 dt$$
$$= \left[\frac{4x^5}{5} + c \right]_0^1 = [(4/5) + c] - [0 + c] = 4/5.$$

Η διάμεσος

Γνωρίζουμε ότι για τη διάμεσο ότι ικανοποιεί την εξίσωση $\int_{-\infty}^{M} f(x) dx = 1/2$ άρα

$$\int_{-\infty}^{M} 4x^3 dx = 1/2 \Rightarrow \left[x^4 + c \right]_0^M = 1/2 \Rightarrow M^4 = 1/2 \Rightarrow M = \sqrt[4]{1/2}$$

την επικρατούσα τιμή

την διασπορά

τη τυπική απόκλιση

MBA χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
διοικώ σημαίνει αποφασίζω

Παράδειγμα 2 (συνεχής τυχαία μεταβλητή_συνέχεια)

Η διασπορά δίνεται από τον τύπο

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

άρα

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2\ 4x^3 dx$$

$$= \left[\frac{4x^6}{6} + c\right]_0^1 = \left[(2/3) + c\right] - \left[0 + c\right] = 2/3$$

Την μέση τιμή την έχουμε ήδη υπολογίσει, οπότε η διασπορά είναι

V(X) = 2/3 – (4/5)2 = 2/25

και η τυπική απόκλιση $\sigma^2 = \frac{\sqrt{2}}{5}$

Παράδειγμα 3

Έστω η συνεχής μεταβλητή Χ με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{2\left(\theta - x\right)}{\theta^2}, \ 0 \le x \le \theta$$

όπου θ>0 και είναι η παράμετρος της κατανομής.

(α) Να αποδείξετε ότι είναι μια σ.π.π.

(β) Να υπολογιστούν η μέση τιμή Ε(Χ) και η διασπορά V(X)

Παράδειγμα 3

(α) Από τον ορισμό της συνεχούς πυκνότητας πιθανότητας έχουμε:

$$\int_0^c f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^c (c-x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^c cdx - \int_0^c xdx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\cdot x\Big|_0^c - \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^c = 1 \Rightarrow c^2 - 0 - \frac{c^2}{2} + 0 = 1 \Rightarrow \frac{c^2}{2} = 1 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}$$

{η αρνητική τιμή απορρίπτεται, αφού 0 <x< c}.

(β) $$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (c-t)dt = \int_0^x cdt - \int_0^x tdt = c\cdot t\Big|_0^x - \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^x = c\cdot x - 0 - \frac{x^2}{2} + 0 \overset{c=\sqrt{2}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}\cdot x$$

Η F(x) είναι συνάρτηση, γι αυτό το ολοκλήρωμα έχει πάνω άκρο το x και όχι έναν αριθμό

Παράδειγμα 3

(γ) $P(x \le 1/2) = \int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/2} (\sqrt{2} - x)dx = \int_0^{1/2} \sqrt{2}dx - \int_0^{1/2} xdx =$

$$= \sqrt{2} \cdot x\Big|_0^{1/2} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - \frac{1}{8} + 0 \Rightarrow P(x \le 1/2) = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(δ) $P(x > 1) = 1 - P(x \le 1) = 1 - F(1) = 1 - \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(x > 1) = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$

Που απευθύνομαι?????

Ελένη Γάκη,
Τηλ. 2271035161
Email: e.gaki@aegean.gr
Υλικό μαθήματος
https://eclass.aegean.gr/